

GRAPHISCHE METHODEN ZUR ERMITTELUNG ADIABATISCHER ZUSTANDSÄNDERUNGEN FEUCHTER LUFT

VON JONAS EKMAN FJELDSTAD

(Eingeliefert am 16. April 1925)

Einleitung.

Wenn eine Luftmasse ihre Höhenlage ändert, wird sich gleichzeitig ihr Druck und Volumen ändern. Der Druck nimmt bekanntlich mit wachsender Höhe ab, und das spezifische Volumen muß sich vergrößern. Wenn die Änderungen so schnell vor sich gehen, daß man von Wärmegewinn und Wärmeverlust absehen kann, so nennt man sie adiabatisch. Bei der Expansion leistet die Luft Arbeit, und das geschieht auf Kosten des Wärmeinhalts. Die Temperatur muß also sinken. Bei trockener Luft ist der Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur durch die Poissonsche Gleichung gegeben:

$$\log \frac{p}{p_0} = m \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^m \quad m = \frac{\kappa}{\kappa - 1}.$$

$\kappa = 1,4053$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen.

Enthält die Luft aber Wasserdampf, kann Kondensation eintreten und die Beziehung zwischen Druck und Temperatur wird nicht so einfach: Das Benehmen adiabatisch aufsteigender feuchter Luft ist von Hann, Guldberg und Mohn u. a. theoretisch erforscht. Ausführlicher Literaturnachweis findet sich in Dr. Otto Neuhofs Abhandlung »Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft«. (Königl. Preuß. Meteorol. Inst. Abhandl., Bd. 1, 1901).

Dr. Heinrich Hertz hat eine graphische Tafel konstruiert, mit deren Hilfe man die Zustandsänderungen adiabatisch expandierender feuchter Luft verfolgen kann, ohne die etwas weitläufigen Rechnungen ausführen zu müssen, die notwendig sind, um die Sache exakt mathematisch zu behandeln. Diese Tafel umfaßt das Temperaturintervall von $+ 30^\circ$ bis $- 20^\circ$ C und den Druck zwischen 800 und 300 mm Quecksilber. Von Bezold hat dann darauf hingewiesen, daß die Zustandsänderungen in der Atmosphäre im allgemeinen nicht umkehrbar sind, denn die Kondensation ist in den meisten Fällen von Niederschlägen begleitet, und die Zusammensetzung der Luft wird dadurch geändert. Der Grenzfall, daß alles kondensierte Wasser herausfällt, ist von ihm als pseudoadiabatisch bezeichnet und von Neuhof näher untersucht worden.

Neuhof hat eine neue graphische Tafel konstruiert, die den Zusammenhang zwischen Höhe und Temperatur gibt. Überdies hat er Tabellen für den Gebrauch bei der rechnerischen Lösung der Aufgabe aufgestellt. Seine Tafel umfaßt das Temperaturintervall von $+ 30^\circ$ C bis $- 30^\circ$ C und den Druck zwischen 760 und 300 mm Quecksilber. Diese

Tafel löst sehr praktisch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen Höhe und Temperatur in Luft, die in adiabatischem Gleichgewichte ist, zu finden.

Neuere meteorologische Forschung hat die Erweiterung der Tafel wünschenswert gemacht, und ich habe darum nach Aufforderung der Professoren Bjerknes und Helland-Hansen eine neue Tafel konstruiert. Die Koordinaten sind Druck und Temperatur. Die Einheiten sind Millibar und Celsiusgrade. Umfang und Maßstab der Tafel ist nach Rücksprache in Übereinstimmung mit Herrn Dr. Jac. Bjerknes bestimmt. Meinen herzlichsten Dank richte ich an Herrn Professor Helland-Hansen, der mich während der Arbeit mit Rat und Tat unterstützt hat.

Um nicht auf andere Werke verweisen zu müssen, gebe ich im folgenden die Herleitung der Formeln, die bei der Konstruktion der Tafel verwendet wurden.

Ich gehe von 1 kg trockener Luft und x kg Wasser aus, die gesamte Masse ist also $(1 + x)$ kg. Dies ist so gewählt worden, um der geänderten Zusammensetzung der Luft bei Niederschlägen besser Rechnung tragen zu können. Den Druck der trockenen Luft bezeichne ich mit p' , den des Wasserdampfes mit e und den Gesamtdruck mit p . ϑ ist die absolute Temperatur. Die Zustandsgleichung der trockenen Luft ist dann:

$$p' v = R \vartheta, \quad (1)$$

wobei v das spezifische Volumen und R bekanntlich die Gaskonstante ist. Mißt man v in cdm und p in mb , wird R gleich 2871. Solange der Wasserdampf nicht gesättigt ist, hat man für diesen eine Gleichung von ähnlicher Form:

$$e v = x R_1 \vartheta.$$

$\frac{R}{R_1} = \varepsilon = 0,6219$ ist das relative spezifische Gewicht des Wasserdampfes. Die Zustandsgleichung des Gemenges von Luft und Wasserdampf wird dann

$$p v = R \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right) \vartheta. \quad (2)$$

Es ist also eine Gleichung von derselben Form, die Konstante aber ist von x abhängig.

Um nun die Temperaturänderungen adiabatisch expandierender, feuchter Luft zu verfolgen, muß man mehrere getrennte Stadien betrachten. Nach dem Vorschlage von Hertz nenne ich sie *Trocken-*, *Regen-*, *Hagel-* und *Schnee-*Stadium. Das Trockenstadium dauert bis zur Sättigung der Luft an, dann tritt das Regenstadium ein. Bei 0° beginnt das in der Luft enthaltene Wasser zu gefrieren, und das isotherme Hagelstadium währt bis daß alles Wasser gefroren ist. Bei weiterer Abkühlung scheidet der Wasserdampf als Schnee aus (Schneestadium).

Trockenstadium.

Führt man dem Gemische von Luft und Wasserdampf eine Wärmemenge dQ zu, so wird ein Teil derselben dQ' dazu benutzt werden, der trockenen Luft eine Temperaturerhöhung zu geben und zugleich äußere Arbeit bei der Expansion zu leisten. Der Rest dQ'' erhitzt und expandiert in derselben Weise den Wasserdampf. Nennt man die spez. Wärme der Luft bei konstantem Volumen c_v , so wird die Wärmegleichung für die Luft:

$$dQ = c_v d\vartheta + A p dv.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Zustandsgleichung

$$p' v = R \vartheta, \quad \text{erhält man:}$$

$$dQ' = (c_v + A R) d\vartheta - A v dp'.$$

$c_v + A R = c_p$ ist die spez. Wärme der Luft bei konstantem Druck. Für den Wasserdampf findet man in derselben Weise:

$$d Q'' = x c'_p d \vartheta - A v d e.$$

Setzt man $d Q = d Q' + d Q''$, so wird die Wärme Gleichung für das Gemenge

$$d Q = (c_p + x c'_p) d \vartheta - A v d p. \quad (3)$$

Bei adiabatischer Zustandsänderung setzt man $d Q = 0$.

Dividiert man durch ϑ und integriert, so erhält man

$$(c_p + c'_p x) \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = A R \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \frac{p}{p_0}, \quad (4)$$

oder indem man

$$m_1 = \frac{c_p}{A R} \frac{\left(1 + x \frac{c'_p}{c_p}\right)}{1 + \frac{x}{\varepsilon}} \text{ setzt,}$$

$$\log p - m_1 \log \vartheta = \text{konst.} \quad (4')$$

Führt man jetzt Zahlenwerte ein, erhält man

$$m_1 = 3,467 \frac{1 + 1,94 x}{1 + 1,608 x}.$$

Die gefundene Gleichung stimmt in der Form mit der Poissonschen überein, jedoch der Koeffizient m_1 erhält andere Werte.

Die Gleichung gilt nun solange der Wasserdampf nicht gesättigt ist. Wird der Sättigungspunkt erreicht, so tritt bei weiterer Expansion Kondensation ein. Die Sättigungstemperatur gibt somit die obere Grenze des Trockenstadiums an. Der Wasserdampf folgt angenähert der Zustandsgleichung bis zur Sättigung, und die Beziehung

$$x = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - e}$$

gilt somit auch angenähert im Momente der Sättigung.

Die Sättigungstemperatur ist darum bestimmt durch die zwei Gleichungen

$$x = \varepsilon \cdot \frac{e_m}{p - e_m}$$

$$\log \frac{p}{p_0} = m_1 \cdot \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

Im Trockenstadium ist x konstant, und man hat $\frac{e}{p - e} = \text{konst.}$, und darum auch $\frac{e}{p} = \text{konst.}$ Man kann darum auch schreiben:

$$\log \frac{e_m}{e_0} = m_1 \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0},$$

$e_m = f(\vartheta)$ hat man dabei aus der Dampfdrucktabelle zu nehmen.

Die Lösung kann durch Probieren geschehen.

Anstatt diese Gleichung direkt zu lösen, kann man auch den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kurven in einem Koordinatensystem finden. Dies geschieht nun in der Adiabaten tafel dadurch, daß die Kurven $x = \text{konst.}$ eingetragen sind, und man hat dann die Trockenadiabate solange zu verfolgen, bis man den Schnittpunkt mit der Kurve $x = \text{konst.}$ trifft, und dann geht man zum Regenstadium über.

Regenstadium.

Sinkt die Temperatur unter den Sättigungspunkt, tritt Kondensation ein. Wenn das kondensierte Wasser in der Luft bleibt, kann man die Adiabatengleichung leicht bestimmen. Man hat nämlich wie früher für die trockene Luft

$$dQ' = c_p d\vartheta - A v dp.$$

Ist nun die gesamte Feuchtigkeitsmenge x kg, die Menge des Wasserdampfes ξ , so ist die Menge des kondensierten Wassers $x - \xi$. Das Volumen des kondensierten Wassers können wir vernachlässigen. Führt man nun der gesamten Feuchtigkeitsmenge x die Wärmemenge dQ'' zu, so wird diese dazu gebraucht:

1. Die Temperatur des Wassers zu erhöhen. Diese Menge ist $c(x - \xi) d\vartheta$.
2. Eine gewisse Menge Wasser zu verdampfen. Nennt man die Verdampfungswärme des Wassers r , so kann man diese Wärmemenge gleich $r d\xi$ setzen.
3. Die Temperatur des gesättigten Wasserdampfes zu steigern, während der Dampf gesättigt bleibt. Man kann diese Menge gleich $\xi h d\vartheta$ setzen.

Man hat dann:

$$dQ'' = c(x - \xi) d\vartheta + h\xi d\vartheta + r d\xi.$$

Wendet man den Entropisatz von Classius an, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{c(x - \xi) + h\xi}{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{r}{\vartheta} \right),$$

$$\frac{h - c}{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{r}{\vartheta} \right),$$

$$h = c + \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{r}{\vartheta} \right).$$

Diesen Wert von h setzt man in die Wärmegleichung ein, und erhält dann

$$dQ'' = c x d\vartheta + \xi \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{r}{\vartheta} \right) d\vartheta + r d\xi.$$

Diese Gleichung kann auch in Form von

$$dQ'' = c x d\vartheta + \vartheta d \left(\frac{r\xi}{\vartheta} \right) \quad \text{geschrieben werden.}$$

Man erhält darum als Wärmegleichung

$$dQ = (c_p + x c) d\vartheta + \vartheta d \left(\frac{r\xi}{\vartheta} \right) - A v dp'. \quad (6)$$

Setzt man $dQ = 0$, dividiert durch ϑ und integriert, so erhält man, indem M der Modulus der gemeinen Logarithmen ist:

$$(c_p + x c) \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0} + M \left(\frac{r\xi}{\vartheta} - \frac{r_0 \xi_0}{\vartheta_0} \right) - A R \log \frac{p'}{p_0} = 0,$$

oder

$$\log \frac{p - e}{p_0 - e_0} = \frac{M}{A R} \left(\frac{r \xi}{\vartheta} - \frac{r_0 \xi_0}{\vartheta_0} \right) + \frac{c_p}{A R} \left(1 + \frac{c}{c_p} x \right) \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0}. \quad (7)$$

Anstatt der variablen Dampfmenge ξ kann man auch den Partialdruck durch die Formel

$$\xi = \varepsilon \frac{e}{p - e} \quad \text{einführen.}$$

Tut man dies und setzt zugleich

$$m_2 = \frac{c_p}{A R} \left(1 + x \frac{c}{c_p} \right); \quad a_2 = \frac{M r}{A R \vartheta} \varepsilon e,$$

kann die Gleichung zuletzt

$$\log (p - e) - \frac{a_2}{p - e} - m_2 \log \vartheta = \text{konst.} \quad (8)$$

geschrieben werden. c ist die spezifische Wärme des Wassers und kann mit hinreichender Genauigkeit gleich 1 gesetzt werden. Trägt man die Zahlenwerte ein, wird

$$m_2 = 3,467 (1 + 4,21 x),$$

r ist nach Griffiths (Winkelmans Handbuch) gleich $596,73 - 0,601 t$. Man kann auch aus der Gleichung (7) und

$$\xi = \varepsilon \frac{e}{p - e}$$

p eliminieren, und erhält dann eine Beziehung zwischen der variablen Dampfmenge ξ und der Temperatur ϑ :

$$\log \xi + \frac{M}{A R} \frac{r \xi}{\vartheta} + m \log \vartheta - \log e = \text{konst.} \quad (9)$$

Hagelstadium.

Enthält die Luft Wasser suspendiert, tritt bei 0° das isotherme Hagelstadium ein.

Es sei die Gesamtmenge der Feuchtigkeit x , die Menge von Wasserdampf ξ , und von Eis η . Die Wärmeleichung wird dann

$$dQ = -A R \vartheta \frac{dp'}{p'} + r d\xi - l d\eta. \quad (l \text{ Schmelzwärme des Eises.})$$

$dQ = 0$ gesetzt und Integration ergibt

$$A R \vartheta \log \frac{p - e}{p_0 - e} = M r (\xi - \xi_0) - M l (\eta - \eta_0).$$

Wünscht man nur den Zusammenhang zwischen Anfangsdruck und Enddruck zu haben, hat man $\eta_0 = 0$, $\eta = x - \xi$, da im Anfange kein Eis vorhanden ist.

Führt man statt ξ und ξ_0 die Partialdrucke ein, so erhält man

$$\log (p - e) - \frac{M(r + l)}{A R \vartheta} \varepsilon e \frac{1}{p - e} = \log (p_0 - e) - \frac{M r \varepsilon e}{A R \vartheta} \frac{1}{p_0 - e} - \frac{M l}{A R \vartheta} x. \quad (10)$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, reduziert sich die Gleichung auf

$$\log (p - e) - \frac{59,65}{p - e} = \log (p_0 - e) - \frac{52,51}{p_0 - e} - 1,858 x. \quad (10')$$

Wenn alles Wasser gefroren ist, gelangt man zum Schneestadium.

Schneestadium.

Die Gleichungen des Schneestadiums und die des Regenstadiums werden ganz analog, nur mit dem Unterschiede, daß anstatt der Verdampfungswärme des Wassers hier die Sublimationswärme des Eises L auftritt.

Hier besteht ein Unterschied zwischen meinen Gleichungen und den Gleichungen von Hertz und Neuhof. Die beiden Forscher sind davon ausgegangen, daß die Sublimationswärme des Eises der Summe der Verdampfungswärme des Wassers und der Schmelzwärme des Eises gleich zu setzen ist. Dabei haben sie die Schmelzwärme des Eises konstant und gleich 80 Kal. und die Verdampfungswärme des Wassers variabel und gleich $606,5 - 0,695 t$ angenommen. Es wird also keine Rücksicht auf die mögliche Veränderlichkeit der Schmelzwärme des Eises mit der Temperatur genommen. Durch direkte Überlegungen bin ich dazu gekommen, daß die Sublimationswärme des Eises beinahe konstant sein muß¹. Bei der Konstruktion der Tafel habe ich für die Sublimationswärme des Eises 677 Kal. gebraucht. Die Adiabatengleichung für das Schneestadium wird

$$\log(p - e) - \frac{ML}{AR\vartheta} \cdot \varepsilon e \frac{1}{p - e} - \frac{c_p}{AR} \left(1 + x \frac{c'_1}{c_p}\right) \log \vartheta = \text{konst.} \quad (11)$$

oder

$$\log(p - e) - \frac{a_4}{p - e} - m_4 \log \vartheta = \text{konst.} \quad (11')$$

$$a_4 = \frac{ML}{AR\vartheta} \varepsilon e = 2670 \cdot \frac{e}{\vartheta}; \quad m_4 = 3,467 (1 + 1,95 x).$$

Pseudoadiabatische Zustandsänderungen.

Die thermodynamischen Gleichungen im pseudoadiabatischen Falle erhält man unter Berücksichtigung, daß das kondensierte Wasser herausfällt. Für die trockene Luft hat man wie früher

$$dQ' = c_p d\vartheta - A v dp'.$$

Ist nun x die ursprüngliche Feuchtigkeitsmenge und die Dampfmenge ξ , so hat man in der Gleichung

$$dQ'' = c x d\vartheta + \vartheta d\left(\frac{r\xi}{\vartheta}\right)$$

nur x mit ξ zu ersetzen. Als Wärmegleichung erhält man dann

$$dQ = (c_p + \xi c'_p) d\vartheta - AR\vartheta \cdot \frac{dp'}{p'} + \vartheta d\left(\frac{r\xi}{\vartheta}\right).$$

Setzt man wie früher $dQ = 0$, dividiert durch ϑ und integriert, so erhält man

$$M \int (c_p + \xi c'_p) \frac{d\vartheta}{\vartheta} - AR \log p + M \left(\frac{r\xi}{\vartheta}\right) = \text{konst.} \quad (12)$$

Um das erste Integral auswerten zu können, müßte man ξ als Funktion von ϑ kennen. Dies ist jedoch nicht der Fall; die Anwendung eines Mittelwertsatzes ist dagegen möglich. Man hat nämlich

¹ J. E. Fjeldstad: Einige thermische Eigenschaften von Eis und Wasserdampf. Geofysiske publ. 1925. Vol. III. No. 11.

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \varphi(a + \Theta b) \int_a^b \psi(x) dx, \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Wendet man diesen Satz auf das erste Integral an, so erhält man

$$(c_p + c_p' \xi_1) \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0} - A R \log \frac{p'}{p_0} + M \left(\frac{r \xi}{\vartheta} - \frac{r_0 \xi_0}{\vartheta_0} \right) = 0. \quad (13)$$

ξ_1 liegt zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, seinen wahren Wert kennen wir nicht. Wir wissen jedoch, daß ξ mit ϑ stetig wächst. Nimmt man für ξ_1 den Mittelwert zwischen Anfangs- und Endzustand, so wird der Fehler um so unbedeutender, je kleiner das Intervall $\vartheta - \vartheta_0$ ist.

Der Unterschied zwischen Adiabaten und Pseudoadiabaten ist von Neuhof genauer untersucht. Er findet, daß die Pseudoadiabaten immer einen höheren Druckwert zeigen, aber daß die Druckdifferenzen unbedeutend sind. Das isotherme Hagelstadium kommt bei pseudoadiabatischer Zustandsänderung ganz in Fortfall.

Der adiabatische und der pseudoadiabatistische Fall sind beide Grenzfälle, und die in der Natur wirklich vorkommenden liegen wohl gewöhnlich zwischen den beiden. Es dürfte darum ziemlich gleichgültig sein, ob man mit Adiabaten oder Pseudoadiabaten rechnet. Um dies zu zeigen werde ich ein Beispiel durchrechnen.

Als Beispiel wähle ich eins, das auch von Hertz und Neuhof angewandt ist, weil ich dadurch auch den Unterschied zwischen ihren Rechnungen und den meinen zeigen kann.

Wir wollen eine Luftmasse betrachten, für welche im Anfangszustande die Temperatur $t = 27^\circ \text{C}$ und der Druck $p = 750 \text{ mm}$ und die relative Feuchtigkeit $= 50\%$ ist. In Millibar umgerechnet gibt 750 mm ziemlich genau 1000 mb . Versetzt man nun diese Luftmasse in eine größere Höhenlage, so kann man zuerst nach der Sättigungstemperatur und dem entsprechenden Drucke fragen. Bei 27° ist der Sättigungsdruck des Wasserdampfes $35,34 \text{ mb}$ und die Sättigungsmenge $x_m = 22,8 \text{ g}$. Bei 50% relativer Feuchtigkeit ist demnach der Druck des Wasserdampfes $17,7 \text{ mb}$ und die Feuchtigkeitsmenge $x = 11,4 \text{ g}$. Wir haben darum im Trockenstadium $m_1 = 3,48$ und im Regenstadium $m_2 = 3,63$.

Die Sättigungstemperatur findet man aus der Gleichung

$$\log \frac{e}{e_0} = m_1 \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

Durch Probieren findet man $\vartheta = 286,1$ und $t = 13,1^\circ$.

Der Dunstdruck ist dann 15 mb . Den Druck findet man aus der Gleichung

$$\begin{array}{r} \log p - m_1 \log \vartheta = \log p_0 - m_1 \log \vartheta_0 \\ \vartheta_0 = 300 \quad m_1 \log \vartheta_0 = 8,62038 \\ \log p = 3,00000 \\ \hline m_1 \log \vartheta - \log p_0 = 5,62038 \\ \vartheta = 286,1 \quad m_1 \log \vartheta = 8,54869 \\ \quad \quad \quad - 5,62038 \\ \hline \log p = 2,92831 \\ p = 848 \text{ mb.} \\ \hline e = 15 \text{ mb.} \quad p' 833 \text{ mb} = 625 \text{ mm.} \end{array}$$

Neuhof findet als Sättigungstemperatur $13,2^\circ$ und $p' = 626,2 \text{ mm}$.

Aus der Tafel von Hertz ergibt sich als Sättigungstemperatur $13,3^\circ$ und $p' = 628,7$.

Regenstadium:

$$p_0' = 833 \text{ mb} = 625 \text{ mm.}$$

Den Enddruck bei 0° findet man aus der Gleichung

$$\log p' - \frac{a}{p_1} = m_2 \log \vartheta - S, \quad S = m_2 \log \vartheta_0 - \log p_0' + \frac{a_0}{p_0'}$$

$$m_2 = 3,63, \quad a_0 = 121,64.$$

$$m_2 \log \vartheta_0 = 8,91717$$

$$\frac{a_0}{p_0'} = 0,14603$$

$$9,06320$$

$$\log p_0' = 2,92065$$

$$S = 6,14255$$

$$m_2 \log \vartheta = 8,84326$$

$$S = 6,14255$$

$$\log p' - \frac{a}{p'} = 2,70071$$

Aus der Tabelle findet man für 0° $a = 52,51$ und durch Probieren

$$p' = 612 \text{ mb}$$

$$e = 6,1 \text{ »}$$

$$p = 618,1 \text{ mb} = 463,7 \text{ mm.}$$

Neuhof findet 464,2 mm. Herz findet 472 mm.

Die Differenz zwischen dem Wert von Neuhof und dem meinen ist also unbedeutend, sie würde aber ein wenig größer ausfallen, wenn Neuhof den Wert $m = 3,60$ angewandt hätte, den man in seiner Tabelle findet.

Für das Hagelstadium hat man:

$$\log p' - \frac{59,65}{p'} = \log p_0' - \frac{52,51}{p_0'} - 1,858 x.$$

$$x = 0,0114$$

$$\frac{52,51}{p_0'} = 0,08580$$

$$1,858 x = 0,02118$$

$$0,10698$$

$$\log p_0' = 2,78675$$

$$0,10698$$

$$\log p' - \frac{59,65}{p'} = 2,67977.$$

Durch Probieren findet man $p' = 601$, $p = 607,1 \text{ mb} = 455,4 \text{ mm.}$

Neuhof hat 456,5 mm und Hertz 463 mm.

Zuletzt berechnen wir den Enddruck bei -20° C. Die Gleichung ist

$$\log p' - \frac{a}{p'} = m_4 \log \vartheta - S.$$

$$S = m_4 \log \vartheta_0 - \log p_0' + \frac{a_0}{p_0'}$$

$$p_0' = 601 \text{ mb.} \quad a_0 = 59,65. \quad a_{-20} = 11,08. \quad m_4 = 3,54.$$

$$m_4 \log \vartheta_0 = 8,62401$$

$$\frac{a_0}{p_0'} = 0,09925$$

$$8,72326$$

$$\log p_0' = 2,77887$$

$$S = 5,94439$$

$$m_4 \log \vartheta = 8,50704$$

$$S = 5,94439$$

$$\log p' - \frac{a}{p'} = 2,56265$$

$$p' = 390 \text{ mb.} \quad p = 391 \text{ mb} = 293,3 \text{ mm.}$$

Neuhof findet 297,5 mm. Hertz findet 305 mm.

Die Differenz ist hier größer. Der Grund dafür ist wohl in der Verschiedenheit der Kondensationsfaktoren a , die von uns verwendet wurden, zu suchen.

Dasselbe Beispiel werde ich jetzt unter Annahme pseudoadiabatischer Zustandsänderung durchrechnen. Man muß dann stufenweise vorgehen. Die Rechnung geschieht am besten tabellarisch.

Pseudoadiabate.

t	x	m	$\log \vartheta$	$\log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}$	$m \log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}$	a	$\log \left(p' - \frac{a}{p'} \right)$	p'	e	p
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1000
13,1	11	3,63	2,45652	-	-	121,64	77462	833	15	848
12	10	3,61	2,45484	168	610	113,83	76852	811	14	825
10	9,3	3,60	2,45179	305	1101	100,68	75751	772,5	12	785
8	8,6	3,59	2,44871	308	1109	88,71	74642	736	11	747
6	7,9	3,58	2,44560	311	1116	78,15	73526	702	9	711
4	7,2	3,57	2,44248	312	1117	68,62	72409	670,5	8	679
2	6,4	3,56	2,43933	315	1125	60,14	71284	641	7	648
0	-	-	2,43616	317	1128	52,51	70156	613	6	619
- 0	-	-	2,43616	-	-	59,65	69015	613	6	619
- 2	5,8	3,51	2,43297	319	1120	51,04	67895	584	5	589
- 4	5,2	3,50	2,42975	322	1127	43,28	66768	556	5	561
- 6	4,7	3,50	2,42651	324	1134	37,20	65634	532	4	536
- 8	4,1	3,50	2,42325	326	1141	31,43	64493	509	3	512
- 10	3,6	3,49	2,41996	329	1148	26,70	63345	488	3	491
- 12	3,1	3,49	2,41664	332	1159	22,51	62186	468	2	470
- 14	2,5	-	2,41330	334	-	18,87	-	-	-	-
- 16	-	3,48	2,40993	337	2335	15,89	59851	432	1	433
- 18	1,9	-	2,40654	339	-	13,30	-	-	-	-
- 20	-	3,48	2,40312	342	2370	11,08	57481	400	1	401

Die Rechnung ist wohl ohne weiteres verständlich. Man findet x aus der Formel

$$x = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - e}.$$

Ein angenäherter Wert für p kann dabei ausreichen. Ist x bestimmt, findet man sogleich m aus der Tabelle. Es ist zwischen m_2 im Regenstadium und m_4 im Schnee-

stadium zu unterscheiden. Das Hagelstadium fällt bei pseudoadiabatischer Zustandsänderung fort. Der Enddruck im Regenstadium gilt als Anfangsdruck für das Schneestadium.

Aus der Gleichung $\log p' - \frac{a}{p} = N$ findet man durch Probieren p' .

Die Differenzen nehmen regelmäßig ab, und man kann dadurch den richtigen Wert beim ersten oder zweiten Versuch finden. Der wichtigste Unterschied ist der, daß jeder Zustand aus dem unmittelbar vorhergehenden berechnet werden muß, während bei adiabatischer Zustandsänderung jeder Zustand aus dem ursprünglichen berechnet werden kann.

Die Differenzen zwischen Adiabate und Pseudoadiabate sind, wie man sieht, äußerst gering, und es ist darum wohl berechtigt, wenn man mit Adiabaten anstatt Pseudoadiabaten rechnet. Hertz macht darauf aufmerksam, daß man in der Hilfstafel, falls eine Schätzung über den Bruchteil des ausgefallenen Wassers vorliegt, dies berücksichtigen kann, indem man nicht mit dem ursprünglichen Wert von x rechnet, sondern mit der Feuchtigkeitsmenge, die bei 0° gerade vorhanden ist.

Adiabatische Höhenformeln.

Die Zustandsänderungen in der Atmosphäre treten im allgemeinen ein, wenn die Luftmassen ihre Höhenlage ändern.

Fragt man nach der Höhe, in welcher ein bestimmter Druck herrscht, so hat man die Gleichung

$$g dh = -v dp \quad \text{zu integrieren.}$$

$\Phi = \int g dh$ ist das Potential der Schwere und ist von V. Bjerknes in dynamischen Metern gemessen.

Bezeichnet man die dynamische Höhe mit H , so hat man

$$dH = -v dp.$$

v ist mit p durch die Gleichung

$$pV = R \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right) \vartheta \quad \text{verbunden.} \quad v = \frac{V}{1+x}.$$

Eliminiert man v , erhält man

$$dH = -R \frac{1 + \frac{x}{\varepsilon}}{1+x} \vartheta \cdot \frac{dp}{p}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, muß man eine Beziehung zwischen p und ϑ haben. Wenn die Luft in adiabatischem Gleichgewicht ist, so ist die Beziehung im Trockenstadium

$$\frac{dp}{p} = m_1 \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Trägt man dies in die Differentialgleichung ein, so findet man

$$dH = -R \frac{1 + \frac{x}{\varepsilon}}{1+x} \cdot m_1 d\vartheta,$$

und da

$$m_1 = \frac{c_p}{RA} \cdot \frac{1 + \frac{c_p'}{c_p} x}{1 + \frac{x}{\varepsilon}} \quad \text{ist,}$$

schließlich:

$$H = J \frac{c_p + x c_p'}{1 + x} (\vartheta_0 - \vartheta_1). \quad (14)$$

Die Temperatur ändert sich also gleichmäßig mit der Höhe. Setzt man Zahlenwerte ein, so findet man

$$H = 99,4 \frac{1 + 1,94 x}{1 + x} (\vartheta_0 - \vartheta_1) \text{ dyn. Meter.} \quad (14')$$

Im Regenstadium gilt nun nicht die Beziehung

$$\frac{dp}{p} = m_1 \frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

sondern

$$\frac{dp'}{p'} = m_2 \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \frac{1}{AR} \cdot d\left(\frac{r\xi}{\vartheta}\right).$$

Man hat

$$\vartheta \cdot d\left(\frac{r\xi}{\vartheta}\right) = -\frac{r\xi}{\vartheta} \cdot d\vartheta + d(r\xi),$$

und bei Anwendung der Clapeyronschen Gleichung findet man

$$\frac{r\xi}{\vartheta} d\vartheta = A V de.$$

Da $dp_1 + de = dp$ ist, so wird die Adiabatengleichung:

$$(c_p + x c) d\vartheta + d(r\xi) - A V dp = 0. \quad (15)$$

Diese Gleichung in Verbindung mit

$$dH = -\frac{V}{1+x} dp$$

gibt

$$dH = -\frac{c_p + x c}{A(1+x)} d\vartheta - \frac{1}{A(1+x)} \cdot d(r\xi),$$

oder integriert

$$H_2 - H_1 = J \frac{c_p + x c}{1+x} (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{J}{1+x} (r_1 \xi_1 - r_2 \xi_2). \quad (16)$$

Die Menge des vorhandenen Wasserdampfes muß besonders ermittelt werden.

Die Formel kann auf folgende Weise vereinfacht werden:

Unter der Annahme, daß die Atmosphäre genau adiabatisch geschichtet sei, schließen wir eine derartige Luftmasse in eine Hülle ein, die für Wärme undurchdringlich ist, die jedoch dem Drucke nachgeben kann. Versetzt man diese Luftmasse in die Höhe, so wird sie in jeder Lage mit der umgebenden Luft im Gleichgewichte sein. Wir brauchen also keine Arbeit, um die Luftmasse in die Höhe zu bewegen.

Ist x die ursprüngliche Feuchtigkeitsmenge, und ist während des Aufstiegs Kondensation eingetreten, mag die Dampfmenge im Endzustand ξ sein. Die Menge des kondensierten Wassers ist $x - \xi$ kg. Entfernen wir dies und führen wir die Luftmasse wieder hinab, so wird die Luft wärmer als ihre Umgebung, und es muß eine gewisse Arbeit zugeführt werden, um die Luftmasse wieder zum Boden zu bringen. Die Kraft, die man zu überwinden hat, ist der Unterschied zwischen Auftrieb und Gewicht, und die Arbeit per $(1 + \xi)$ kg wird:

$$A = \int_0^H v \varrho dH - (1 + \xi) H, \quad \varrho \text{ ist die Dichte der umgebenden Luft.}$$

Es ist $\varrho dH = -dp$, und darum

$$A = \int_p^{p_0} v dp - (1 + \xi) H.$$

In der adiabatischen Hülle gilt die Gleichung

$$J(c_p + \xi c_p') d\vartheta = v dp.$$

Führt man dies in die Gleichung ein, so erhält man

$$A = J(c_p + \xi c_p') (\vartheta_3 - \vartheta_2) - (1 + \xi) H_2,$$

wenn ϑ_3 die Endtemperatur nach dem Absteigen sei.

Bringt man jetzt eine Wassermenge $x - \xi$ in die Hülle hinein, so wird sie verdunsten, und die Luftmasse hat ihre ursprüngliche Zusammensetzung erhalten. Was man wirklich erreicht hat, ist daß die Wassermenge $(x - \xi)$ bis zur Höhe H_2 gehoben worden ist.

Man hat darum angenähert:

$$J(c_p + \xi c_p') (\vartheta_3 - \vartheta_2) - (1 + \xi) H_2 = (x - \xi) H_2$$

oder

$$H_2 = \frac{J(c_p + \xi c_p')}{1 + x} (\vartheta_3 - \vartheta_2). \quad (17)$$

Es zeigt sich jedoch, daß die Erwärmung mehr als ausreicht, um die Wassermenge $(x - \xi)$ zu verdunsten. Die genaue Gleichung muß darum

$$H_2 = \frac{J(c_p + \xi c_p')}{1 + x} (\vartheta_3 - \vartheta_2) - \frac{J Q'}{1 + x}$$

geschrieben werden.

Das Korrektionsglied beträgt jedoch nicht mehr als ca. 1% von der Gesamthöhe. Durch Vergleichung mit der früher abgeleiteten Formel kann man es bestimmen, und findet dann:

$$Q' = (c_p + \xi c_p') (\vartheta_3 - \vartheta_0) - (r_1 x - r_2 \xi) - x(c - c_p) (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (x - \xi) c_p' (\vartheta_0 - \vartheta_2).$$

In einer früheren Arbeit¹ habe ich die folgende Gleichung aufgestellt:

$$r = \text{konst.} - (c - c_v) t + A p (v_1 - v_2).$$

Angenähert hat man

$$p (v_1 - v_2) = R \vartheta,$$

und darum

$$r - r_0 + (c - c_p) (\vartheta - \vartheta_0) = 0.$$

Die Gleichung für Q' reduziert sich darum auf:

$$Q' = (c_p + \xi c_p') (\vartheta_3 - \vartheta_0) - r_2 (x - \xi) - (x - \xi) c_p' (\vartheta_0 - \vartheta_2).$$

Man wünscht z. B. die Höhe zu finden, in welcher die Temperatur 0° herrscht. Man geht dann in der Tafel längs der Trockenadiabate, die durch den Punkt (t_0, p_0) geht bis man den Sättigungspunkt erreicht; dann folgt man der Kondensationsadiabate bis zur Temperatur ϑ_2 (in diesem Falle 0°). Von diesem Punkte folgt man der Trockenadiabate bis zum ursprünglichen Drucke p_0 , und findet die Temperatur ϑ_3 .

¹ L. c.

Es ist dann

$$H = 99,5 \cdot \frac{1 + 1,94 \cdot \xi}{1 + x} (t_3 - t_2).$$

Die gefundene Höhe kann mit 1 0/0 reduziert werden. Setzt man

$$h = 100 (t_3 - t_2),$$

so gibt diese Formel angenähert die geometrische Höhe.

Addiert man die Gleichungen

$$A (1 + x) H_1 = (c_p + x c_p') (\vartheta_0 - \vartheta_1) \quad \text{und}$$

$$A (1 + x) (H_2 - H_1) = (c_p + x c) (\vartheta_1 - \vartheta_2) + (r_1 x - r_2 \xi),$$

und erinnert man sich, daß $r_1 - r_2 = (c - c_p) (\vartheta_2 - \vartheta_1)$ ist, so erhält man

$$A (1 + x) H_2 = (c_p + x c_p') (\vartheta_0 - \vartheta_2) + r_2 (x - \xi). \quad (18)$$

Führt man jetzt Zahlenwerte ein, so findet man angenähert

$$H_2 = 100 (t_0 - t_2) + 250 (x - \xi) - \frac{1}{4} (x - \xi) t_2. \quad (19)$$

($x - \xi$) ist dabei in Gramm ausgedrückt.

Diese Formel ist sehr bequem und genau.

Es sollen jetzt diese Formeln in einem Beispiele verwendet werden. Ich werde die Höhen berechnen, die den verschiedenen Zuständen in dem früheren Beispiele entsprechen.

Es waren

$$\begin{aligned} t_0 &= 27^\circ & p_0 &= 1000 \text{ mb.} \\ t_1 &= 13,1 & p_1 &= 848 \text{ »} \\ t_2 &= 0 & p_2 &= 618 \text{ »} \\ x &= 11,4 \text{ g.} & \xi &= 6,2 \text{ g.} \end{aligned}$$

Wir finden

$$H_1 = 99,5 \frac{1 + 1,94 \cdot 0,0114}{1 + 0,0114} \cdot (27 - 13,1) = 100,55 \cdot 13,9 = 1398 \text{ dyn. m.}$$

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= 99,5 \frac{1 + 4,21 \cdot 0,0114}{1 + 0,0114} \cdot (13,1 - 0) + \\ &+ \frac{418,9}{1,0114} [588,86 \cdot 0,0114 - 596,73 \cdot 0,0062] \text{ dyn. m.} \end{aligned}$$

$$H_2 - H_1 = 103,6 \cdot 13,1 + 414,18 \cdot 3,013 = 1357 + 1258 = 2605 \text{ dyn. m.}$$

Rechnet man nach der Formel

$$H_2 = 99,5 \cdot \frac{1 + 1,94 \cdot 0,0062}{1 + 0,0114} (t_3 - t_2),$$

so findet man in der Tafel $t_3 = 40,6$ und $H_2 = 99,55 \cdot 40,6 = 4042 \text{ dyn. m.}$ Reduziert man diese Höhe mit 1 0/0, so erhält man 4002 dyn. m.

Die dritte Formel gibt

$$H_2 = 100 \cdot 27 + 250 (11,4 - 6,2) = 2700 + 1300 = 4000 \text{ dyn. m.}$$

Die Übereinstimmung ist recht befriedigend. Für Orientierungszwecke genügt es wohl, in der zweiten Formel 100 zu setzen und nachher die Höhe mit 1 0/0 zu reduzieren.

Die Temperatur hält sich im Hagelstadium konstant, und man findet dann:

$$H - H_0 = \frac{R \vartheta}{M} \log \frac{p_0 - e}{p_1 - e}.$$

Setzt man Zahlenwerte ein, so findet man

$$H - H_0 = 18047 \cdot \log \frac{p_0 - e}{p_1 - e}. \quad (20)$$

Die Adiabatangleichung im Hagelstadium war

$$\frac{A R \vartheta}{M} \log \frac{p - e}{p_0 - e} = r(\xi - \xi_0) - 1(\eta - \eta_0).$$

Trägt man dies in die Höhenformel ein, so findet man

$$H - H_0 = J r(\xi - \xi_0) - J l(\eta - \eta_0).$$

Es war aber $\eta_0 = 0$ und $\eta = x - \xi$, die Formel wird demnach:

$$H - H_0 = J l(x - \xi) - J r(\xi - \xi_0). \quad (21)$$

Drückt man x und ξ in Gramm aus, so wird die Formel:

$$H - H_0 = 33,5(x - \xi) - 250(\xi - \xi_0). \quad (22)$$

Dabei ist x die ursprüngliche Feuchtigkeitsmenge, ξ_0 die Dampfmenge im Anfang und ξ die Dampfmenge beim Ende des Hagelstadiums.

Neuhof hat die empirische Formel

$$h = 27(x - \xi) \text{ aufgestellt.} \quad (23)$$

Nach meinen Zahlen wäre eher

$$h = 28(x - \xi) \text{ zu setzen.} \quad (24)$$

Um die Anwendung der Formeln zu zeigen, werde ich die Höhe des Hagelstadiums im vorangehenden Beispiel berechnen.

$$\begin{aligned} \text{Es war } x &= 11,4 \\ p_0 &= 612 \text{ mb} \\ p_1 &= 601 \text{ »} \\ \xi_0 &= 6,2 \text{ g.} \\ \xi &= 6,32 \text{ »} \end{aligned}$$

Demnach finden wir:

$$H - H_0 = 18047 \cdot (\log 612 - \log 601) = 142 \text{ dyn. m.}$$

Nach der zweiten Formel finden wir:

$$H - H_0 = 33,4(11,4 - 6,2) - 250(6,32 - 6,2) = 173,7 - 30 = 143,7 \text{ dyn. m.}$$

Die Höhenformel im Schneestadium wird der Formel im Regenstadium ganz analog. Es ist nur r durch L , die Sublimationswärme des Eises, zu ersetzen. Wir finden demnach:

$$H - H_0 = \frac{J(c_p + x c_1)}{1 + x} (t_0 - t) + \frac{J L}{1 + x} (x - \xi). \quad (25)$$

Setzt man Zahlenwerte ein, erhält man angenähert:

$$H - H_0 = 100(t_0 - t_1) + 282(x - \xi), \quad (26)$$

wenn wieder $x - \xi$ in Gramm gemessen wird.

Beispiel: In dem früher berechneten Falle hatten wir am Ende des Hagelstadiums

$$p = 601 \text{ mb. } \xi = 6,32 \text{ g,}$$

und bei -20° fanden wir den Druck

$$p_1 = 390 \text{ mb und } \xi_1 = 1,67 \text{ g.}$$

Die Höhe wird:

$$H - H_0 = 100 \cdot 20 + 282 (6,32 - 1,67) = 2000 + 1311 = 3311 \text{ dyn.m.}$$

Die Gesamthöhe wird demnach $4003 + 142 + 3311 = 7456$ dyn.m. oder 7617 m. Neuhof findet 7441 m und Hertz 7200 m.

Die Adiabatentafel.

Für die Berechnung von adiabatischen Zustandsänderungen haben wir nun die Gleichungen gefunden:

Im Trockenstadium

$$\log p - m \log \vartheta = \text{konst.}, \quad m = 3,467 \frac{1 + 1,96 x}{1 + 1,608 x}.$$

Im Regenstadium und im Schneestadium

$$\log (p - e) - \frac{a}{p - e} - m \log \vartheta = \text{konst.}$$

Dabei ist im Regenstadium $m = 3,467 (1 + 4,21 x)$ und

$$a = 3,94 \frac{r e}{\vartheta},$$

und im Schneestadium

$$m = 3,467 (1 + 1,94 x), \quad a = 2670 \cdot \frac{e}{\vartheta}.$$

Die Gleichungen enthalten somit drei Variable, p , ϑ und x . x kommt jedoch nur im Exponenten m vor und man sieht, daß m nur wenig mit x variiert. Man kann darum mit hinreichender Genauigkeit für x einen mittleren konstanten Wert nehmen. Wie große Fehler man dabei begeht, kann man leicht durch ein Paar Beispiele sehen.¹

Es sei eine Luftmasse gegeben, die den Anfangsdruck 1000 mb und die Anfangstemperatur 20° hat. Man wünscht den Druck zu finden, wenn die Luft adiabatisch expandiert bis die Temperatur auf 0° gesunken ist.

Zuerst sei $m = 3,47$ gesetzt. Man berechnet dann den Enddruck $p = 782,4$ mb. Setzt man nun $m = 3,51$, so findet man den Druck $p = 780$ mb. Der Fehler ist somit etwa 1,2 0/0.

Als Beispiel für das Regenstadium nehme ich eine Luftmasse, die bei $t = 25^\circ$ und $p = 900$ mb gesättigt ist, und suche den Enddruck, wenn die Luftmasse expandiert, bis die Temperatur auf 0° gesunken ist.

Der Sättigungsdruck bei 25° ist 31,4 mb und x somit 22,49 g. Der Exponent wird dann 3,80. Man findet bei 0° den Druck 435,1 mb. Rechnet man mit $m = 3,61$, so findet man 440,8 mb. Die Differenz ist 5,7 mb und beträgt somit etwa 1,3 0/0 von der Druckerniedrigung.

Die Genauigkeit ist eine hinreichende, und ich habe darum im Trockenstadium und im Regenstadium $x = 10$ g gesetzt und somit $m_1 = 3,48$ und $m_2 = 3,61$.

¹ Bei der Berechnung der Beispiele ist eine andere Dampfspannungstabelle benutzt als die, welche in Tabelle 2 abgedruckt worden ist.

Im Schneestadium sind meistens nur kleine Dampfmengen vorhanden, und man kann im Exponenten beinahe davon absehen, ich habe darum $m_1 = 3,47$ gesetzt.

Die Gleichungen, die der graphischen Darstellung zugrunde gelegt wurden, sind darum:
Im Trockenstadium:

$$\log p - m \log \vartheta = \text{konst.} \quad m = 3,48.$$

Im Regenstadium:

$$\log(p - e) - \frac{a}{p - e} - m \log \vartheta = \text{konst.} \quad m = 3,61,$$

und im Schneestadium:

$$\log(p - e) - \frac{a}{p - e} - m \log \vartheta = \text{konst.} \quad m = 3,47.$$

Die Adiabaten des Trockenstadiums sind punktiert, und zwar so, daß der Abstand zwischen zwei Punkten einer Druckdifferenz von 1 mb entspricht. Die Adiabaten des Regenstadiums sind ausgezogen. Die Adiabaten des Schneestadiums sind ebenfalls ausgezogen und bilden die Verlängerungen der Regenadiabaten. Sie sind bis -40° berechnet. Bei niedrigeren Temperaturen ist der Dampfgehalt so klein, daß er bei der Berechnung von Adiabaten nicht in Betracht kommt.

Aus der Formel

$$x = 622 \frac{e}{p - e}$$

sind die Kurven $x = \text{konst.}$ für $x = 1/2, 1, 2$, usw. berechnet. Sie sind in der Tafel gestrichelt gezeichnet und mit den entsprechenden Grammmzahlen versehen.

Um auch das Hagelstadium berücksichtigen zu können, ist eine Hilfstafel konstruiert, die die Kurven

$$\log(p - e) - \frac{59,65}{p - e} + 1,859 x = \log(p_0 - e) - \frac{52,51}{p_0 - e}$$

enthält. Die Anfangspunkte der Kurven liegen auf der Kurve

$$x = 622 \frac{6,105}{p - 6,105},$$

die den Dampfgehalt bei 0° angibt. Diese Kurve ist gestrichelt gezeichnet.

Die Anwendung der Tafel wird wohl am besten durch ein Beispiel erläutert.

Es sei eine Luftmasse mit der Temperatur 22° , dem Drucke 1020 mb und der relativen Feuchtigkeit 70% gegeben. Zuerst sei gefragt: Bei welcher Temperatur und bei welchem Drucke wird, bei Hebung einer derart zusammengesetzten Luftmasse, die Luft gerade gesättigt sein?

Der Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei 22° ist 26,20 mb und bei 70% r. F. wird somit der Druck 18,34 mb. Man findet das Mischungsverhältnis $x = 11,39$.

Jetzt kann man in die Tafel bei $p = 1020$, $t = 22^\circ$ eingehen und einer Trockenadiabate folgen, bis man den Schnittpunkt mit der Grammlinie $x = 11,39$ trifft. (Beide Kurven müssen natürlich interpoliert werden). Man findet somit die Sättigungstemperatur $t_1 = 14,8^\circ$ und den entsprechenden Druck $p_1 = 936$ mb. Die Höhe ist hinreichend genau

$$H_1 = 100(22 - 14,8) = 720 \text{ dyn.m.}$$

Weiter kann man jetzt fragen: Bei welchem Drucke und in welcher Höhe wird die Luftmasse den Gefrierpunkt erreichen? Man geht dann von dem gefundenen Sättigungspunkte längs einer Regenadiabate bis 0° und findet dann den Druck $p_2 = 660$ mb. Geht

man von diesem Punkte längs einer Trockenadiabate bis man den ursprünglichen Druck erreicht, so findet man die Temperatur $t_3 = 36,5^\circ$. Die ganze Höhe wird somit

$$3650 - 37 = 3613 \text{ dyn.m.}$$

Die Wassermenge, die sich bei 0° noch in Dampfform vorfindet, kann man leicht aus der Hilfstafel finden. Die gestrichelte Kurve gibt ja genau die Dampfmenge an, die bei 0° vorhanden ist. Man findet bei 660 mb $\xi = 5,80$.

Die Menge des kondensierten Wassers ist $x - \xi = 5,59$ g. Mit Hilfe dieser Zahl kann man auch durch die Formel (19) die Höhe ermitteln. Man findet

$$H_2 = 2200 + 250 (11,39 - 5,80) = 3598 \text{ dyn.m.}$$

was mit dem obigen Resultat in guter Übereinstimmung ist. Will man jetzt das Hagelstadium berücksichtigen, so hat man die Hilfstafel anzuwenden. Man geht bei $p = 660$ mb ein und folgt einer Kurve bis $x = 11,39$. Der entsprechende Druck ist dann 647 mb und $\xi = 5,92$. Die Menge des gefrorenen Wassers ist somit $11,39 - 5,92 = 5,47$ g.

Die Höhe des Hagelstadiums findet man durch die Formel (22):

$$\begin{aligned} H_3 - H_2 &= 33,5 (x - \xi) - 250 (\xi - \xi_0) \\ &= 33,5 \cdot 5,47 - 250 \cdot 0,12 = 153 \text{ dyn.m.} \end{aligned}$$

Zuletzt sei gefragt, bei welchem Drucke und in welcher Höhe die Luftmasse die Temperatur -30° hat.

Man geht dann längs einer Schneeadiabate von 0° und 647 mb bis -30° und findet dann den Druck 260 mb. Die Dampfmenge ist dann nur noch $\xi = 0,65$ g. Die Höhe erhält man durch die Formel (26):

$$\begin{aligned} H_4 - H_3 &= 100 \cdot (0 - (-30)) + 282 (5,92 - 0,65) = \\ &= 3000 + 1486 = 4486 \text{ dyn.m.} \end{aligned}$$

und die Gesamthöhe wird somit $3600 + 150 + 4486 = 8236$ dyn.m.

Umgekehrt kann man fragen: Wenn eine gegebene Luftmasse in die Höhe versetzt wird, welcher Temperatur und welcher Druck entspricht dann einer gegebenen Höhe?

Beispiel: Eine Luftmasse hat die Temperatur 20° , den Druck 1000 mb und die relative Feuchtigkeit 90%. Wenn nun diese Luftmasse bis zur Höhe von 3000 m gehoben wird, welche Temperatur und welchen Druck hat sie dann?

Wenn keine Kondensation stattfände, würde die Temperatur etwa 30° sinken und die Endtemperatur -10° sein. Man reduziert das Temperaturintervall mit 1% und geht längs einer Trockendiabate bis man nach $-9,7^\circ$ kommt. Man findet dann den Enddruck 699 mb. Dies ist der gesuchte Enddruck. Jetzt kann man wie früher vorgehen. Es ist bei 20° der Sättigungsdruck 23,2 mb und bei 90% r. F. der Dampfdruck 21,51 mb. Man findet dann $x = 13,67$. Die Sättigungstemperatur wird $18,5^\circ$ und der entsprechende Druck 981 mb. Von diesem Punkte folgt man der Regenadiabate bis $p = 699$ mb und findet die Temperatur 5° . Die Dampfmenge ξ ist dann 7,84 g.

Wenn man jetzt die Höhe nachrechnet, findet man:

$$H = 100 (20 - 5) + 250 (13,67 + 7,84) = 2984 \text{ dyn.m.}$$

Die Differenz ist somit unbedeutend. Man kann auch zur Kontrolle von dem gefundenen Punkte 5° , 699 mb der Trockenadiabate entlang gehen bis man zum ursprünglichen Drucke 1000 mb kommt. Man findet dann $t = 35,4^\circ$ und demnach die Höhe $100 (35,4 - 5) = 3040$ dyn.m., was nach Reduktion mit 1% 3010 dyn.m. ergibt.

Die Resultate, die man durch Anwendung der Tafel erhält, dürften auf 2% genau sein.

Wünscht man die Aufgabe rechnerisch zu lösen, kann man die beigegebenen Tabellen zur Erleichterung der Aufgabe anwenden. Die Tabellen geben die Lösungen der Gleichungen:

$$\log(p - e) - \frac{a}{p - e} = P.$$

$$P = m \log \vartheta - \left(m \log \vartheta_0 + \frac{a_0}{p - e} - \log(p - e) \right)$$

für verschiedene Werte von P und ϑ .

Ein Beispiel wird die Anwendung der Tabelle zeigen. Eine Luftmasse ist bei 16° und 930 mb gesättigt. Man wüschte den Druck zu finden, wenn die Temperatur durch Expansion auf 0° gesunken ist.

Aus der Tabelle findet man

$$a_{16} = 145,51, \quad e_{16} = 18,18 \text{ mb.}$$

und somit $p - e = 911,91$ mb.

$$\text{weiter } m \log 289 = 8,88383$$

$$\frac{a}{p - e} = 0,15959$$

$$\hline = 9,04342$$

$$\log p - e = 2,95990$$

$$\hline S = 6,08352$$

$$m \log 273 = 8,79454$$

$$S = 6,08352$$

$$\hline P = 2,71102.$$

In der Tabelle findet man für 0°

$$P = 68400, \quad p = 598$$

$$P = 71926, \quad p = 640.$$

Durch gewöhnliche Interpolation findet man, daß für $P = 71102$, $p = 630,2$ ist. Durch Probieren findet man $p = 630,1$. Man sieht also, daß die Interpolation gute Resultate gibt.

Zuletzt sei nur bemerkt, daß die Tafel, um die Reproduktion zu erleichtern, in mehreren Teilen gedruckt ist. Es empfiehlt sich wohl, die verschiedenen Teile durch Aufkleben zu einer Tafel zu vereinigen, ehe man sie in Gebrauch nimmt.

Tabelle 1.

$$m_1 = 3,467 \frac{1 + 1,96 x}{1 + 1,608 x}, m_2 = 3,467 (1 + 4,21 x), m_4 = 3,467 (1 + 1,95 x).$$

x	m ₁	m ₂	m ₄	x	m ₁	m ₂	m ₄	x	m ₁	m ₂	m ₄
1	3,47	3,48	3,47	15	3,48	3,69	3,57	28	3,50	3,88	3,66
2	3,47	3,50	3,48	16	3,49	3,70	3,58	29	3,50	3,89	3,66
3	3,47	3,51	3,49	17	3,49	3,72	3,58	30	3,50	3,90	3,67
4	3,47	3,53	3,49	18	3,49	3,73	3,59	31	3,50	3,92	3,68
5	3,47	3,54	3,50	19	3,49	3,74	3,60	32	3,51	3,93	3,68
6	3,47	3,55	3,51	20	3,49	3,76	3,60	33	3,51	3,95	3,69
7	3,47	3,57	3,51	21	3,49	3,77	3,61	34	3,51	3,96	3,70
8	3,48	3,58	3,52	22	3,49	3,79	3,62	35	3,51	3,98	3,70
9	3,48	3,60	3,53	23	3,49	3,80	3,62	36	3,51	3,99	3,71
10	3,48	3,61	3,53	24	3,50	3,82	3,63	37	3,51	4,01	3,72
11	3,48	3,63	3,54	25	3,50	3,83	3,64	38	3,51	4,02	3,72
12	3,48	3,64	3,55	26	3,50	3,85	3,64	39	3,51	4,04	3,73
13	3,48	3,66	3,55	27	3,50	3,86	3,65	40	3,51	4,05	3,74
14	3,48	3,67	3,56								

Tabelle 2.

Dampfspannungen und Kondensationsfaktor im Regenstadium.

t	e	a ₂	t	e	a ₂	t	e	a ₂
0	6,10	52,53	14	15,99	129,14	28	37,81	286,98
1	6,57	56,32	15	17,05	137,08	29	40,06	302,77
2	7,05	60,15	16	18,18	145,51	30	42,44	319,36
3	7,57	64,29	17	19,37	154,34	31	44,94	336,69
4	8,13	68,73	18	20,64	163,74	32	47,56	354,80
5	8,72	73,38	19	21,97	173,52	33	50,31	373,70
6	9,35	78,32	20	23,38	183,84	34	53,21	393,54
7	10,01	83,45	21	24,88	194,76	35	56,25	414,23
8	10,72	89,05	22	26,44	206,05	36	59,43	435,80
9	11,48	94,85	23	28,09	217,95	37	62,77	458,28
10	12,28	100,99	24	29,84	230,51	38	66,27	481,78
11	13,13	107,49	25	31,68	243,65	39	69,94	506,30
12	14,03	114,34	26	33,62	257,43	40	73,78	531,80
13	14,97	121,45	27	35,66	271,87			

Tabelle 3.

Dampfspannung und Kondensationsfaktor im Schneestadium.

t	e	a ₄	t	e	a ₄	t	e	a ₄
0	6,104	59,70	— 14	1,808	18,64	— 28	0,460	5,01
— 1	5,620	55,17	— 15	1,648	17,05	— 29	0,415	4,54
— 2	5,173	50,97	— 16	1,502	15,60	— 30	0,373	4,09
— 3	4,785	47,05	— 17	1,367	14,26	— 31	0,336	3,71
— 4	4,372	43,23	— 18	1,243	13,01	— 32	0,302	3,34
— 5	4,016	40,01	— 19	1,130	11,88	— 33	0,271	3,01
— 6	3,685	36,85	— 20	1,026	10,83	— 34	0,243	2,71
— 7	3,380	33,93	— 21	0,931	9,86	— 35	0,218	2,45
— 8	3,098	31,21	— 22	0,844	8,98	— 36	0,195	2,19
— 9	2,837	28,69	— 23	0,765	8,17	— 37	0,174	1,97
— 10	2,596	26,35	— 24	0,692	7,42	— 38	0,155	1,76
— 11	2,374	24,19	— 25	0,626	6,74	— 39	0,139	1,59
— 12	2,170	22,19	— 26	0,566	6,12	— 40	0,124	1,42
— 13	1,981	20,34	— 27	0,510	5,54			

Tabelle 4.
Kondensationsadiabaten. Regenstadium.

$$p = \log(p - e) - \frac{a}{p - e} = m \log \vartheta - S. \quad S = m \log \vartheta_0 + \frac{a_0}{p_0 - e_0} - \log(p_0 - e_0).$$

$$m = 3,61.$$

t	$\log \vartheta$	$m \log \vartheta$	42) P	p	40) P	p	38) P	p	36) P	p		
40		00889	42612	1028		1100						
38		99886	41609	960	48708	1029	55202	1100				
36	48996	98876	40599	896	47698	962	54192	1030	60219	1100		
34	48714	97858	39581	836	46680	900	53174	965	59201	1032		
32	48430	96832	38555	780	45654	841	52148	903	58175	967		
30	48144	95800	37523	728	44622	786	51116	846	57143	908		
28	47857	94764	36487	679	43586	734	50080	791	56107	851		
26	47567	93717	35440	634	42539	686	49033	741	55060	798		
24	47276	92666	34389	592	41488	643	47982	695	54009	750		
22	46982	91605	33328	552	40427	601	46921	651	52948	704		
20	46687	90540	32263	516	39362	562	45856	610	51883	661		
18	46389	89464	31187	482	38286	526	44780	573	50807	621		
16	46090	88383	30106	450	37207	493	43701	538	49726	584		
14	45788	87295	29018	421	36117	462	42611	505	48638	550		
12	45484	86197	27920	393	35019	433	41513	474	47540	517		
10	45179	85096	26819	368	33918	406	40412	445	46439	487		
8	44871	83984	25707	344	32806	381	39300	419	45327	459		
6	44560	82862	24585	322	31684	357	38178	394	44205	432		
4	44248	81735	23458	302	30557	335	37051	371	43078	408		
2	43933	80598	22321	283	29420	315	35914	350	41941	386		
0	43616	79454	21177	265	28276	297	34770	330	40797	365		

t	34) P	p	32) P	p	30) P	p	28) P	p	26) P	p	24) P	p
34	64724	1100										
32	63698	1033	68839	1100								
30	62666	970	67807	1035		1100						
28	61630	911	66771	974	71489	1036	75879	1100				
26	60583	856	65724	916	70442	976	74832	1037	78931	1100		
24	59532	805	64673	863	69391	922	73781	981	77880	1041	81612	1100
22	58471	757	63612	813	68330	869	72720	926	76819	983	80550	1042
20	57406	712	62547	766	67265	820	71655	875	75754	931	79485	987
18	56330	671	61471	723	66189	774	70579	827	74678	882	78409	935
16	55251	632	60392	682	65110	732	69500	784	73599	836	77331	888
14	54161	596	59302	644	64020	693	68410	742	72509	793	76241	844
12	53063	562	58204	608	62922	655	67312	703	71411	752	75143	801
10	51962	530	57103	574	61821	620	66211	667	70310	714	74042	761
8	50850	500	55991	543	60709	587	65099	632	69198	679	72930	725
6	49728	473	54869	514	59587	557	63977	600	68076	645	71808	690
4	48601	447	53742	487	58460	529	62850	571	66949	614	70681	657
2	47464	423	52605	462	57323	503	61713	543	65812	585	69544	627
0	46320	401	51461	439	56179	477	60569	517	64668	558	68400	598

t	22) P	p	20) P	p	18) P	p	16) P	p	14) P	p	p	p
22	84077	1100										
20	83012	1043	86295	1100								
18	81936	991	85219	1046	88260	1100						
16	80857	941	84140	994	87181	1047	90039	1100				
14	79767	895	83050	946	86091	998	88949	1049	91640	1100		
12	78669	851	81952	901	84993	950	87851	1000	90542	1050		
10	77568	810	80851	858	83892	906	86750	954	89441	1003		
8	76456	771	79739	818	82780	865	85638	912	88329	959		
6	75334	735	78617	781	81658	826	84526	872	87207	918		
4	74207	701	77590	747	80531	790	83389	834	86080	878		
2	73070	670	76353	713	79394	756	82252	799	84933	842		
0	71926	640	75109	681	78250	723	81108	765	83799	809		

(Tab. 4.)

<i>t</i>	12) <i>P</i>	<i>p</i>	10) <i>P</i>	<i>p</i>	8) <i>P</i>	<i>p</i>	6) <i>P</i>	<i>p</i>	4) <i>P</i>	<i>p</i>	2) <i>P</i>	<i>p</i>
12	93101	1100										
10	92000	1053	94394	1100								
8	90888	1006	93282	1053	95571	1100						
6	89766	963	92160	1009	94449	1054	96619	1100				
4	88639	923	91033	967	93322	1012	95492	1056	97538	1100		
2	87502	885	89896	928	92185	971	94355	1014	96401	1057		1100
0	86359	849	88752	891	91041	933	93211	975	95257	1016		1058

Tabelle 5.

Kondensationsadiabaten. Schneestadium.

$$P = m \log \vartheta - S = \log (p - e) - \frac{a}{p - e} \quad S = m \log \vartheta_0 + \frac{a_0}{p_0 - e_0} - \log (p_0 - e_0).$$

<i>t</i>	log ϑ	<i>m</i> log ϑ	42) <i>P</i>	<i>p</i>	40) <i>P</i>	<i>p</i>	38) <i>P</i>	<i>p</i>	36) <i>P</i>	<i>p</i>	34) <i>P</i>	<i>p</i>
0	43616	45348	18299	265	25891	297	32645	330	38893	365	44559	401
2	43297	44224	17175	246	24767	277	31521	309	37769	343	43435	378
4	42975	43123	16074	229	23666	259	30420	290	36668	322	42334	356
6	42651	41999	14950	215	22542	244	29296	273	35544	305	41210	338
8	42325	40868	13819	201	21411	229	28165	257	34413	288	40079	320
10	41996	39726	-	-	20269	216	27023	243	33271	273	38937	304
12	41664	38574	-	-	19117	203	25871	230	32119	259	37785	288
14	41330	37415	-	-	-	-	24712	218	30960	243	36626	274
16	40993	36246	-	-	-	-	23543	207	29791	234	35457	262
18	40654	35069	-	-	-	-	-	-	28614	223	34280	250
20	40312	33883	-	-	-	-	-	-	27428	213	33094	239
22	39967	32685	-	-	-	-	-	-	26230	204	31896	229
24	39620	31481	-	-	-	-	-	-	-	-	30692	221
26	39270	30266	-	-	-	-	-	-	-	-	29477	212
28	38917	29042	-	-	-	-	-	-	-	-	28253	204
30	38561	27807	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	38202	26561	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	37840	25305	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
36	37475	24038	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	37107	22761	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	36736	21474	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

<i>t</i>	32) <i>P</i>	<i>p</i>	30) <i>P</i>	<i>p</i>	28) <i>P</i>	<i>p</i>	26) <i>P</i>	<i>p</i>	24) <i>P</i>	<i>p</i>	22) <i>P</i>	<i>p</i>
0	49740	438	54637	477	59169	517	63388	558	67156	598	70800	640
2	48616	414	53513	451	58045	490	62264	530	66032	568	69676	609
4	47515	391	52412	427	56944	465	61163	504	64931	541	68575	580
6	46391	371	51288	406	55820	443	60039	481	63807	517	67451	556
8	45250	352	50157	386	54689	422	58908	458	62676	495	66320	531
10	44118	335	49015	369	53547	403	57766	438	61535	473	65178	509
12	42966	319	47863	351	52395	385	56614	419	60382	453	64026	488
14	41807	304	46704	336	51236	368	55455	402	59223	434	62867	469
16	40638	291	45535	322	50067	353	54286	386	58054	417	61698	451
18	39461	278	44358	308	48890	339	53109	369	56877	401	60521	434
20	38275	267	43172	295	47704	325	51923	356	55691	386	59335	418
22	37077	256	41974	284	46506	313	50725	343	54493	372	58142	403
24	35873	246	40770	274	45302	302	49521	331	53289	359	56933	389
26	34658	237	39555	263	44087	291	48306	319	52074	347	55718	375
28	33434	228	38331	254	42863	280	47082	308	50850	335	54494	363
30	32199	220	37096	245	41628	271	45847	297	49615	324	53259	351
32	30953	212	35850	237	40382	262	44601	288	48369	313	52013	340
34	29697	205	34594	229	39126	253	43345	278	47113	303	50757	329
36	28430	198	33327	221	37859	245	42078	269	45846	293	49490	318
38	-	-	32050	214	36582	237	40801	260	44569	284	48213	308
40	-	-	30763	207	35295	229	39514	252	43282	275	46926	298

(Tab. 5.)

<i>t</i>	20) <i>P</i>	<i>p</i>	18) <i>P</i>	<i>p</i>	16) <i>P</i>	<i>p</i>	14) <i>P</i>	<i>p</i>	12) <i>P</i>	<i>p</i>	10) <i>P</i>	<i>p</i>
0	74093	681	77233	723	80165	765	83044	809	85507	849	87954	891
— 2	72969	649	76109	690	79041	731	81920	773	84383	812	86830	853
— 4	71868	619	75008	659	77940	699	80819	741	83282	778	85729	818
— 6	70744	592	73884	632	76816	671	79695	711	82158	747	84605	786
— 8	69613	568	72753	605	75685	643	78564	682	81027	718	83474	755
— 10	68471	545	71611	581	74543	618	77422	656	79885	691	82332	728
— 12	67319	523	70459	558	73391	594	76270	631	78733	665	81180	700
— 14	66160	502	69300	537	72232	571	75111	607	77574	641	80021	675
— 16	64991	483	68131	518	71063	551	73942	586	76405	618	78852	652
— 18	63814	465	66954	498	69886	531	72765	565	75228	596	77675	629
— 20	62628	449	65768	481	68700	512	71579	546	74042	576	76489	608
— 22	61430	433	64575	464	67507	495	70381	527	72844	557	75291	588
— 24	60226	418	63366	448	66298	478	69177	510	71640	539	74087	569
— 26	59011	404	62151	433	65083	462	67962	493	70425	521	72872	550
— 28	57787	391	60927	419	63859	447	66738	477	69201	504	71648	533
— 30	56552	378	59692	405	62624	433	65503	462	67966	488	70413	516
— 32	55306	366	58446	392	61378	419	64257	448	66720	473	69167	500
— 34	54050	354	57190	380	60122	406	63001	435	65464	458	67911	485
— 36	52783	343	55923	368	58855	396	61734	420	64197	444	66644	470
— 38	51506	332	54646	356	57578	389	60457	407	62920	430	65367	455
— 40	50219	322	53359	345	56291	381	59170	394	61633	417	64080	441

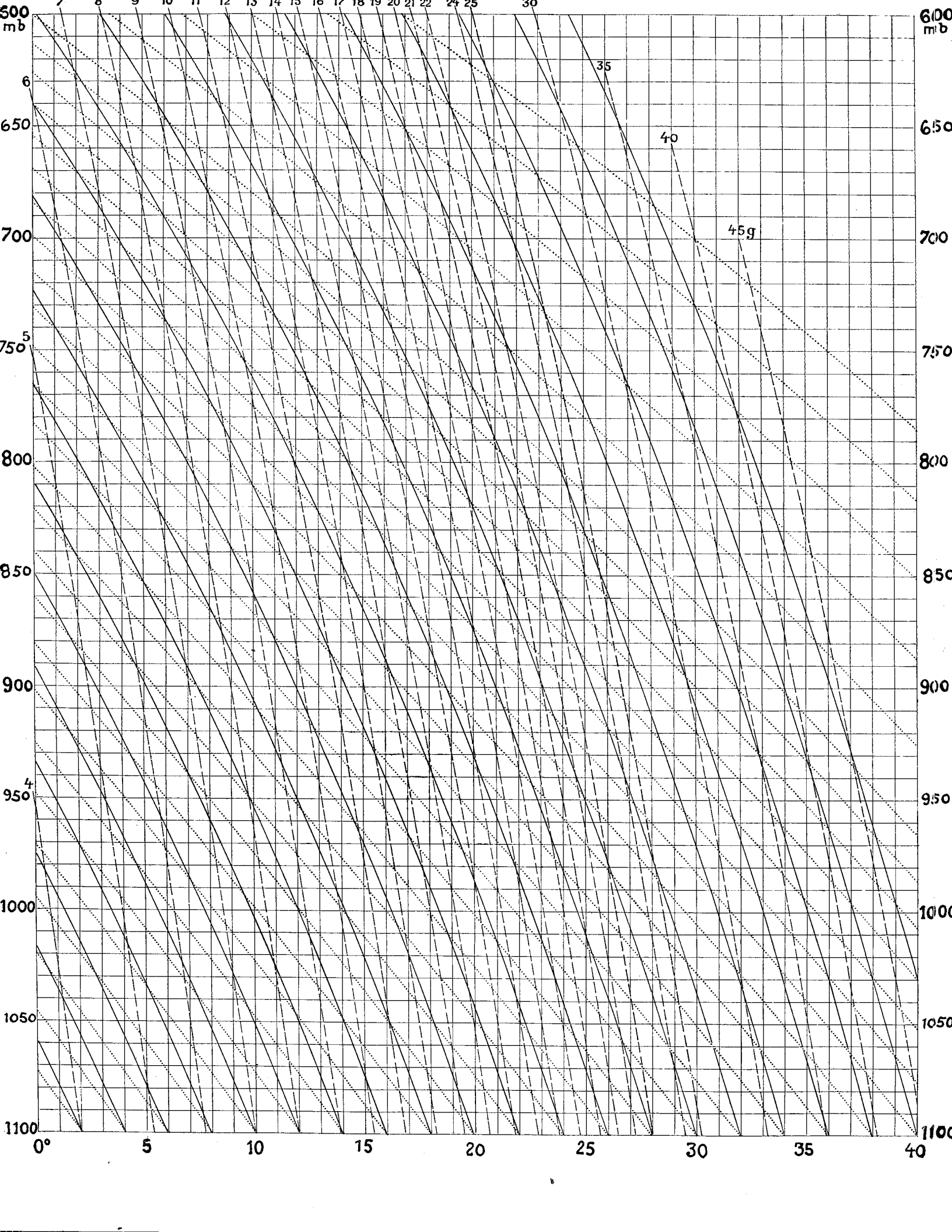
<i>t</i>	8) <i>P</i>	<i>p</i>	6) <i>P</i>	<i>p</i>	4) <i>P</i>	<i>p</i>	2) <i>P</i>	<i>p</i>	0) <i>P</i>	<i>p</i>	— 2) <i>P</i>	<i>p</i>
0	90273	933	92476	975	94526	1016	96532	1058	98449	1100		
— 2	89149	894	91352	935	93402	975	95408	1017	97325	1056	99280	1100
— 4	88048	858	90251	897	92303	936	94307	977	96224	1016	98179	1058
— 6	86924	825	89127	864	91179	902	93183	940	95100	979	97055	1021
— 8	85793	793	87996	831	90048	868	92052	905	93969	943	95924	983
— 10	84651	764	86854	801	88906	837	90910	873	92827	910	94782	949
— 12	83499	736	85702	772	87754	807	89758	842	91675	878	93633	916
— 14	82340	710	84543	745	86595	779	88599	813	90516	848	92471	885
— 16	81171	686	83374	719	85426	753	87430	786	89347	820	91302	856
— 18	79994	662	82197	695	84249	727	86253	760	88170	793	90125	828
— 20	78806	640	81009	672	83061	703	85067	735	86984	767	88939	801
— 22	77610	619	79813	650	81865	680	83869	711	85486	744	87741	777
— 24	76406	599	78609	629	80661	659	82665	689	84582	720	86537	752
— 26	75191	580	77394	609	79446	638	81450	668	83367	697	85323	728
— 28	73967	562	76170	590	78222	618	80226	647	82143	675	84098	704
— 30	72732	544	74935	572	76987	599	78991	627	80908	654	82863	682
— 32	71486	527	73689	554	75741	580	77745	607	79662	635	81617	663
— 34	70230	511	72433	537	74485	563	76489	589	78406	615	80361	643
— 36	68963	495	71165	520	73217	545	75222	571	77189	596	79094	623
— 38	67686	480	69889	504	71941	529	73945	553	75862	578	77817	604
— 40	66399	465	68601	489	70653	513	72658	537	74575	561	76530	586

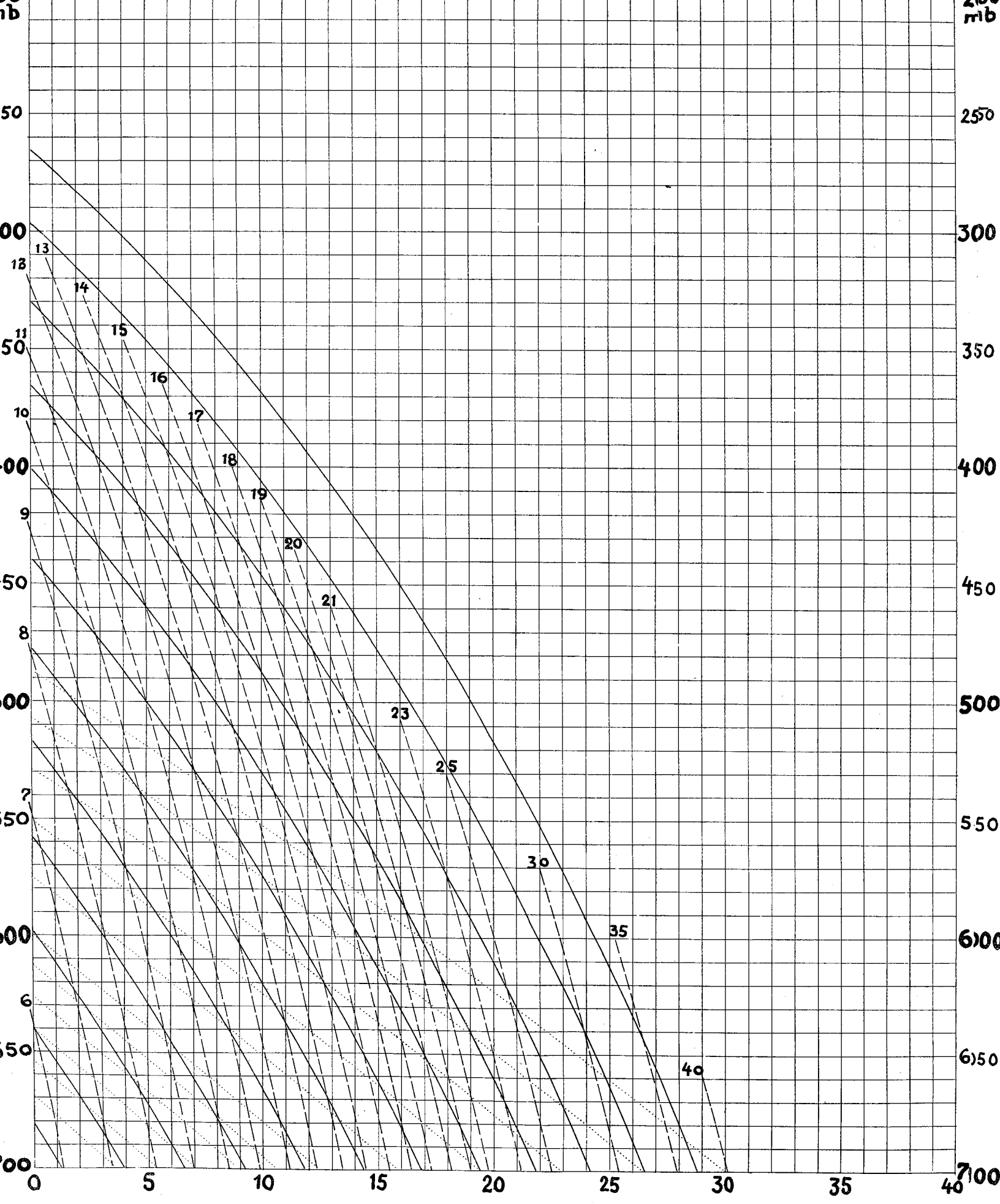
(Tab. 5.)

<i>t</i>	— 4) <i>P</i>	<i>p</i>	— 6) <i>P</i>	<i>p</i>	— 8) <i>P</i>	<i>p</i>	— 10) <i>P</i>	<i>p</i>	— 12) <i>P</i>	<i>p</i>	— 14) <i>P</i>	<i>p</i>
0												
— 2												
— 4	99930	1100										
— 6	98806	1059	00599	1100								
— 8	97675	1021	99468	1062	01156	1100						
— 10	96533	986	98326	1026	00014	1063	01603	1100				
— 12	95384	952	97177	990	98865	1027	00451	1063	02001	1100		
— 14	94222	920	96015	957	97603	1093	99292	1028	00842	1064	02542	1100
— 16	93053	890	94846	926	96534	961	98123	995	99673	1030	01173	1065
— 18	91876	861	93669	896	95357	930	96946	963	98496	997	99996	1031
— 20	90690	833	92483	867	94171	901	95760	933	97310	966	98810	999
— 22	89492	808	91285	841	92973	873	94562	905	96112	936	97612	968
— 24	88288	782	90081	814	91769	846	93358	876	94908	908	96408	939
— 26	87074	758	88867	789	90555	820	92143	849	93693	880	95193	911
— 28	85849	735	87642	765	89330	794	90919	824	92469	854	93969	883
— 30	84614	712	86407	741	88095	770	89684	799	91234	827	92634	856
— 32	83368	690	85161	719	86849	747	88438	775	89988	802	91488	830
— 34	82112	669	83905	697	85593	724	87182	751	88732	778	90232	805
— 36	80845	649	82638	676	84326	703	85915	729	87465	755	88965	781
— 38	79568	629	81361	656	83049	681	84638	707	86188	732	87688	758
— 40	78281	610	80074	636	81762	661	83351	685	84901	711	86401	735

<i>t</i>	— 16) <i>P</i>	<i>p</i>	— 18) <i>P</i>	<i>p</i>	— 20) <i>P</i>	<i>p</i>	— 22) <i>P</i>	<i>p</i>	— 24) <i>P</i>	<i>p</i>	— 26) <i>P</i>	<i>p</i>
0												
— 2												
— 4												
— 6												
— 8												
— 10												
— 12												
— 14												
— 16	02633	1100										
— 18	01456	1066	02877	1100								
— 20	00270	1033	01691	1066	03092	1100						
— 22	99072	1001	00493	1033	01894	1068	03267	1100				
— 24	97868	970	99289	1002	00690	1034	02063	1067	03407	1100		
— 26	96653	941	98074	972	99475	1001	00848	1035	02192	1067	03547	1100
— 28	95429	913	96840	942	98251	973	99614	1003	00968	1035	02323	1067
— 30	94194	885	95615	914	97016	943	98389	974	99733	1004	01088	1035
— 32	92948	858	94369	887	95770	915	97143	945	98487	974	99842	1005
— 34	91692	833	93113	860	94514	888	95887	916	97231	945	98586	975
— 36	90425	808	91845	834	93247	862	94619	889	95964	917	97319	946
— 38	89148	783	90569	809	91970	836	93343	862	94687	889	96042	917
— 40	87861	760	89282	785	90683	811	92056	837	93400	863	94755	890

<i>t</i>	— 28) <i>P</i>	<i>p</i>	— 30) <i>P</i>	<i>p</i>	— 32) <i>p</i>	<i>p</i>	— 34) <i>P</i>	<i>p</i>
— 28	03643	1100						
— 30	02408	1067						
— 32	01162	1035						
— 34	99906	1005	-	-	-	-	03866	1100
— 36	98639	975	-	-	-	-	02599	1067
— 38	97362	945	-	-	-	-	01322	1035
— 40	96075	917	-	-	-	-	00035	1005
— 42	94774	890	-	-	-	-	98734	974
— 44	93465	863	-	-	-	-	97425	945
— 46	92143	837	-	-	-	-	96103	916
— 48	90807	811	-	-	-	-	94767	888
— 50	89459	786	-	-	-	-	93421	861





700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
50

40
35
30
25
20
15
10
5
0

13
14
15
16
17
18
19
20
21
23
25
30
35
40

