

# ÜBER REIBUNG UND DISSIPATION IN DER ATMOSPHÄRE

VON

*TH. HESSELBERG*

(Eingeliefert am 19. Februar 1924)

1. Wegen der Turbulenz findet in mehr oder weniger unvermittelter Weise Luftmischung und Austausch zwischen den verschiedenen Luftschichten statt.

Durch den Austausch von Luftpartikeln zwischen zwei Nachbarschichten wird kinetische Energie von der einen Schicht in die andere überführt. Das Resultat davon ist eine sehr grosse scheinbare Viskosität, die man findet, so lange man nur die grossen ausgeglichenen Bewegungen betrachtet, die unsere gewöhnlichen meteorologischen Beobachtungen geben.

Die ungeordneten Bewegungen bringen Luftpartikeln nahe aneinander, die von verschiedenen Luftschichten herrühren und verschiedene Geschwindigkeiten haben. Man erhält deshalb grosse Geschwindigkeitsdifferenzen auf kurze Entfernungen, und infolgedessen werden bedeutende Mengen Bewegungsenergie durch Reibung in Wärme übergehen.

Im folgenden sollen einige Gedanken über diese ungeordneten Bewegungen und die von ihnen hervorgerufenen grossen Reibungskräfte und grossen Dissipation der Bewegungsenergie dargestellt werden.

2. Unsere gewöhnlichen meteorologischen Instrumente geben Werte, bei denen die kurzperiodischen Schwankungen der Elemente ausgeglichen worden sind. Ein gewöhnliches Barometer z. B. gibt nicht den wirklichen Luftdruck, sondern einen zeitlich ausgeglichenen Wert des Druckes. Zeichnet man dann auch Karten über die Verteilung des Luftdrucks, so wird auch eine räumliche Ausgleichung ausgeführt. Dasselbe ist auch der Fall mit allen anderen Elementen und es sind diese räumlich und zeitlich ausgeglichenen Felder, die wir behandeln können, und nicht die wirklichen Felder, wo die Verteilung der Elemente eine ungeordnete ist. Je mehr Beobachtungen zur Verfügung stehen, desto mehr wird die Darstellung einem genauen Bild desjenigen Feldes nahe kommen, wo nur die kurzperiodischen und lokalen Schwankungen ausgeglichen sind.

Den ausgeglichenen Wert des Luftdruckes werden wir mit  $p$  bezeichnen, den wirklichen mit  $p'$ . In derselben Weise werden wir für die anderen Elemente den wirklichen Wert von dem ausgeglichenen durch Markierung unterscheiden. Ist deshalb  $f$  der ausgeglichene Wert eines Elements, so ist  $f'$  dessen wirklicher Wert.

Die Differenz zwischen dem wirklichen und dem ausgeglichenen Wert werden wir mit  $\Delta f$  bezeichnen:

$$\Delta f = f' - f.$$

$f$  ist ein räumlich und zeitlich ausgeglichener Wert von  $f'$ . Diesen kann man mit hinreichender Genauigkeit als ein gewöhnliches Raummittel definieren. Man bekommt dann die folgende Beziehung zwischen  $f$  und  $f'$ :

$$f = \frac{1}{\tau} \int f' d\tau,$$

wo  $d\tau$  ein Volumendifferential ist und das Volumen  $\tau$  gross genug ist um diejenige Ausgleichung zu geben, die unsere Behandlung fordert, d. h.  $\int \Delta f d\tau$  muss gleich Null sein. In gleicher Weise findet man, wenn man die Integration über eine Fläche  $\sigma$  erstreckt:

$$f = \frac{1}{\sigma} \int f' d\sigma.$$

Es wird im allgemeinen vorteilhaft sein, die Fläche angenähert horizontal zu wählen, weil die Variation von  $f$  in horizontaler Richtung viel kleiner ist als in vertikaler Richtung.

### I. Der Transport der Bewegungsgrösse.

3. Zunächst nehmen wir an, dass die ausgeglichene Geschwindigkeit  $v$  ohne Richtungsänderung mit der Höhe zunimmt, und dass die vertikale Stabilität\*) konstant und positiv ist. Später werden wir uns von diesen Einschränkungen befreien können.

Legen wir jetzt die Fläche  $\sigma$  tangential zur Geschwindigkeit  $v$ , so dass sie eine angenähert horizontale Stromfläche bildet, so wird von den ungeordneten Bewegungen dasselbe Volumen Luft durch die Fläche nach oben getrieben wie nach unten. Nennt man denjenigen Teil von  $\sigma$ , wo die Bewegung nach unten geht  $\sigma_1$  und denjenigen Teil, wo die Strömung nach oben geht,  $\sigma_2$ , so hat man:

$$\overline{\Delta v_{n \cdot 1}} \sigma_1 = \overline{\Delta v_{n \cdot 2}} \sigma_2,$$

wo  $\overline{\Delta v_{n \cdot 1}}$  die mittlere ungeordnete Geschwindigkeit durch die Fläche  $\sigma$  nach unten bedeutet, während  $\overline{\Delta v_{n \cdot 2}}$  die entsprechende mittlere Geschwindigkeit nach oben ist.

Weiter hat man:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma.$$

\*) Siehe Th. Hesselberg: Über die Stabilitätsverhältnisse bei vertikalen Verschiebungen in der Atmosphäre und im Meere. Ann. der Hydr. und mar. Met. 1919. Für die vertikale Stabilität  $S$  hat man:

$$S = \frac{\gamma' - \gamma}{g},$$

wo  $\gamma'$  der adiabatische und  $\gamma$  der vorhandene Temperaturgradient ist, und  $g$  die absolute Temperatur bedeutet.

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man:

$$\sigma_1 = \frac{\overline{\Delta v_{n \cdot 2}}}{\overline{\Delta v_{n \cdot 1}} + \overline{\Delta v_{n \cdot 2}}} \sigma$$

$$\sigma_2 = \frac{\overline{\Delta v_{n \cdot 1}}}{\overline{\Delta v_{n \cdot 1}} + \overline{\Delta v_{n \cdot 2}}} \sigma.$$

In der Fläche  $\sigma$  werden sich wegen des vertikalen Austausches sowohl absteigende wie aufsteigende Luftteilchen befinden. Erstere kommen von den oberen, stärker bewegten Luftschichten und haben deshalb eine mittlere Geschwindigkeit  $v + (\delta v)_1$ , während letztere von den schwächer bewegten, unteren Schichten kommen und eine kleinere mittlere Geschwindigkeit  $v - (\delta v)_2$  haben. Der Überschuss von Geschwindigkeit der absteigenden Partikeln ist mit  $(\delta v)_1$  bezeichnet worden, um auszudrücken, dass es sich nur um kleine Differenzen handelt. Entsprechend ist das kleine Defizit von Geschwindigkeit der aufsteigenden Partikeln mit  $(\delta v)_2$  bezeichnet worden.

Ferner kommen die absteigenden Luftteilchen von potentiell wärmeren Schichten und haben deshalb eine mittlere Temperatur  $\vartheta + (\delta \vartheta)_1$ , während die aufsteigenden Partikeln von potentiell kälteren Schichten kommen und deswegen eine niedrigere mittlere Temperatur  $\vartheta - (\delta \vartheta)_2$  haben. Die absteigenden Luftteilchen werden dann auch eine kleinere mittlere Dichte  $\rho - (\delta \rho)_1$  haben, während die aufsteigenden eine grössere mittlere Dichte  $\rho + (\delta \rho)_2$  haben.

Ist jetzt für irgend ein Element der mittlere Wert der absteigenden Partikeln  $f + (\delta f)_1$  und der mittlere Wert der aufsteigenden Luftteilchen  $f - (\delta f)_2$  so hat man:

$$f\sigma = [f + (\delta f)_1] \sigma_1 + [f - (\delta f)_2] \sigma_2.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werte von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bekommt man:

$$\frac{(\delta f)_1}{(\delta f)_2} = \frac{\overline{\Delta v_{n \cdot 1}}}{\overline{\Delta v_{n \cdot 2}}}.$$

Wir können jetzt eine Vereinfachung bekommen, indem wir die Voraussetzung benutzen, dass die Stabilität konstant und positiv sein soll. Die auf- und absteigenden Luftmassen werden dann in gleicher Weise von dem Auftrieb gehemmt. Alle Ursachen für die Verschiedenheit von  $\overline{\Delta v_{n \cdot 1}}$  und  $\overline{\Delta v_{n \cdot 2}}$  fallen dann fort, und man hat:

$$\overline{\Delta v_{n \cdot 1}} = \overline{\Delta v_{n \cdot 2}} = \overline{\Delta v_n}.$$

Weiter bekommen wir:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2},$$

$$(\delta f)_1 = (\delta f)_2 = \delta f.$$

Da  $f$  irgend ein Element bedeutet, gibt diese Gleichung:

$$(\delta v)_1 = (\delta v)_2 = \delta v,$$

$$(\delta \vartheta)_1 = (\delta \vartheta)_2 = \delta \vartheta,$$

$$(\delta \rho)_1 = (\delta \rho)_2 = \delta \rho.$$

4. Wir werden jetzt die Bewegungsgrösse  $dB'_n$  suchen, die im Zeitdifferential  $dt$  durch die Fläche  $\sigma$  nach unten geht, indem Luftteilchen durch die Fläche ausgetauscht werden. Man hat:

$$\begin{aligned} dB'_n &= (\varrho - \delta\varrho)(v + \delta v) \overline{\Delta v_n} \frac{\sigma}{2} dt - (\varrho + \delta\varrho)(v - \delta v) \overline{\Delta v_n} \frac{\sigma}{2} dt \\ &= (\varrho\delta v - v\delta\varrho) \overline{\Delta v_n} \sigma dt. \end{aligned}$$

Für den Transport  $\frac{dB_n}{dt}$  von Bewegungsgrösse pro Zeit und Flächeneinheit bekommen wir dann:

$$(1) \quad \frac{dB_n}{dt} = (\varrho\delta v - v\delta\varrho) \overline{\Delta v_n}.$$

Für den Transport  $dM'_n$  von Masse durch die Fläche  $\sigma$  nach unten hat man:

$$\begin{aligned} dM'_n &= (\varrho - \delta\varrho) \overline{\Delta v_n} \frac{\sigma}{2} dt - (\varrho + \delta\varrho) \overline{\Delta v_n} \frac{\sigma}{2} dt \\ &= -\delta\varrho \overline{\Delta v_n} \sigma dt, \end{aligned}$$

und der Massetransport  $\frac{dM_n}{dt}$  pro Zeit und Flächeneinheit wird:

$$(2) \quad \frac{dM_n}{dt} = -\delta\varrho \overline{\Delta v_n}.$$

Wird dieses in Gleichung (1) eingesetzt, so bekommt man:

$$(3) \quad \frac{dB_n}{dt} = \varrho\delta v \overline{\Delta v_n} + \frac{dM_n}{dt} v.$$

5. Wir werden jetzt den Transport von Bewegungsgrösse durch eine Fläche  $\sigma_z$  suchen, die horizontal ist. Wir haben dann nicht nur den Transport, der von den ungeordneten Bewegungen herrührt, sondern auch einen Transport mit Hilfe der ausgeglichenen Bewegung. Die vertikale Geschwindigkeit soll mit  $v_z$  bezeichnet werden. Man hat dann einen Transport  $dB'_z$  von Bewegungsgrösse nach unten:

$$\begin{aligned} dB'_z &= (\varrho - \delta\varrho)(v + \delta v) \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - (\varrho + \delta\varrho)(v - \delta v) \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - \varrho v v_z \sigma_z dt + \dots \\ &= \varrho\delta v \overline{\Delta v_z} \sigma_z dt - (\delta\varrho \overline{\Delta v_z} + \varrho v_z) v \sigma_z dt + \dots, \end{aligned}$$

wo die Punkte Glieder höherer Ordnung andeuten, die vernachlässigt werden können.

Für den Transport  $\frac{dB_z}{dt}$  von Bewegungsgrösse pro Zeit- und Flächeneinheit bekommt man:

$$(4) \quad \frac{dB_z}{dt} = \varrho \overline{\Delta v_z} \delta v - (\delta\varrho \overline{\Delta v_z} + \varrho v_z) v.$$

Für den Transport  $dM'_z$  von Masse durch die Fläche  $\sigma_z$  nach unten, hat man:

$$dM'_z = (\varrho - \delta\varrho) \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - (\varrho + \delta\varrho) \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - \varrho v_z \sigma_z dt,$$

und der Massetransport  $\frac{dM_z}{dt}$  pro Zeit- und Flächeneinheit wird:

$$(5) \quad \frac{dM_z}{dt} = -\delta \rho \overline{\Delta v_z} - \rho v_z.$$

Wird dieses in Gleichung (4) eingeführt, so bekommt man:

$$(6) \quad \frac{dB_z}{dt} = \rho \overline{\Delta v_z} \delta v + \frac{dM_z}{dt} v.$$

## II. Die ungeordneten Luftbewegungen.

6. In Abschnitt I haben wir vorausgesetzt, dass die Stabilität  $S$  konstant wäre. Um von dieser Voraussetzung frei zu werden, wollen wir den Einfluss des Auftriebes auf die ungeordneten Bewegungen betrachten.

Ein Luftteilchen soll sich zur Zeit  $t=0$  in einer Höhe  $z_0$  befinden und eine vertikale Geschwindigkeit  $v'_{z,0}$  haben. Das Teilchen soll eine Temperatur haben, die gleich der Mitteltemperatur in der Höhe  $z_0$  ist. Das Teilchen wird sich dann zur Zeit  $t$  in einer Höhe  $z$  befinden und wegen des Auftriebes einer vertikalen Beschleunigung

$$-S(z - z_0)$$

ausgesetzt sein, indem wir vorläufig den Einfluss der Temperaturleitung von der Umgebung zum Partikelchen ausser Betracht lassen.

Wir setzen weiter voraus, dass die Reibung zwischen dem Teilchen und seiner Umgebung vernachlässigt werden kann, und dass das Teilchen keinen neuen Impulsen ausgesetzt wird. Die Bewegungsgleichung des Partikels ist dann:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -S(z - z_0).$$

Wenn  $S$  konstant und positiv ist, so findet man durch Integration:

$$z - z_0 = \frac{v'_{z,0}}{\sqrt{S}} \sin \sqrt{S} t.$$

Das Partikelchen wird ungedämpfte Schwingungen um seine Gleichgewichtslage ausführen. Die Schwingungsdauer  $T$  ist:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{S}}.$$

Setzt man hier  $S=10^{-5}$ , was ungefähr den mittleren Verhältnissen in der Troposphäre entspricht, so bekommt man:

$$T = 1980 \text{ Sekunden.}$$

Es sind also sehr langsame Schwingungen, welche der Auftrieb hervorrufen kann.

Wenn man voraussetzt, dass das Partikelchen wegen der Reibung an den umgebenden Luftmassen während der Bewegung einer Kraft ausgesetzt wird, die proportional der Geschwindigkeit  $v'_z$  und dieser entgegengerichtet ist, so kann die Bewegungsgleichung des Partikelchens in folgender Weise geschrieben werden:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -S(z - z_0) - 2c \frac{dz}{dt}.$$

Wenn  $S > c^2$  ist, so hat man hier die Lösung:

$$z - z_0 = \frac{v'_{z,0}}{\sqrt{S - c^2}} e^{-ct} \sin \sqrt{S - c^2} t.$$

Man hat also gedämpfte Schwingungen, deren Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{S - c^2}},$$

noch grösser ist als im ungedämpften Fall.

Wir werden nicht auf die Lösungen für  $S \geq c^2$  eingehen, weil es sich hier nur darum handelt zu zeigen, dass die Auftriebskräfte jedenfalls nur sehr langsame Schwingungen hervorrufen können.

Wenn man auch den Einfluss der Wärmeleitung zum Partikelchen von den umgebenden Luftmassen zugibt, so sieht man ohne weiteres, dass das Partikelchen in der Höhe  $z$  dann einer Beschleunigung kleiner als  $S(z - z_0)$  ausgesetzt wird. Die Schwingungsdauer wird also noch grösser wie in den oben behandelten Fällen.

Man kann deshalb annehmen, dass man in der Troposphäre mit Schwingungsdauern von mehr als einer halben Stunde zu rechnen hat, wenn der Auftrieb die treibende Kraft sein soll. Im Laufe dieser Zeit wird das Partikelchen ohne Zweifel so viele Impulse von den ungeordneten Bewegungen der umgebenden Luftmassen erhalten, dass diese Schwingungen nie rein auftreten werden.

7. Neuere Untersuchungen haben nicht nur gezeigt, dass alle meteorologische Elemente kurzperiodischen Schwankungen unterworfen sind, sondern haben auch die Grössenordnung der Variationen und ihre mittlere Schwankungsdauern feststellen können.

Ein gewöhnlicher Barograph ist z. B. zu träge, um die kurzperiodischen Schwankungen im Luftdruck zu zeigen. Die Mikrobarographen und die Variographen geben indessen solche. Es soll hier besonders auf die Untersuchungen von Robitsch\*) hingewiesen werden. In seiner Arbeit «Periodizitäten im Gange des Luftdrucks etc.» S. 141 sagt er:

«Der Luftdruck schwankt beständig. Auch ein gut abgedämpfter Variograph zeigt diese Druckunruhe zu jeder Zeit, zumal man die Empfindlichkeit des Instrumentes sehr gross wählen muss, um derartige Schwankungen, die nur eine ganz geringe Amplitude besitzen, verfolgen zu können. Fig. 7 zeigt die Registrierung dieser Druckunruhe. Die Perioden sind so kurz, dass man sie am besten mit der Stoppuhr feststellt. Sie zeigen ein Häufigkeitsmaximum bei einer Dauer von 10 Sekunden. Dies ist aber die mittlere Dauer der Periode der Elementarschwankungen des Windes. Die Zusammenhörigkeit beider Faktoren scheint also klar, weniger aber der Zusammenhang, in dem die Faktoren ursächlich zueinander stehen. Wir haben es hier entweder mit reellen, der Windstruktur parallel laufenden Druckschwankungen zu tun, oder es handelt sich um den Rest von Saug- und Stauwirkungen, der durch die Dämpfung der Variographen nicht ausgeschaltet wurde. Auch können sich beide Einflüsse superponieren.»

In einem Brief schreibt er mir weiter:

«Die Amplituden dieser kürzesten Schwingungen richten sich nach der Windstärke. Sie zeigen den gleichen täglichen Gang wie diese.»

\*) M. Robitsch: Periodizitäten im Gange des Luftdrucks und der Lufttemperatur. Die Arbeiten des Preuss. Aeron. Observatoriums bei Lindenberg. XIV. Band. Wissenschaftliche Abhandlungen. Braunschweig 1922.

Über die Grössenordnung der Amplitude sagt er weiter nichts. In der oben erwähnten Fig. 7 ist aber eine Registrierkurve wiedergegeben, welche die Druckunruhe angibt. In der Kurve bedeutet ein Ausschlag von einem Millimeter eine Druckänderung von 0.0006 mm. Quecksilber pro Sekunde. Da die Kurve Ausschläge von 6 bis 12 mm. zeigt, hat man in diesem Fall kurzperiodische Druckänderungen von im Maximum 0.0072 mm. Quecksilber pro Sekunde. Da die mittlere Periodenlänge etwa 10 Sekunden beträgt, so hat man kurzperiodische Druckschwankungen von nur einigen Hundertstel mm Quecksilber. Dieses stimmt mit einer mündlichen Erläuterung von Wenger, der mir die Grössenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-1}$  mbar angab.

Robitsch hat offenbar seine Zweifel, ob diese Druckunruhe wirklich in der Atmosphäre vorkommt, ob sie nicht vielmehr von den Aufstellungsbedingungen des Variographen herrührt. Dazu kann indessen bemerkt werden, dass Windunruhe von Druckunruhe begleitet sein dürfte. Denn wenn der Wind kurzperiodischen, ungeordneten Schwankungen unterworfen ist, so müssen auch in der freien Atmosphäre lokale Saug- und Stauwirkungen auftreten, da die ungeordneten Bewegungen bald Luftteilchen gegeneinander pressen und bald voneinander treiben werden.

Die Unruhe des Windes ist besonders von englischen Meteorologen und in der letzten Zeit auch von deutschen untersucht worden. Die Unruhe des Windes ist eine sehr grosse, sowohl in Richtung wie in Stärke. Robitsch\*) gibt z. B. an, dass:

«Die Schwankungsamplitude des extrem böigen Windes steht in naher linearer Abhängigkeit zu der mittleren Windgeschwindigkeit. Sie besitzt etwa den 1.7 fachen Betrag der letzteren. Die absoluten Windextreme liegen bei solchen Winden etwa bei Windwerten, die dem 1.9 fachen bzw. 0.2 fachen des Windmittels entsprechen.»

Weiter hat man nach Taylor\*\*):

«A casual glance at the records was sufficient to assure me that a wide velocity-ribbon almost always corresponds with a wide direction-ribbon. That this is the case is, in fact, a matter of common observation among meteorological observers, but an examination of a few extra wide traces led to the conclusion that the average eddy velocity across wind is actually about equal to the average component along the wind direction, i. e.:  $\overline{v^2} = \overline{u^2}$ .»

Es ist also keine Richtung im Horizontalplan, längs welcher die Schwankungen besonders gross sind.

Da die Stabilität  $S$  alzu klein ist, um merklich auf diese grossen kurzperiodischen Schwankungen einwirken zu können, ist kein Grund vorhanden dass  $\Delta v_z$  einer anderen Grössenordnung als  $\Delta v_x$  und  $\Delta v_y$  angehören sollte. Man kann deshalb annehmen, dass die ungeordnete vertikale Geschwindigkeit derselben Grössenordnung angehört wie die ungeordneten Geschwindigkeiten in der Horizontalebene.

Dieses ist auch in der Tat von Taylor durch Messungen direkt nachgewiesen worden. Erwähnt kann auch werden, dass Ludewig\*\*\*) während einer Ballonfahrt Vertikalgeschwindigkeiten von 3 m/sek. gemessen hat.

\*) M. Robitsch: Beiträge zur Kenntnis der Struktur des Bodenwindes. Die Arbeiten des Preuss. Aeron. Observatoriums bei Lindenberg. XIII. Band. Wissenschaftliche Abhandlungen. Braunschweig 1919.

\*\*\*) G. I. Taylor: Observations and Speculations on the Nature of turbulent Motion. Advisory Committee for Aeronautics. Reports and Memoranda (New Series) No. 345. August 1917. London.

\*\*\*) Ludewig: Die Messung vertikaler Luftströme. Leipzig 1911.

Ferner zeigen die Untersuchungen von Barkow\*), dass auch in der Temperatur kurzperiodische Schwankungen vorhanden sind, und zwar von der Grössenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-1}$  Grad Celsius. Später hat Robitsch\*\*) diese Temperaturunruhe untersucht, und eine genaue Beziehung zwischen ihr und der Böigkeit des Windes gefunden. Er gibt einen Korrelationsfaktor zwischen den beiden Elementen von  $0.95 \pm 0.01$  an.

8. Wir kennen jetzt die Grössenordnung der kurzperiodischen Schwankungen im Luftdruck, im Wind und in der Temperatur. Bezeichnet man die Grössenordnung\*\*\*) mit Magn. (Verkürzung von Magnitudo), so hat man:

$$\begin{aligned} \text{Magn. } \Delta p &= 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2} \text{ cbar,} \\ \text{Magn. } \Delta v_x &= \text{Magn. } \Delta v_y = 10^0 \text{ bis } 10^1 \text{ m/sek,} \\ \text{Magn. } \Delta v_z &= 10^0 \text{ bis } 10^1 \text{ m/sek,} \\ \text{Magn. } \Delta \vartheta &= 10^{-2} \text{ bis } 10^{-1} \text{ }^\circ \text{C.,} \end{aligned}$$

und die mittlere Schwingungsdauer ist für alle etwa 10 Sekunden.

Auch in anderen Elementen kommen ohne Zweifel ähnliche Schwankungen vor. So hat man z. B. für die Dichte:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta},$$

und man findet:

$$\text{Magn. } \Delta \rho = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6}.$$

Schwankungen von dieser Grössenordnung hat man in einem festen Raumpunkt im Laufe von etwa 10 Sekunden. Wir finden deshalb †):

$$\begin{aligned} \text{Magn. } \frac{\partial p'}{\partial t} &= 10^{-4} \text{ bis } 10^{-3}, \\ \text{Magn. } \frac{\partial v'_x}{\partial t} &= \text{Magn. } \frac{\partial v'_y}{\partial t} = 10^{-1} \text{ bis } 10^{-0}, \\ \text{Magn. } \frac{\partial v'_z}{\partial t} &= 10^{-1} \text{ bis } 10^0, \\ \text{Magn. } \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} &= 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2}, \\ \text{Magn. } \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7}. \end{aligned}$$

Es ist natürlich anzunehmen, dass alle diese kurzperiodischen Schwankungen ursächlich zusammengehören, und dass sie alle von der Turbulenz der Bewegung herrühren.

9. Wir können jetzt die Bewegungsgleichungen der ungeordneten Bewegungen vereinfachen, indem wir Glieder vernachlässigen, die im Vergleich mit den übrigen Gliedern sehr klein sind.

\*) E. Barkow: Die termische Struktur des Windes. Met. Zeitschr. 1912.

\*\*) M. Robitsch: Untersuchungen über kurzperiodische Schwankungen der Lufttemperatur. Arbeiten des Preuss. Aeron. Observatoriums bei Lindenberg. XIII. Band. Wissenschaftliche Abhandlungen. Braunschweig 1919.

\*\*\*) Siehe Th. Hesselberg und A. Friedmann: Die Grössenordnung der meteorologischen Elemente usw. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Zweite Serie. Bd. I. H. 5.

†) Es ist möglich, dass die Periode kleiner als 10 Sekunden ist. In diesem Falle würde die Grössenordnungen der lokalen Derivierten 10 mal grösser.



Die Bewegungsgleichung der Komponente längs der  $X$ -Achse ist:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} = -\alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} + \lambda v'_y - \nu v'_z + \alpha' R'_x.$$

Hier ist:

$$\lambda = 2\omega \sin \varphi \text{ und } \nu = 2\omega \cos \varphi,$$

wo  $\omega$  die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und  $\varphi$  die geographische Breite ist. Weiter ist  $\alpha'$  das spezifische Volumen und  $R'_x$  die Reibungskraft pro Volumeneinheit.

Wir kennen die Grössenordnung von einem Glied, nämlich:

$$\text{Magn. } \frac{\partial v'_x}{\partial t} = 10^{-1} \text{ bis } 10^0,$$

und können diejenigen Glieder vernachlässigen, die klein sind im Verhältnis zu diesem.

Führt man im Glied  $v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}$  den Wert  $v'_x = v_x + \Delta v_x$  ein, so bekommt man:

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} = v'_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v'_x \frac{\partial \Delta v_x}{\partial x},$$

wo das erste Glied der Grössenordnung  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  ist und vernachlässigt werden kann. Man hat also:

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} = v'_x \frac{\partial \Delta v_x}{\partial x},$$

und in derselben Weise:

$$v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} = v'_y \frac{\partial \Delta v_x}{\partial y} \text{ und } v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} = v'_z \frac{\partial \Delta v_x}{\partial z}.$$

Weiter bekommt man:

$$\alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} = (\alpha + \Delta \alpha) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right) = \alpha \frac{\partial \Delta p}{\partial x},$$

indem kleine Glieder vernachlässigt werden.

Die Glieder  $\lambda v'_y$  und  $\nu v'_z$  haben die Grössenordnung  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  und können völlig vernachlässigt werden.

Das Reibungsglied werden wir später diskutieren, nachdem wir die innere Reibung in der Atmosphäre näher betrachtet haben.

Mit diesen Vereinfachungen wird die Bewegungsgleichung der Komponente längs der  $X$ -Achse:

$$\frac{\partial \Delta v_x}{\partial t} + v'_x \frac{\partial \Delta v_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial \Delta v_x}{\partial y} + v'_z \frac{\partial \Delta v_x}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + \alpha' R'_x.$$

In gleicher Weise finden wir:

$$\frac{\partial \Delta v_y}{\partial t} + v'_x \frac{\partial \Delta v_y}{\partial x} + v'_y \frac{\partial \Delta v_y}{\partial y} + v'_z \frac{\partial \Delta v_y}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \Delta p}{\partial y} + \alpha' R'_y.$$

Längs der  $Z$ -Achse lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial v'_z}{\partial t} + v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v'_z}{\partial y} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z} = -g - a' \frac{\partial p'}{\partial z} + v v'_x + a' R'_z.$$

Für das Glied  $\left(-g - a' \frac{\partial p'}{\partial z}\right)$  hat man:

$$-g - a' \frac{\partial p'}{\partial z} = \left(-g - a \frac{\partial p}{\partial z}\right) - a \frac{\partial \Delta p}{\partial z} - \Delta a \frac{\partial p}{\partial z} - \Delta a \frac{\partial \Delta p}{\partial z}.$$

Das Glied  $\left(-g - a \frac{\partial p}{\partial z}\right)$  ist von der Grössenordnung  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  und kann vernachlässigt werden. Das Auftriebsglied  $\left(-\Delta a \frac{\partial p}{\partial z}\right)$  wird von der Grössenordnung  $10^{-3}$  bis  $10^{-2}$  sein und kann ebenfalls unberücksichtigt bleiben. Endlich ist das Glied  $\Delta a \frac{\partial \Delta p}{\partial z}$  nur  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  mal Glied  $a \frac{\partial \Delta p}{\partial z}$ . Wir bekommen dann:

$$-g - a' \frac{\partial p'}{\partial z} = -a \frac{\partial \Delta p}{\partial z}.$$

Die dritte Bewegungsgleichung wird also analog den zwei ersten:

$$\frac{\partial \Delta v_z}{\partial t} + v'_x \frac{\partial \Delta v_z}{\partial x} + v'_y \frac{\partial \Delta v_z}{\partial y} + v'_z \frac{\partial \Delta v_z}{\partial z} = -a \frac{\partial \Delta p}{\partial z} + a' R'_z.$$

In Vektorform werden also die Bewegungsgleichungen:

$$(7) \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v} = -a \nabla \Delta p + a' \mathbf{R}'.$$

In dieser Gleichung kennen wir vorläufig nur die Grössenordnung des ersten Gliedes, die  $10^{-1}$  bis  $10^0$  ist. In der Gleichung muss aber dann wenigstens noch ein Glied dieser oder höherer Ordnung sein. Durch die Reibung allein kann die Unruhe des Windes nicht entstehen, denn durch die Reibung wird eine schon vorhandene Unruhe gedämpft. Es muss deshalb entweder das Glied  $\mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v}$  oder das Glied  $a \nabla \Delta p$  oder alle beide wenigstens von der Grössenordnung  $10^{-1}$  bis  $10^0$  sein.

Wenn das Glied  $\mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v}$  von dieser Grössenordnung ist, treten so grosse räumliche Unterschiede der Geschwindigkeit auf, dass die Unruhe des Windes lediglich dadurch erklärt werden kann, dass Luftpartikeln, die zur Zeit  $t_0$  sich in verschiedenen Raumpunkten befanden, im Laufe der Zeit durch einen bestimmten Raumpunkt strömen.

Ist das Glied  $a \nabla \Delta p$  der Grössenordnung  $10^{-1}$  bis  $10^0$ , so treten grosse lokale Druckkräfte auf, so dass die Luftteilchen im Laufe von einigen Sekunden Geschwindigkeitsänderungen von mehreren Metern pro Sekunde erleiden.

Da wir durch die Kenntnis von Reibung und Dissipation weitere Haltepunkte für die Diskussion der Gleichung (7) erhalten können, werden wir jetzt zur Behandlung der Reibungskraft zurückkehren.

### III. Die Reibungskraft.

10. In Abschnitt I haben wir den vertikalen Transport  $\frac{dB_z}{dt}$  von Bewegungsgrösse pro Zeit- und Flächeneinheit gefunden (Gleichung 6):

$$\frac{dB_z}{dt} = \rho \overline{\Delta v_z} \delta v + \frac{dM_z}{dt} v,$$

eine Gleichung, die unter den Voraussetzungen gefunden worden ist, dass die vertikale Stabilität konstant und positiv ist, und dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente ohne Richtungsänderung linear mit der Höhe zunimmt.

$\delta v$  bedeutet die Hälfte der mittleren Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den absteigenden und den aufsteigenden Luftteilchen. Man muss deshalb annehmen dass  $\delta v$  angenähert  $\frac{\partial v}{\partial z}$  proportional ist. Wir setzen deshalb:

$$(8) \quad \delta v = c \frac{\partial v}{\partial z},$$

wo  $c$  weniger variabel als  $\delta v$  ist. Die Gleichung für den Transport von Bewegungsgrösse wird dann:

$$\frac{dB_z}{dt} = c\rho \overline{\Delta v_z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{dM_z}{dt} v.$$

Im vorhergehenden Unterabschnitt haben wir gefunden, dass der Auftrieb zu klein ist, um die ungeordneten Bewegungen merklich zu beeinflussen. Es hat dann  $\overline{\Delta v_z}$  denselben Wert für die aufsteigenden und für die absteigenden Luftteilchen, unabhängig davon, ob die Stabilität konstant und positiv ist. Die Gleichung gilt also unabhängig von dieser Bedingung.

Um auch von der zweiten Bedingung, nämlich dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente ohne Richtungsänderung mit der Höhe linear zunehmen soll, befreit zu werden, wollen wir zunächst den Fall behandeln, dass:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \text{konst.}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \text{konst.},$$

oder dass:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{k},$$

wo  $\mathbf{k}$  ein konstanter Vektor ist.

Wegen der X-Komponente der Geschwindigkeit erhalten wir einen Transport von Bewegungsgrösse:

$$\frac{dB_{z \cdot x}}{dt} = c_1 \rho \overline{\Delta v_z} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{dM_z}{dt} v_x,$$

und wegen der Y-Komponente einen Transport:

$$\frac{dB_{z \cdot y}}{dt} = c_2 \rho \overline{\Delta v_z} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{dM_z}{dt} v_y.$$

Da kein Grund vorhanden ist, dass  $c$  verschiedene Werte längs den Achsen hat, setzen wir:

$$c_1 = c_2 = c^*),$$

und erhalten:

$$\frac{d\mathbf{B}_z}{dt} = c_Q \overline{\Delta v_z} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{dM_z}{dt} \mathbf{v}.$$

Setzen wir hier:

$$(9) \quad \eta = c_Q \overline{\Delta v_z},$$

so bekommen wir:

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{B}_z}{dt} = \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{dM_z}{dt} \mathbf{v},$$

eine Gleichung die für  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{k}$  gilt.

Da der Transport von Bewegungsgrösse bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung nur von der Geschwindigkeitsverteilung nahe an der Fläche  $\sigma_z$  abhängt, kann auch diese Voraussetzung wegfallen, und Gleichung (10) kann als allgemein gültig betrachtet werden.

11. Wir werden jetzt die Bewegungsgrössen suchen, welche durch vertikale Flächen, die senkrecht auf der  $X$ -Achse und der  $Y$ -Achse stehen, strömen. Wir haben oben die Strömung durch  $\sigma_z$  als positiv bezeichnet, wenn sie gegen abnehmendes  $z$  gerichtet war. Entsprechend werden wir jetzt die Strömungen durch  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  gegen abnehmendes  $x$  und  $y$  positiv rechnen.

Durch  $\sigma_x$  geht eine Bewegungsgrösse:

$$d\mathbf{B}'_x = - \varrho v_x \sigma_x dt \mathbf{v},$$

und durch  $\sigma_y$ :

$$d\mathbf{B}'_y = - \varrho v_y \sigma_y dt \mathbf{v}.$$

Für die Transporte pro Zeit- und Flächeneinheit bekommen wir also:

$$\frac{d\mathbf{B}'_x}{dt} = - \varrho v_x \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{B}'_y}{dt} = - \varrho v_y \mathbf{v}.$$

Die entsprechenden Massetransporte  $\frac{dm_x}{dt}$  und  $\frac{dm_y}{dt}$  werden:

$$(11) \quad \frac{dm_x}{dt} = - \varrho v_x, \quad \frac{dm_y}{dt} = - \varrho v_y,$$

und wir bekommen:

$$(12) \quad \frac{d\mathbf{B}'_x}{dt} = \frac{dm_x}{dt} \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{B}'_y}{dt} = \frac{dm_y}{dt} \mathbf{v}.$$

12. Wir werden jetzt den Transport von Bewegungsgrösse pro Zeiteinheit in die Volumeneinheit suchen. Dieser wird mit  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ , der lokalen Derivierten der Bewegungsgrösse  $\mathbf{V}$  in Bezug auf die Zeit identisch sein. Wir haben also:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_z}{\partial t \partial z}$$

\*) Wir werden später sehen, dass  $c = \frac{1}{2} l_1$  ist, wo  $l_1$  die mittlere vertikale Weglänge pro Sekunde in der ungeordneten Bewegung ist.

Indem man die Gleichungen (10) und (12) benutzt, bekommt man:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 m_x}{\partial t \partial x} v + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial t \partial y} v + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial t \partial z} v.$$

Wir werden dann den Massetransport pro Zeiteinheit in die Volumeneinheit suchen.

Er ist mit  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , der lokalen Derivierten der Dichte in Bezug auf die Zeit, identisch.

Man findet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial t \partial z},$$

und erhält dann:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v.$$

Da:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

so bekommt man weiter:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Führen wir jetzt die Werte von  $\frac{\partial m_x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial m_y}{\partial t}$  und  $\frac{\partial M_z}{\partial t}$  (Gleichungen 5 und 11) ein, so bekommen wir:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \rho v_x \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v}{\partial y} - \rho v_z \frac{\partial v}{\partial z} - \overline{\Delta v_z} \delta \rho \frac{\partial v}{\partial z},$$

oder:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \overline{\Delta v_z} \delta \rho \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Dieses ist die Beschleunigung pro Volumeneinheit, die eine individuelle Luftmasse wegen des durch die ungeordneten Luftbewegungen vermittelten Austausches mit den umgebenden Luftmassen erleidet. Es ist also die Reibungskraft pro Volumeneinheit. Nennt man diese  $R$  so hat man:

$$(13) \quad R = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \frac{\partial v}{\partial z},$$

wo:

$$(14) \quad v = - \overline{\Delta v_z} \delta \rho.$$

Diese Formel unterscheidet sich von den gewöhnlich gebrauchten\*) durch das Zusatzglied  $v \frac{\partial v}{\partial z}$ .

\*) Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup: Die Reibung in der Atmosphäre. S. 278. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Zweite Serie. H. 10. 1915.

13. Da  $\delta Q$  klein ist, kann man:

$$\delta Q = \varrho \left( \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta \vartheta}{\vartheta} \right)$$

setzen, wo  $\delta p$  die Hälfte des mittleren Druckunterschiedes zwischen den absteigenden und den aufsteigenden Luftteilchen ist, die  $\sigma_z$  durchströmen;  $\delta \vartheta$  ist dementsprechend die Hälfte des mittleren Temperaturunterschiedes zwischen den durch  $\sigma_z$  absteigenden und aufsteigenden Partikelchen.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass die absteigenden Luftteilchen durchschnittlich unter einem anderen Druck stehen sollten als die aufsteigenden. Aber selbst wenn das der Fall sein sollte, zeigen die in Unterabschnitt 7 gegebenen Größenordnungen von  $\Delta p$  und  $\Delta \vartheta$ , dass der Einfluss der Temperatur überwiegen würde. Wir setzen deshalb:

$$\delta Q = -\varrho \frac{\delta \vartheta}{\vartheta}.$$

Weiter führen wir ein:

$$(15) \quad \delta \vartheta = k(\gamma' - \gamma),$$

wo  $\gamma'$  der adiabatische und  $\gamma$  der vorhandene Temperaturgradient ist. Wir erhalten dann:

$$\delta Q = -kQ S,$$

und finden:

$$-\overline{\Delta v_z} \delta Q = kQ \overline{\Delta v_z} S,$$

oder:

$$(16) \quad v = kQ \overline{\Delta v_z} S.$$

#### IV. Die Dissipation.

14. Wir werden zunächst die Bewegungsenergie  $dE'_{z \cdot x}$  suchen, die wegen der X-Komponente der Geschwindigkeit durch  $\sigma_z$  nach unten geht. Man findet:

$$\begin{aligned} dE'_{z \cdot x} &= \frac{1}{2} (\varrho - \delta \varrho) (v_x + \delta v_x)^2 \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - \frac{1}{2} (\varrho + \delta \varrho) (v_x - \delta v_x)^2 \overline{\Delta v_z} \frac{\sigma_z}{2} dt - \frac{1}{2} \varrho v_x^2 v_z \sigma_z dt \\ &= (\varrho \overline{\Delta v_z} \delta v_x v_x - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_z} \delta \varrho v_x^2 - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_z} \delta \varrho (\delta v_x)^2 - \frac{1}{2} \varrho v_x^2 v_z) \sigma_z dt. \end{aligned}$$

Der Transport  $\frac{dE_{z \cdot x}}{dt}$  von Bewegungsenergie pro Zeit- und Flächeneinheit wird also:

$$\frac{dE_{z \cdot x}}{dt} = \varrho \overline{\Delta v_z} \delta v_x v_x - \frac{1}{2} v_x^2 (\overline{\Delta v_z} \delta \varrho + \varrho v_z),$$

indem das Glied  $\frac{1}{2} \overline{\Delta v_z} \delta \varrho (\delta v_x)^2$  als Glied höherer Ordnung vernachlässigt wird.

Mit Hilfe von Gleichung (5) (S. 7) bekommt man:

$$\frac{dE_{z \cdot x}}{dt} = \varrho \overline{\Delta v_z} \delta v_x v_x + \frac{1}{2} \frac{dM_z}{dt} v_x^2,$$

und die Gleichungen (8) und (9) (S. 13 u. 14) geben weiter:

$$\frac{dE_z \cdot x}{dt} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x + \frac{1}{2} \frac{dM_z}{dt} v_x^2.$$

Entsprechend findet man wegen der  $y$ -Komponente des Windes den Transport  $\frac{dE_z \cdot y}{dt}$  von Bewegungsenergie durch  $\sigma_y$ :

$$\frac{dE_z \cdot y}{dt} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y + \frac{1}{2} \frac{dM_z}{dt} v_y^2.$$

Für den gesammten Transport  $\frac{dE_z}{dt}$  von Bewegungsenergie durch  $\sigma_z$  hat man also:

$$\frac{dE_z}{dt} = \frac{dE_z \cdot x}{dt} + \frac{dE_z \cdot y}{dt} = \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{dM_z}{dt} v^2.$$

Für die Transporte von Bewegungsenergie durch die Flächen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  findet man entsprechend (vergl. Abschnitt 12):

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm_x}{dt} v^2, \quad \frac{dE_y}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm_y}{dt} v^2.$$

15. Wir werden jetzt den Transport  $\frac{\partial E}{\partial t}$  pro Zeiteinheit in die Volumeneinheit suchen.

Wir haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial z} \\ &= \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t \partial x} v^2 + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_y}{\partial t \partial y} v^2 + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} v + \frac{\partial^2 M_z}{\partial t \partial z} v^2 \\ &\quad + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{v} + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Führen wir jetzt den in Abschnitt 12 gefundenen Wert von  $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{v} + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} v + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} v^2.$$

Nach den Gleichungen (5), (11) und (14) (S. 7, 14 u. 15) haben wir:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} = -\varrho v_x \frac{\partial v}{\partial x} - \varrho v_y \frac{\partial v}{\partial y} - \varrho v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{\partial z},$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{v} + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] - \varrho v_x \frac{\partial v}{\partial x} v - \varrho v_y \frac{\partial v}{\partial y} v - \varrho v_z \frac{\partial v}{\partial z} v + \\ &\quad + \nu \frac{\partial v}{\partial z} v + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} v^2. \end{aligned}$$

Um den Transport  $\frac{dE}{dt}$  von Bewegungsenergie nach einer individuellen Luftmasse zu finden, setzen wir:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial t} + v_x \frac{\partial E}{\partial x} + v_y \frac{\partial E}{\partial y} + v_z \frac{\partial E}{\partial z}, \\ &= \frac{\partial E}{\partial t} + v_x \left( \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} v^2 \right) + v_y \left( \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial y} v^2 \right) + v_z \left( \rho v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial z} v^2 \right).\end{aligned}$$

Wird der gefundene Wert von  $\frac{\partial E}{\partial t}$  hier eingesetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{v} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} v + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) v^2.\end{aligned}$$

Hier hat man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{d\rho}{dt}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} v &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{v},\end{aligned}$$

und man erhält:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} v^2 + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Nach Abschnitt 12 hat man:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z},$$

und man findet:

$$\frac{dE}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} v^2 + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right],$$

oder:

$$(17) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}\rho v^2)}{dt} + \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Diese Gleichung sagt, dass die Energiemenge, die einer individuellen Luftmasse durch die ungeordneten Bewegungen zugeführt wird, teils dazu verwendet wird, um die Bewegungsenergie der Luftmasse zu ändern, und teils durch die innere Reibung in Wärme überführt wird. Dieser letzte Teil ist die Dissipation. Wird diese  $D$  genannt, so hat man:

$$(18) \quad D = \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right],$$

eine Formel, die mit den gewöhnlich verwendeten übereinstimmt. Die Formel kann auch von der gewöhnlichen hydrodynamischen Dissipationsformel abgeleitet werden, indem man kleine Glieder vernachlässigt.



16. Im Jahre 1918 entstand ein Streit zwischen H. U. Sverdrup und W. Schmidt über den Energieverbrauch in der Atmosphäre. Sverdrup hatte eine Abhandlung\*) geschrieben, wo er die Arbeit der Reibungskraft von der Anemometerhöhe bis an die Grenze der Atmosphäre unter den Voraussetzungen behandelt, dass die Bewegung stationär und ohne merkliche individuelle Beschleunigung sei, und dass ferner der Reibungskoeffizient  $\eta$  konstant sei.

In diesem Fall wird die Windverteilung mit der Höhe ziemlich rein den Einfluss der Reibung am Erdboden zeigen. Der Wind nimmt unter Rechtsdrehung nahe am Erdboden rasch mit der Höhe zu und nähert sich mit wachsender Höhe allmählich dem Gradientwinde. Diese Annäherung an den Gradientwind geschieht nicht linear, sondern in einer Spirale\*\*).

Für die von Sverdrup behandelte Bewegung sind die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \lambda v_y &= 0, \\ \alpha_0 \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \lambda v_x &= \alpha_0 G_0. \end{aligned}$$

Durch Integration dieser Gleichungen bekommt man:

$$(19) \quad \begin{cases} v_x = C e^{-cz} \sin(\gamma - cz) + \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda}, \\ v_y = -C e^{-cz} \cos(\gamma - cz). \end{cases}$$

wo:

$$(20) \quad \begin{cases} C \sin \gamma = v_{x \cdot 0} - \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} \\ C \cos \gamma = v_{y \cdot 0} \\ c = \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha_0 \eta}}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet Sverdrup:

$$(21) \quad - \int_0^{\infty} \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \cdot \mathbf{v} dz = \sqrt{\eta} \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha_0}} \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} \left( \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} - v_{x \cdot 0} + v_{y \cdot 0} \right),$$

ein Ausdruck, der unter den oben genannten Voraussetzungen die Gesamtarbeit der Reibungskraft vom Erdboden bis an die Grenze der Atmosphäre gibt.

Da die Verhältnisse stationär vorausgesetzt worden sind, findet keine Änderung des Bewegungszustandes statt. Es wird deshalb keine Arbeit zur Vergrößerung der kinetischen Energie verwendet. Formel (21) dürfte deshalb ein Ausdruck für den gesamten Energieverbrauch in der Atmosphäre sein.

Gegen diese Betrachtungen opponierte W. Schmidt\*\*\*) in einer Abhandlung, wo er den gesamten Energieverbrauch nach der Dissipationsformel:

$$\int_0^{\infty} D dz = \eta \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] dz$$

\*) H. U. Sverdrup: Über den Energieverbrauch der Atmosphäre. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Bd. II. H. 4.

\*\*\*) Siehe z. B. Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup: Die Windänderung mit der Höhe usw. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. VII. Band.

\*\*\*\*) W. Schmidt: Über Arbeitsleistung und Arbeitsverbrauch in der freien Atmosphäre. Annalen der Hydr. und mar. Met. 1918.

berechnet. Mit Hilfe dieser Formel findet er bedeutend kleinere Werte für den Energieverbrauch als Sverdrup.

Endlich sucht Exner\*) von allgemeinerem Gesichtspunkte die Frage aufzuklären. Er kommt zu dem Resultate, dass Schmidts Darstellung richtig ist, und dass die Arbeit von Sverdrup einen Fehler enthält.

17. Nach meiner Meinung scheinen sowohl Sverdrups wie Schmidts Betrachtungen in der Hauptsache richtig zu sein, und wir werden in der Tat sehen, dass sie beide Recht haben, dass sie aber verschiedene Probleme behandelt haben.

Nach Gleichung (13) haben wir:

$$\mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z},$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) v_x + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) v_y + \nu \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x + \nu \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y \right) - \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \nu v_x^2 \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \nu v_y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial z} v^2. \end{aligned}$$

Durch Integration bekommen wir dann weiter:

$$-\int_{z_0}^z \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dz = \left| \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nu v^2 \right|_{z_1}^{z_0} + \int_{z_0}^{z_1} \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial z} v^2.$$

In dem von Sverdrup behandelten Fall hat man:

$$\nu = \frac{dM_z}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0,$$

und man bekommt:

$$\begin{aligned} -\int_{z_0}^z \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dz &= \left| \eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{dM_z}{dt} v^2 \right|_{z_1}^{z_0} + \int_{z_0}^{z_1} \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] dz \\ &= \left( \frac{dE_z}{dt} \right)_{z=z_0} - \left( \frac{dE_z}{dt} \right)_{z=z_1} + \int_{z_0}^{z_1} D dz, \end{aligned}$$

wo  $\frac{dE_z}{dt}$  der von den ungeordneten Luftbewegungen verursachte Transport von Bewegungsenergie nach unten ist (vergl. Abschnitt 14).

Die gesammte Reibungsarbeit ist also gleich der Summe der Dissipation und derjenigen Energiemengen, die wegen der ungeordneten Bewegungen aus den Volumina ausströmen.

Wenn man die Integration von Null (Anemometerhöhe) bis unendlich erstreckt, so bekommt man:

$$(22) \quad -\int_0^{\infty} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dz = \left( \frac{dE_z}{dt} \right)_{z=0} + \int_0^{\infty} D dz.$$

\*) F. M. Exner: Über den Energieverbrauch in der Atmosphäre. Annalen der Hydr. und mar. Met. 1920.

In dem von Sverdrup behandelten Fall geht also ein Teil der Arbeit der Reibungskraft durch die Dissipation in der freien Atmosphäre in Wärme über, während ein anderer Teil durch die untere Grenzfläche ausströmt. Dieser Teil geht teilweise durch Dissipation in der Luftschicht unterhalb Anemometerhöhe in Wärme über, aber der überwiegende Teil wird zur Arbeit des Windes am Erdboden verwendet. Durch diese Arbeit geht wiederum ein Teil der Energie in Wärme über und ein anderer Teil wird dazu verwendet, um die anderen Wirkungen des Windes auf die feste und flüssige Erdoberfläche auszuführen.

Es ist somit klar, dass das Sverdrupsche Verfahren den gesamten Energieverbrauch in der Atmosphäre gibt, während Schmidt nur die Dissipation in der freien Atmosphäre berechnete.

Nach Formel (21) ist:

$$-\int_0^{\infty} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dz = \sqrt{\eta} \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha_0}} \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} \left( \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} - v_{x \cdot 0} + v_{y \cdot 0} \right).$$

Aus den Gleichungen (19) und (20) findet man auch leicht:

$$\int_0^{\infty} D dz = \sqrt{\eta} \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha_0}} \left[ \left( \frac{\alpha_0 G_0}{\lambda} - v_{x \cdot 0} \right)^2 + v_{y \cdot 0}^2 \right].$$

Man verifiziert weiter leicht, dass für die von den Gleichungen (19) und (20) (S. 19) definierte Bewegung:

$$-\int_0^{\infty} \left( v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) dz = -\int_0^{\infty} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dz$$

ist, dass also im behandelten Fall die ganze Arbeit des Druckgradienten zur Überwindung der Reibungswiderstände geht.

Exner gibt keinen Einfluss von Energie durch die untere Begrenzungsfläche zu. Er setzt  $v_{x \cdot 0} = v_{y \cdot 0} = 0$  und findet deshalb keine Arbeit an der Erdoberfläche. Nur durch diese Voraussetzung kommt er dazu, dass Schmidt den gesamten Energieverbrauch in der Atmosphäre berechnet hat.

#### V. Weitere Diskussion der ungeordneten Luftbewegungen.

18. Nach den verschiedenen Untersuchungen\*) über die innere Reibung in der Atmosphäre hat man:

$$\text{Magn. } \eta = 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2}.$$

Da die Größenordnung von  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  und  $\frac{\partial v_y}{\partial z}$   $10^{-3}$  bis  $10^{-2}$  ist, so bekommt man:

$$\text{Magn. } D = \text{Magn. } \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6}.$$

\*) Eine gute Übersicht hierüber findet man bei Lewis F. Richardson: Weather Prediction by numerical Progress. Cambridge. At the University Press. 1922.

Wenn man andererseits die ungeordneten Bewegungen betrachtet, so findet man für die Dissipation:

$$D = p' \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v'_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'_x}{\partial z} + \frac{\partial v'_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'_y}{\partial z} + \frac{\partial v'_z}{\partial y} \right)^2 \right],$$

ein Ausdruck, der aus 9 quadratischen Gliedern von der Form  $\mu \left( \frac{\partial v'}{\partial s} \right)^2$  besteht.  $\mu$  ist der experimentel gefundene Reibungskoeffizient für Luft (der Reibungskoeffizient bei molekularem Austausch).

Indem man die zwei Ausdrücke für die Dissipation identifiziert, bekommt man:

$$\text{Magn. } 10^1 \mu \left( \frac{\partial v'}{\partial s} \right)^2 = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6}.$$

Für  $\mu$  hat man bei  $0^\circ \text{C}$ :

$$\mu = 1.7 \cdot 10^{-8},$$

und man erhält:

$$\text{Magn. } \frac{\partial v'}{\partial s} = 10^{-1} \text{ bis } 10^0.$$

19. Wir können jetzt die Diskussion der Gleichung (7) (S. 12):

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v} = -\alpha \nabla \Delta p + \alpha' \mathbf{R}'$$

fortsetzen, indem wir wissen, dass:

$$\text{Magn. } \nabla \Delta \mathbf{v} = 10^{-1} \text{ bis } 10^0$$

ist. Hieraus bekommt man:

$$\text{Magn. } \mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v} = 10^0 \text{ bis } 10^1.$$

Für  $\frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t}$  haben wir die Grössenordnung  $10^{-1}$  bis  $10^0$  gefunden. Das Glied  $\mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v}$  kann also nicht vernachlässigt werden.

Die Reibungskraft  $\alpha' \mathbf{R}'$  kann als die Summe der Reibungskräfte betrachtet werden, die auf die Seitenflächen eines Kubus vom Volumen eins wirken. Diese haben folgende Form

$$\mu \frac{\partial v'}{\partial s}$$

und ihre Anzahl beträgt insgesamt  $3 \cdot 6 = 18$ . Die Reibungskraft  $\alpha' \mathbf{R}'$  kann dann höchstens von der Grössenordnung:

$$18 \alpha' \mu \frac{\partial v'}{\partial s}$$

sein.

Setzen wir hier die Werte von  $\alpha'$ ,  $\mu$  und die Grössenordnung von  $\frac{\partial v'}{\partial s}$  ein, so bekommen wir:

$$\text{Magn. } \alpha' \mathbf{R}' = \text{höchstens } 10^{-5} \text{ bis } 10^{-4},$$

und das Glied  $\alpha' \mathbf{R}'$  kann ohne Bedenken vernachlässigt werden. Gleichung (7) wird dann:

$$(23) \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \Delta \mathbf{v} = \alpha \nabla \Delta p \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' = \alpha \nabla p'.$$

Wenn man in dieser Gleichung  $\alpha \nabla p'$  vernachlässigen könnte, so würde die Unruhe des Windes dadurch zu erklären sein, dass Luftteilchen von verschiedenen Niveaus, ohne ihre Bewegung wesentlich zu ändern, in einem Niveau zusammengebracht würden. Man müsste aber dann vorzugsweise die Unruhe in der Richtung  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$  haben. Dies ist aber nicht der Fall, und man muss deshalb annehmen, dass das Glied  $\alpha \nabla p'$  nicht vernachlässigt werden kann, dass also während der ungeordneten Bewegung Kompressionen und Dilatationen auftreten, welche die Bewegungen der individuellen Partikeln wesentlich ändern. Wir haben also die Grössenordnung von  $\alpha \nabla p'$  gleich  $10^0$  bis  $10^1$  d. h. die lokalen Druckkräfte sind so gross, dass sie im Laufe einer Sekunde die Geschwindigkeit eines Luftteilchens mehrere Meter pro Sekunde verändern können.

20. Man könnte annehmen, dass die Temperaturunruhe sich durch die Druckunruhe erklären liesse, indem die Luftmassen successive adiabatisch komprimiert und ausgedehnt werden. In diesem Fall sollte:

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = \frac{A \alpha' \partial p'}{c_p \partial t},$$

oder:

$$\text{Magn. } \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = \text{Magn. } \frac{\partial p'}{\partial t}$$

sein.

$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t}$  ist aber grösser als  $\frac{\partial p'}{\partial t}$ . Man muss deshalb annehmen, dass die Temperaturunruhe wesentlich davon herrührt, dass Luftmassen von verschiedener potentieller Temperatur in dasselbe Niveau zusammengebracht worden sind.

In gleicher Weise wird die Windunruhe teilweise davon herrühren, dass Luftteilchen von verschieden bewegten Luftschichten in einem Niveau vorkommen. Hier kann man es aber nicht direkt an der Windunruhe feststellen, weil der Einfluss der auftretenden Kompressionen und Dilatationen (der lokalen Druckkräfte) die Bewegung der Luftteilchen schnell ändert.

21. Bei dieser Mischung der Luftpartikeln zwischen den verschiedenen Luftschichten gehen die Partikeln nicht den geraden Weg von einer Schicht in eine andere. Sie erhalten unterwegs durch die auftretenden Kompressionen und Dilatationen bald in der einen bald in einer anderen Richtung Impulse, und verbrauchen viel Zeit auf ihrem Wege. Sie haben deshalb Zeit, um Bewegungsenergie, Wärme, Wasserdampf etc. durch Molekularaustausch mit den umgebenden Luftmassen auszuwechseln.

Der vertikale Weg, den ein Luftteilchen in dieser Weise zurücklegen könnte, wäre unbegrenzt, wenn nicht die Auftriebskräfte eine Grenze setzten. Der Auftrieb

ist zwar so klein, dass er in der Gleichung der ungeordneten Bewegung vernachlässigt werden kann, er wirkt aber systematisch, um ein Partikelchen zu dem Niveau zurückzubringen, wo die ausgeglichene Temperatur dieselbe ist wie diejenige des Partikels.

Die Auftriebskräfte setzen also eine Grenze für die Entfernung eines Luftteilchens von seinem Niveau und dadurch auch für die Temperaturunruhe und die Windunruhe. Je kleiner die Stabilität, um so grösser ist diese Grenzentfernung, und um so grösser wird die Windunruhe. Damit wächst aber auch der Austausch und man bekommt eine noch grössere Windunruhe und eine grössere Temperaturunruhe. Bei kleiner Stabilität ist also sowohl die Windunruhe wie die Temperaturunruhe gross, während beide klein sind bei stabiler Schichtung.

## VI. Weitere Diskussion der Reibung.

22. Wir wissen jetzt, dass die molekulare Reibung trotz der auftretenden grossen Geschwindigkeitsascendenten nur sehr langsam die Bewegung eines Luftteilchens ändern kann. In gleicher Weise wird die potentielle Temperatur eines Luftteilchens trotz eines grossen lokalen Temperaturgefälles nur sehr langsam durch Leitung an die umgebenden Partikeln geändert.

Von diesen Kenntnissen ausgehend können wir leicht andere Ausdrücke für die Reibungskoeffizienten  $\eta$  und  $\nu$  finden.

Einfachheitshalber werden wir nur den Transport von Bewegungsgrösse suchen, der durch eine angenähert horizontale Stromfläche  $\sigma$  der ausgeglichenen Bewegung geht. Wir setzen weiter voraus, dass die ausgeglichene Geschwindigkeit  $v$  ohne Richtungsänderung linear mit der Höhe zunimmt (Vergleich Abschnitt 3—4).

Es strömt dann durch die Fläche  $\sigma$  dasselbe Volumen Luft:

$$\frac{\sigma}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t$$

in der Zeit von  $t_0$  bis  $t_0 + \Delta t$  nach oben wie nach unten.

Da die Reibung nur sehr langsam die Bewegung der Luftteilchen ändert, werden diese fast mit derselben mittleren Geschwindigkeit, wie sie zu der Zeit  $t_0$  hatten, durch die Fläche  $\sigma$  gehen.

Zur Zeit  $t_0$  lagen indessen die nach unten strömenden Luftmassen in einer mittleren Höhe:

$$\frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t$$

über der Fläche  $\sigma$  und hatten dann die mittlere Geschwindigkeit:

$$v + \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \frac{\partial v}{\partial n},$$

und diese mittlere Geschwindigkeit führen die Luftmassen mit sich durch die Fläche  $\sigma$ . Entsprechend findet man für die mittlere Geschwindigkeit der aufsteigenden Teilchen:

$$v - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Da der Einfluss der Wärmeleitung während der kurzen Zeit  $\Delta t$  zu vernachlässigen ist, so bekommt man entsprechend für die absteigenden Partikelchen eine mittlere Temperatur:

$$\vartheta + \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t (\gamma' - \gamma).$$

Die mittlere Dichte dieser Partikeln wird:

$$\varrho - \frac{\varrho}{g} \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t (\gamma' - \gamma) = \varrho \left( 1 - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t S \right).$$

Für die mittlere Dichte der aufsteigenden Luftteilchen findet man in gleicher Weise:

$$\varrho \left( 1 + \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t S \right).$$

Für die Bewegungsgrösse  $dB'$ , die in der Zeit  $\Delta t$  durch die Fläche  $\sigma$  nach unten geht, bekommen wir:

$$\begin{aligned} dB' &= \frac{\sigma}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \left( \varrho - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t S \right) \left( v + \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \frac{\partial v}{\partial n} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \left( \varrho + \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t S \right) \left( v - \frac{1}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \frac{\partial v}{\partial n} \right) \\ &= \frac{\sigma}{2} \overline{\Delta v_n} \Delta t \left( \varrho \overline{\Delta v_n} \Delta t \frac{\partial v}{\partial n} - v \varrho \overline{\Delta v_n} \Delta t S \right). \end{aligned}$$

Pro Zeit- und Flächeneinheit strömt also eine Bewegungsgrösse:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \varrho \overline{\Delta v_n} l_1 \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{2} \varrho \overline{\Delta v_n} l_1 S v$$

nach unten durch die Fläche  $\sigma$ . Die mittlere vertikale Weglänge pro Sekunde ist hier mit  $l_1$  bezeichnet.

Indem wir diese Formel mit Gleichung (1) (S. 6):

$$\frac{dB}{dt} = \varrho \overline{\Delta v_n} \delta v - \overline{\Delta v_n} \delta \varrho v$$

vergleichen, sehen wir, dass:

$$\begin{aligned} \varrho \overline{\Delta v_n} \delta v &= \frac{1}{2} \varrho \overline{\Delta v_n} l_1 \frac{\partial v}{\partial n}, \\ \overline{\Delta v_n} \delta \varrho &= \frac{1}{2} \varrho \overline{\Delta v_n} l_1 S, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \delta v &= \frac{1}{2} l_1 \frac{\partial v}{\partial n}, \\ \delta \varrho &= \frac{1}{2} \varrho l_1 S. \end{aligned}$$

Vergleichen wir jetzt diese Gleichungen mit den Formeln (8), (9) und (14) (S. 13, 14 u. 15) sehen wir, dass:

$$(24) \quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{2} \varrho \overline{\Delta v_n} l_1, \\ \nu = -\eta S, \end{cases}$$

und die Reibungskraft wird:

$$R = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \eta S v.$$

Das erste Glied hat hier die Grössenordnung  $10^{-7}$  bis  $10^{-6}$ , während das zweite Glied von der Grössenordnung  $10^{-9}$  bis  $10^{-8}$  ist. Dieses Glied kann deshalb ausser Betracht gelassen werden, und man erhält mit befriedigender Genauigkeit:

$$(25) \quad R = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

eine Formel, die schon im Jahre 1915 aufgestellt worden ist\*) und jetzt allgemein verwendet wird.

23. Mit Hilfe der Gleichung (24) kann man die Grössenordnung von  $\eta$  finden, denn wir haben ja:

$$\text{Magn. } \overline{\Delta v} = 10^0 \text{ bis } 10^1.$$

Es wird dann:

$$\text{Magn. } \overline{\Delta v} l_1 = 10^0 \text{ bis } 10^1,$$

und:

$$\text{Magn. } \eta = 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2}.$$

Diese Grössenordnung ist genau die gleiche, die auch nach verschiedenen anderen Methoden gefunden worden ist.

25. Nach Gleichung (24) ist der Reibungskoeffizient  $\eta$  mit dem Quadrat der vertikalen Windunruhe proportional. Nach den Untersuchungen von Taylor und Robitsch hat man (vergl. Abschnitt 7):

$$\overline{\Delta v_x^2} = \overline{\Delta v_y^2} = \overline{\Delta v_z^2} = c v^2.$$

Wir haben indessen gesehen, dass  $\overline{\Delta v}$  auch eine Funktion der Stabilität ist, indem die Windunruhe um so grösser ist, je kleiner die Stabilität ist. Bei kleiner Stabilität ist indessen auch die Windgeschwindigkeit am Erdboden gross. Die kleine Stabilität wird also gleichzeitig grosse Windunruhe und grosse Windgeschwindigkeiten zur Folge haben. Es ist deshalb nicht sicher, dass obige Gleichung zwischen  $\overline{\Delta v}$  und  $v$  von den Einfluss der Stabilität frei ist.

Was wir für eine weitere Diskussion von  $\eta$  haben müssten, wäre eine Untersuchung von  $\overline{\Delta v}$  als Funktion von der Geschwindigkeit und der Stabilität. Wenn man eine solche Funktion hat:

$$\overline{\Delta v} = f(v \cdot S),$$

so wird:

$$|\eta| = \left| \frac{1}{2} \rho [f(v \cdot S)]^2 \right|.$$

Leider habe ich kein Material, um diese Untersuchung auszuführen.

\*) Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup: Die Reibung in der Atmosphäre. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Zweite Serie. Bd. I. H. 10. S. 278.