MÖGLICHE LUFTBEWEGUNGEN AN DER ERDOBERFLÄCHE

VON

TH. HESSELBERG

(Eingeliefert am 21. Juni 1924)

Es ist eine ausserordentlich schwierige Aufgabe räumliche Luftbewegungen theoretisch aufzustellen, die physikalisch möglich sind. Ausser den Bewegungsgleichungen müssen nämlich auch die Kontinuitätsgleichung, die Zustandsgleichung und die Sätze der mechanischen Wärmetheorie erfüllt sein. Die Aufgabe ist vor kurzem von A. Friedmann in Angriff genommen worden*).

Ich werde mich im folgenden darauf beschränken, diejenige Bedingungen zu behandeln, welche Luftbewegungen an der Erdoberfläche erfüllen müssen, um physikalisch möglich zu sein. Diese Aufgabe bietet bei weitem nicht die Schwierigkeiten des allgemeinen Problems.

Die Bewegungsgleichungen und die Wirbelgleichungen. — Für die atmosphärischen Bewegungen können die Bewegungsgleichungen in folgender Form geschrieben werden:

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda v_y + \alpha R_x\,, \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - \lambda v_x + \alpha R_y\,, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + \nu v_x + \alpha R_z - g\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Dabei ist:

v_x = horizontale Geschwindigkeitskomponente längs der X-Achse.
v_y = horizontale Geschwindigkeitskomponente längs der Y-Achse.
v_z = vertikale Geschwindigkeitskomponente.
t = Zeit.
α = spezifisches Volumen.
p = Luftdruck.
$\lambda = 2\omega' \sin \varphi'$.
$\nu = 2\omega' \cos \varphi'$.

---

*) *A. Friedmann:* Théorie du mouvement d'un fluide compressible et ses applications aux mouvements de l'atmosphère. Die Abhandlung wird in kurzer Zeit in der schwedischen Publikation «Geografiska Annaler» erscheinen.

ω' = Rotationsgeschwindigkeit der Erde.
φ' = geographische Breite.
R_x, R_y, R_z = Komponenten der Reibungskraft pro Volumeneinheit.
g = Beschleunigung der Schwere.

Wenn man durch kreuzweise Derivation die Gradientkräfte eliminiert, so erhält man:

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_x\,\theta_x + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\dfrac{\partial v_z}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial z}\dfrac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\lambda\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \nu\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\,(\alpha R_y)}{\partial z} - \dfrac{\partial\,(\alpha R_z)}{\partial y}\right) = 0, \\
\dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_y\,\theta_y + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\dfrac{\partial v_x}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\lambda\dfrac{\partial v_y}{\partial z} - \nu\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right) \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\,(\alpha R_z)}{\partial x} - \dfrac{\partial\,(\alpha R_x)}{\partial z}\right) = 0, \\
\dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_z\,\theta_z + \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\dfrac{\partial v_y}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right) + \lambda\,\theta_z \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\,(\alpha R_x)}{\partial y} - \dfrac{\partial\,(\alpha R_y)}{\partial x}\right) = 0,
\end{cases}
$$

wo:

$$
(3)\quad \begin{array}{lll}
\omega_x = \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}, & \omega_y = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}, & \omega_z = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}, \\
\theta_x = \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}, & \theta_y = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \dfrac{\partial v_x}{\partial x}, & \theta_z = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y},
\end{array}
$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist also der Wirbel, und θ_x, θ_y, θ_z kann man als die zweidimensionalen Divergenzen bezeichnen.

Die dritte Wirbelgleichung kann bedeutend vereinfacht werden, indem man Glieder vernachlässigt, die klein sind im Vergleich mit den anderen Gliedern. Bestimmt man die Grössenordnung*) der Glieder, so findet man:

$$
\begin{aligned}
\text{Magn.}\,\frac{d\omega_z}{dt} &= 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}, \\
\text{Magn.}\,\omega_z\,\theta_z &= 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}, \\
\text{Magn.}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) &= 10^{-11} \text{ bis } 10^{-10}, \text{ (nahe om Erdboden)}, \\
\text{Magn.}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= 10^{-11} \text{ bis } 10^{-10}, \\
\text{Magn.}\,\lambda\theta_z &= 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Wir werden nicht versuchen, die Grössenordnung der Reibungsglieder zu bestimmen, da wir die Änderungen des Reibungskoeffizienten noch zu wenig kennen.

Indem wir jetzt die kleinen Glieder ausser Betracht lassen, reduziert sich die dritte Wirbelgleichung auf:

$$
\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z\,\theta_z + \lambda\theta_z + \left(\frac{\partial\,(\alpha R_x)}{\partial y} - \frac{\partial\,(\alpha R_y)}{\partial x}\right) = 0.
$$

---

*) Siehe *Th. Hesselberg und A. Friedmann*: Die Grössenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Veröff. des Geoph. Instituts der Universität, Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, S. 148.

Um eine andere Form des Reibungsgliedes zu bekommen, schreiben wir die zwei ersten Bewegungsgleichungen in folgender Form, die für Bewegungen an der Erdoberfläche angenähert verwendet werden kann*):

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + l\, v_y - c\, v_x \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - l\, v_x - c\, v_y
\end{aligned}
\right. \tag{4}
$$

Diese Gleichungen erhält man aus den zwei ersten Gleichungen (1), indem man $v_z = 0$ setzt und:

$$
\begin{aligned}
\alpha R_x &= (l - \lambda)\, v_y - c\, v_x \\
\alpha R_y &= -(l - \lambda)\, v_x - c\, v_y
\end{aligned}
$$

wo l und c Konstanten sind.

Durch Einsetzung dieser Werte von αR_x und αR_y in die reduzierte dritte Wirbelgleichung oder auch direkt durch kreuzweise Derivation der Gleichung (4) bekommen wir:

$$
\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z\, \theta_z + l\, \theta_z + c\, \omega_z = 0 \tag{5}
$$

eine Gleichung, die sich von der oben gefundenen dritten Wirbelgleichung nur dadurch unterscheidet, dass das Reibungsglied eine andere Form hat.

Die allgemeine Bedingung. — Wir nehmen jetzt an, dass wir ein Bewegungsfeld am Erdboden bestimmt haben, das Gleichung (5) erfüllt, und mit Hilfe der Gleichungen (4) dazu entsprechende Felder für p und α am Erdboden. Damit die so bestimmte Bewegung physikalisch möglich sein soll, müssen auch die dritte Bewegungsgleichung (1):

$$
0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g\,,
$$

die Zustandsgleichung:

$$
p\, \alpha = R\, \vartheta\,,
$$

der erste Satz der mechanischen Wärmetheorie:

$$
\varepsilon = c_p \frac{d\vartheta}{dt} - A\, \alpha \frac{dp}{dt}
$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$
\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}
$$

erfüllt werden.

Durch die dritte Bewegungsgleichung wird $\frac{\partial p}{\partial z}$ bestimmt, durch die Zustandsgleichung ϑ, durch den ersten Satz der mechanischen Wärmetheorie ε und durch die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial v_z}{\partial z}$.

*) *Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup:* Die Reibung in der Atmosphäre. Veröff. des Geoph. Instituts der Universität, Leipzig. Zweite Serie, Bd. I, Heft 10, S. 308.

Wir sehen also, dass wir $\frac{\partial p}{\partial z}$, ϑ, ε und $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ so bestimmen können, dass ausser der zwei ersten Bewegungsgleichungen auch die anderen Gleichungen erfüllt werden.

Dadurch wird v_z und p für die Höhe $\triangle z$ bestimmt. Hier haben wir ausser v_z und p die Variable v_x, v_y, α, ϑ und ε und für diese müssen die Bewegungsgleichungen, die Zustandsgleichung, der ersten Satz der mechanischen Wärmetheorie und die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden können. Dieses kann erreicht werden, indem wir nicht nur die Werte in der Höhe $\triangle z$ bestimmen, sondern auch z. B. $\frac{\partial p}{\partial z}$ und $\frac{\partial v_z}{\partial z}$, und somit die Freiheit der Bewegung im nächsten Niveau einschränken. Und in dieser Weise kann man nach oben fortsetzen.

Horizontale Bewegungen, welche Gleichnng (5) erfüllen, sind also mögliche Bewegungen. Andererseits sind horizontale Bewegungen, welche dieser Gleichung nicht angenähert genügen, nicht möglich.

Da wir im folgenden uns nur mit der Bedingungsgleichung (5) beschäftigen werden, wollen wir die Indexe von ω_z und θ_z fortlassen und sie in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\,\theta + l\,\theta + c\,\omega = 0 \tag{6}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \theta &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (4) gefunden worden, indem wir durch kreuzweise Derivation die Gradientkräfte eliminiert haben $\left(\text{indem } \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \text{ gesetzt worden ist}\right)$. Die Gleichung zeigt also die Bedingung für die Möglichkeit ein Druckfeld für das gewählte Bewegungsfeld zu finden.

Dass dieses im allgemeinen nicht möglich ist, wenn man das Bewegungsfeld willkürlich wählt, kann aus folgender einfachen Überlegung ersehen werden.

Die Bewegungsgleichungen (4) können in der Form:

$$\varrho \boldsymbol{j} = \boldsymbol{G} + \varrho\, \boldsymbol{d} + \boldsymbol{R}$$

geschrieben werden, wo die Buchstaben folgende Bedeutung haben:

ϱ = Dichte,
$\boldsymbol{j}$ = individuelle Beschleunigung,
$\boldsymbol{G}$ = Druckgradient,
$\boldsymbol{d}$ = ablenkende Kraft der Erddrehung,
$\boldsymbol{R}$ = Reibungskraft pro Volumeneinheit.

Wählt man ein Bewegungsfeld, so sind damit auch $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{R}$ bestimmt. Setzt man dann weiter die Bedingung, dass z. B. das Bewegungsfeld ohne Änderungen fortschreiten soll, so ist auch die Beschleunigung $\boldsymbol{j}$ bestimmt. Dann ist aber auch $\boldsymbol{G}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\boldsymbol{G} = \varrho \boldsymbol{j} - \varrho\, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{R}.$$

Die Vektoren auf der rechten Seite sind Vektoren allgemeiner Art, und es wird dann, wenn das Bewegungsfeld im voraus gewählt worden ist, ein reiner Zufall sein, ob sie zusammen einen potentiellen Vektor wie den Vektor G bilden. Mit anderen Worten: es ist im allgemeinen nicht möglich ein Druckfeld für ein willkürlich gewähltes Bewegungsfeld zu finden.

Wenn man aber das Bewegungsfeld so wählt, dass Gleichung (6) erfüllt wird, so gibt es ein Druckfeld für das Bewegungsfeld.

Die beiden Wege, um Integrale der Bewegungsgleichungen zu finden. — Das gewöhnliche Verfahren ist, ein Druckfeld zu wählen und dann durch Integration der Bewegungsgleichungen (4) die Bewegung zu finden.

Dieses ist aber sehr schwierig und man gelangt einfacher zum Ziele durch das umgekehrte Verfahren. Man bestimmt eine Bewegung, welche die Wirbelgleichung (6):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\,\theta + l\,\theta + c\,\omega = 0$$

erfüllt. Nachher kann man dann für den Fall $\alpha =$ Konst. ohne Schwierigkeiten das Druckfeld finden. Werden nämlich die Bewegungsgleichungen (4) auf $-\alpha \frac{\partial p}{\partial x}$ und $-\alpha \frac{\partial p}{\partial y}$ aufgelöst, so hat man:

$$\left\{ \begin{aligned} -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - l\,v_y + c\,v_x\,, \\ -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + l\,v_x + c\,v_y\,. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Durch Integration dieser Gleichungen kann dann das Druckfeld bestimmt werden, weil die Ausdrücke auf der rechten Seite infolge Gleichung (6) die Derivierte von einer Funktion in Bezug auf x und y sind.

Der Fall, dass α variabel ist. — Man hat dann:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial(\alpha p)}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$
$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial(\alpha p)}{\partial y} + p \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Wenn man die Grössenordnung der Glieder untersucht, findet man, dass die Glieder $p \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ und $p \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ ebenso gross sind wie die anderen Glieder dieser Gleichungen. Es ist also nicht erlaubt $\alpha \frac{\partial p}{\partial x}$ mit $\frac{\partial(\alpha p)}{\partial x}$ und $\alpha \frac{\partial p}{\partial y}$ mit $\frac{\partial(\alpha p)}{\partial y}$ zu identifizieren, und somit eine Integration der Gleichungen (8) zu erlangen.

Man kann aber in anderer Weise eine angenäherte Integration ausführen. Nennen wir die Ausdrücke auf der rechten Seite in den Gleichungen (8) F_x und F_y, so hat man:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = F_x\,, \qquad -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} = F_y\,,$$

wo infolge Gleichung (6) F_x und F_y die Derivierte einer Funktion in Bezug auf x und y ist. Also ist:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Wir haben nun weiter:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a} F_x, \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a} F_y,$$

und werden untersuchen, mit welcher Genauigkeit die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichung die Derivierte einer Funktion in Bezug auf x und y sind.

Wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a} F_x\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a} F_y\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right) - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} F_x \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{1}{a} F_y \frac{\partial a}{\partial x}\right),$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a} F_x\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a} F_y\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}\right).$$

Wenn man die Glieder dieser Gleichung untersucht, findet man die Grössenordnungen:

$$\text{Magn.}\, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a} F_x\right) = \text{Magn.}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a} F_y\right) = 10^{-12} \text{ bis } 10^{-11},$$

$$\text{Magn.}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right) = \text{Magn.}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}\right) = 10^{-14} \text{ bis } 10^{-13}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a} F_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a} F_y\right)$$

ist also mit guter Annäherung erfüllt.

Man kann deshalb für den Fall, dass a nicht konstant, sondern als eine Funktion $a\,(x, y, t)$ gegeben ist, eine angenäherte Integration der Gleichungen (8) erlangen, indem man erst die Gleichungen mit a dividiert und demnach die Integration ausführt.

Der Einfachheit halber werden wir uns aber darauf beschränken den Fall $a =$ Konst. zu behandeln. Es sollen ein paar Spezialfälle untersucht werden.

Das Bewegungsfeld soll sich ohne Änderungen längs der Erdoberfläche fortbewegen. — Das Bewegungsfeld soll sich mit einer Geschwindigkeit v_0 längs der positiven X-Achse fortpflanzen. Man hat dann:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

und die Bedingungsgleichung (6) wird:

$$(v_x - v_0)\frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\,\theta + l\,\theta + c\,\omega = 0\,. \tag{9}$$

Wenn man eine Bewegung gefunden hat, welche diese Gleichung erfüllt, so findet man das Druckfeld durch die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} -a\dfrac{\partial p}{\partial x} = (v_x - v_0)\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} - l\,v_y + c\,v_x\,, \\ -a\dfrac{\partial p}{\partial y} = (v_x - v_0)\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + l\,v_x + c\,v_y\,. \end{cases}$$

Ein rotatorisches Bewegungsfeld, das von einem durchgehenden Strom mitgeführt wird. — Wir stellen jetzt die spezialisierende Bedingung auf, dass das Bewegungsfeld, das sich ohne Änderungen längs der Erdoberfläche fortbewegt, aus zwei Teilen bestehen soll:

(a) einem rotatorischen, wobei die radiale und die zirkulare Geschwindigkeit nur Funktion des Radius Vektors von Origo ist.

(b) einem translatorischen, wobei die Geschwindigkeit gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Systems ist.

Wird die radiale Komponente des rotatorischen Feldes $\varphi(r)$ genannt und die rotatorische $\psi(r)$, so hat man (siehe Fig. 1):

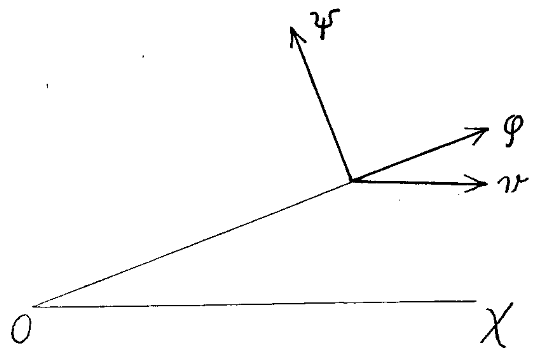

Fig. 1.

$$(11)\quad \begin{cases} v_x = \varphi(r)\dfrac{x}{r} - \psi(r)\dfrac{y}{r} + v_0\,, \\ v_y = \psi(r)\dfrac{x}{r} + \varphi(r)\dfrac{y}{r}\,. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \varphi'(r)\frac{x^2}{r^2} + \varphi(r)\frac{y^2}{r^3} - \psi'(r)\frac{xy}{r^2} + \psi(r)\frac{xy}{r^3}\,,$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \varphi'(r)\frac{xy}{r^2} - \varphi(r)\frac{xy}{r^3} - \psi'(r)\frac{y^2}{r^2} - \psi(r)\frac{x^2}{r^3}\,,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \varphi'(r)\frac{xy}{r^2} - \varphi(r)\frac{xy}{r^3} + \psi'(r)\frac{x^2}{r^2} + \psi(r)\frac{y^2}{r^3}\,,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \varphi'(r)\frac{y^2}{r^2} + \varphi(r)\frac{x^2}{r^3} + \psi'(r)\frac{xy}{r^2} - \psi(r)\frac{xy}{r^3}\,,$$

Hieraus findet man dann weiter:

$$(12)\quad \begin{cases} \theta = \varphi'(r) + \dfrac{1}{r}\varphi(r)\,, \\ \omega = \psi'(r) + \dfrac{1}{r}\psi(r)\,. \end{cases}$$

Ferner wird:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \psi''(r)\frac{x}{r} + \psi'(r)\frac{x}{r^2} - \psi(r)\frac{x}{r^3},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \psi''(r)\frac{y}{r} + \psi'(r)\frac{y}{r^2} - \psi(r)\frac{y}{r^3}.$$

Mit Hilfe einiger Rechnung findet man demnach:

$$(v_x - v_0)\frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y\frac{\partial \omega}{\partial y} = \varphi(r)\left[\psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r) - \frac{1}{r^2}\psi(r)\right].$$

Durch Einsetzung der gefundenen Ausdrücke in Gleichung (9) findet man ferner:

$$\varphi(r)\left[\psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r) - \frac{1}{r^2}\psi(r)\right] + \left[\varphi'(r) + \frac{1}{r}\varphi(r)\right]\left[\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r)\right]$$
$$+ l\left[\varphi'(r) + \frac{1}{r}\varphi(r)\right] + c\left[\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r)\right] = 0,$$

oder:

$$\left[\varphi(r)\psi''(r) + \varphi'(r)\psi'(r) + \frac{1}{r}\varphi(r)\psi'(r)\right] + \frac{1}{r}[\varphi'(r)\psi(r) + \varphi(r)\psi'(r)]$$
$$+ l\left[\varphi'(r) + \frac{1}{r}\varphi(r)\right] + c\left[\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r)\right] = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit r, so werden alle Glieder vollständige Differentiale. Man bekommt:

$$[\varphi(r)\psi''(r)r + \varphi'(r)\psi'(r)r + \varphi(r)\psi'(r)] + [\varphi'(r)\psi(r) + \varphi(r)\psi'(r)]$$
$$+ l[\varphi'(r)r + \varphi(r)] + c[\psi'(r)r + \psi(r)] = 0,$$

oder:

$$\frac{d}{dr}[\varphi(r)\psi'(r)r] + \frac{d}{dr}[\varphi(r)\psi(r)] + l\frac{d}{dr}[\varphi(r)r] + c\frac{d}{dr}[\psi(r)r] = 0.$$

Durch Integration bekommt man endlich:

$$\varphi(r)\psi'(r)r + \varphi(r)\psi(r) + l\varphi(r)r + c\psi(r)r = C. \tag{13}$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein, damit ein Druckfeld für das Bewegungsfeld gefunden werden kann, das durch die Gleichungen (11) definiert ist.

Wie man sieht, geht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht in diese Bedingungsgleichung hinein. Man kann deshalb stationäre rotatorische Bewegungen suchen und ihnen nachher durch Addition eines translatorischen Feldes irgend eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit geben.

Um nunmehr das Druckfeld für die Bewegung zu finden, welche durch die Gleichungen (11) gegeben ist, brauchen wir die Gleichungen (10):

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial x} = (v_x - v_0)\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - l v_y + c v_x,$$
$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial y} = (v_x - v_0)\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + l v_x + c v_y,$$

indem wir die gefundenen Werte von $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ einsetzen.

Wir erhalten dann:

$$
\begin{aligned}
-a\frac{\partial p}{\partial x} &= \varphi(r)\,\varphi'(r)\frac{x}{r} - \varphi(r)\,\psi'(r)\frac{y}{r} - \varphi(r)\,\psi(r)\frac{y}{r^2} - \psi(r)\,\psi(r)\frac{x}{r^2} - l\,\varphi(r)\frac{y}{r}\\
&\quad - l\,\psi(r)\frac{x}{r} + c\,\varphi(r)\frac{x}{r} - c\,\psi(r)\frac{y}{r} + c\,v_0\,,\\
-a\frac{\partial p}{\partial y} &= \varphi(r)\,\varphi'(r)\frac{y}{r} + \varphi(r)\,\psi'(r)\frac{x}{r} + \varphi(r)\,\psi(r)\frac{x}{r^2} - \psi(r)\,\psi(r)\frac{y}{r^2} + l\,\varphi(r)\frac{x}{r}\\
&\quad - l\,\psi(r)\frac{y}{r} + c\,\varphi(r)\frac{y}{r} + c\,\psi(r)\frac{x}{r} + l\,v_0\,.
\end{aligned}
$$

Durch Benutzung der Gleichung (13) reduzierten sich diese Gleichungen auf:

$$
\begin{aligned}
-a\frac{\partial p}{\partial x} &= \left[\varphi(r)\,\varphi'(r) - \frac{1}{r}\,\psi(r)\,\psi(r) - l\,\psi(r) + c\,\varphi(r)\right]\frac{x}{r} - C\frac{y}{r^2} + c\,v_0\,,\\
-a\frac{\partial p}{\partial y} &= \left[\varphi(r)\,\varphi'(r) - \frac{1}{r}\,\psi(r)\,\psi(r) - l\,\psi(r) + c\,\varphi(r)\right]\frac{y}{r} + C\frac{x}{r^2} + l\,v_0\,.
\end{aligned}
$$

Das erste Glied dieser Gleichungen gibt ein Druckfeld, wo der Gradient längs dem Radius Vektor fällt, das dritte Glied ein geradliniges Druckfeld. Das zweite Glied gibt dagegen ein Druckfeld, wo der Gradient senkrecht zum Radius Vektor steht. Dieses ist indessen unmöglich, da der Luftdruck nicht mehrere Werte in demselben Punkt haben kann. Man muss deshalb:

$$C = 0$$

setzen und bekommt statt Gleichung (13) die Bedingungsgleichung:

$$\varphi(r)\,\psi'(r) + \frac{1}{r}\,\varphi(r)\,\psi(r) + l\,\varphi(r) + c\,\psi(r) = 0\,. \tag{14}$$

Für das Druckfeld bekommt man dann:

$$
\begin{aligned}
-a\frac{\partial p}{\partial x} &= \left[\varphi(r)\,\varphi'(r) - \frac{1}{r}\,\psi(r)\,\psi(r) - l\,\psi(r) + c\,\varphi(r)\right]\frac{x}{r} + c\,v_0\,,\\
-a\frac{\partial p}{\partial y} &= \left[\varphi(r)\,\varphi'(r) - \frac{1}{r}\,\psi(r)\,\psi(r) - l\,\psi(r) + c\,\varphi(r)\right]\frac{y}{r} + l\,v_0\,.
\end{aligned}
$$

Setzen wir jetzt:

$$p = p_1 + p_2\,, \tag{15}$$

so kann man setzen:

$$
\left\{
\begin{aligned}
-a\frac{dp_1}{dr} &= \varphi(r)\,\varphi'(r) - \frac{1}{r}\,\psi(r)\,\psi(r) - l\,\psi(r) + c\,\varphi(r)\,,\\
-a\,p_2 &= C_2 + c\,v_0\,x + l\,v_0\,y\,.
\end{aligned}
\right. \tag{16}
$$

Durch diese Gleichungen kann der Luftdruck bestimmt werden, wenn die Funktionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ gegeben sind.

Um mögliche rotatorische Bewegungen der behandelten Art zu finden, kann man jetzt in folgender Weise verfahren.

Man wählt eine Funktion $\psi(r)$ und kann dann mit Hilfe von Gleichung (14) die Funktion $\varphi(r)$ finden. Man hat:

$$\varphi(r) = -\frac{c\,\psi(r)}{\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r) + l}. \tag{17}$$

Durch Einsetzen der Funktionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ in Gleichung (11) findet man dann das Bewegungsfeld und durch Einsetzen in Gleichung (16) das Druckfeld.

Beispiele. — Es sollen schliesslich einige Beispiele gegeben werden, um die Verwendung der gefundenen Gleichungen zu zeigen.

Beispiel 1.

Man wählt ein Bewegungsfeld:

$$v_x = v_{x \cdot 0} + a\,t\,,$$

$$v_y = v_{y \cdot 0} + b\,t\,,$$

wo $v_{x \cdot 0}$, $v_{y \cdot 0}$, a und b Konstanten sind.

Man hat hier $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$. Folglich ist $\omega = \theta = 0$, und die Bedingungsgleichung (6) ist identisch erfüllt.

Weiter ist:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = a\,, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = b\,,$$

und man erhält nach Gleichung (8):

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial x} = a - l\,(v_{y \cdot 0} + b\,t) + c\,(v_{x \cdot 0} + a\,t)\,,$$

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial y} = b + l\,(v_{x \cdot 0} + a\,t) + c\,(v_{y \cdot 0} + b\,t)\,.$$

Durch Integration findet man:

$$p = p_1 + p_2\,,$$

wobei

$$-\alpha\,p_1 = [-\,l\,(v_{y \cdot 0} + b\,t) + c\,(v_{x \cdot 0} + a\,t)]\,x + [l\,(v_{x \cdot 0} + a\,t) + c\,(v_{y \cdot 0} + b\,t)]\,y + C\,,$$

$$-\alpha\,p_2 = a\,x + b\,y$$

ist.

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass man sich das Druckfeld aus zwei Teilen bestehend denken kann, einen Teil, der von dem augenblicklichen Wind abhängig ist, und einen Teil der von der Änderung des Windes abhängt. Wegen der Änderung des Windes tritt eine Zusatzgradientkraft auf, die gleich $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ ist.

Sei die Gradientkraft $= \alpha\,\boldsymbol{G}_1$ für den Fall, dass der Wind sich nicht ändert, so ist sie bei veränderlichem Wind

$$\alpha\,\boldsymbol{G}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}.$$

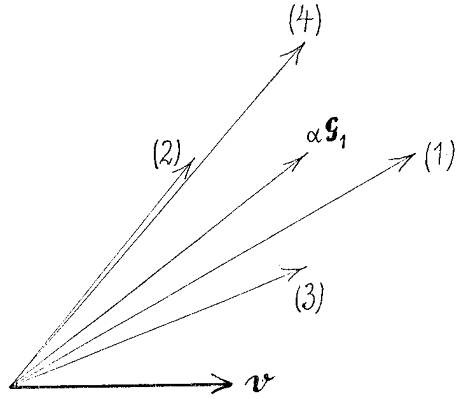

Fig. 2.

Aus dieser Gleichung ersieht man (vergl. Fig. 2):

(1) Grosse Gradientkraft und kleine Ablenkung gibt Windzunahme.
(2) Kleine » » grosse » » Windabnahme.
(3) Kleine » » kleine » » Winddrehung nach rechts.
(4) Grosse » » grosse » » Winddrehung nach links.

Mit Hilfe dieser Regeln kann man aus dem Verhältnis zwischen Wind und Gradient ersehen, wie der Wind sich ändert.

Eine genauere Diskussion dieser Erscheinung habe ich früher gegeben.*)

Beispiel 2.

Wir wählen:

$$v_x = A\,x + B\,y\,,$$
$$v_y = C\,x + D\,y\,,$$

und werden untersuchen, ob die Konstanten A, B, C und D so gewählt werden können, dass eine stationäre Bewegung dieser Art möglich ist.**)

Mit Hilfe der Gleichungen (7) bekommt man:

$$\omega = C - B\,, \qquad \theta = A + D\,.$$

Die Bedingungsgleichung (6) gibt dann:

$$(C - B)(A + D) + l\,(A + D) + c\,(C - B) = 0\,.$$

Durch diese Gleichung ist der vierte Koeffizient bestimmt, wenn die drei anderen gewählt worden sind.

Die Gleichungen (10) geben weiter, indem $v_0 = 0$ gesetzt wird (stationäre Bewegung):

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial x} = (A\,x + B\,y)\,A + (C\,x + D\,y)\,B - l\,(C\,x + D\,y) + c\,(A\,x + B\,y)\,,$$

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial y} = (A\,x + B\,y)\,C + (C\,x + D\,y)\,D + l\,(A\,x + B\,y) + c\,(C\,x + D\,y)\,,$$

*) *Th. Hesselberg:* Über eine Beziehung zwischen Druckgradient, Wind und Gradientenänderung. Veröff des Geoph. Instituts der Universität Leipzig. Zweite Serie, Bd. I, S. 208.

**) Das Bewegungsfeld selbst ist von verschiedenen Verfassern untersucht worden. Siehe z. B. *Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup*: Das Beschleunigungsfeld bei einfachen Luftbewegungen. Veröff. des Geoph. Instituts der Universität Leipzig. Zweite Serie, Bd. I, S. 117.

oder:

$$-a\frac{\partial p}{\partial x} = (A^2 + BC - lC + cA)\,x + (AB + BD - lD + cB)\,y\,,$$
$$-a\frac{\partial p}{\partial y} = (AC + CD + lA + cC)\,x + (D^2 + BC + lB + cD)\,y\,.$$

Die Bedingungsgleichung gibt:

$$AB + BD - lD + cB = AC + CD + lA + cC\,.$$

Wir können deshalb setzen:

$$-a\frac{\partial p}{\partial x} = Px + Qy\,,$$
$$-a\frac{\partial p}{\partial y} = Qx + Ry\,,$$

oder:

$$-ap = \tfrac{1}{2}Px^2 + Qxy + \tfrac{1}{2}Ry^2 + K\,,$$

wo:

$$\begin{aligned} P &= A^2 + BC - lC + cA\,,\\ Q &= AB + BD - lD + cB = AC + CD + lA + cC\,,\\ R &= D^2 + BC + lB + cD\,,\\ K &= \text{Integrationskonstante}. \end{aligned}$$

Beispiel 3.

Wir werden jetzt untersuchen, ob das Bewegungsfeld:

$$v_x = Ax + By\,,$$
$$v_y = Cx + Dy\,,$$

sich ohne Änderungen längs der X-Achse mit einer Geschwindigkeit v_0 fortbewegen kann.

Die Bedingungsgleichung gibt wie im vorhergehenden Beispiel:

$$(C - B)(A + D) + l(A + D) + c(C - B) = 0\,.$$

Weiter geben die Gleichungen (10), indem wir wie im vorhergehenden Beispiel verfahren und den Buchstaben P, Q, R und K dieselbe Bedeutung zukommen lassen:

$$-ap = \tfrac{1}{2}Px^2 + Qxy + \tfrac{1}{2}Ry^2 - v_0 Ax - v_0 Cy + K\,,$$

oder:

$$p = p_1 + p_2\,,$$

wo

$$-ap_1 = \tfrac{1}{2}Px^2 + Qxy + \tfrac{1}{2}Ry^2 + K\,,$$
$$-ap_2 = -v_0(Ax + Cy)$$

ist.

Das Druckfeld kann man sich also aus zwei Teilen bestehend denken, nämlich das Druckfeld im stationären Fall und eine Ebene die um so schräger ist, je schneller die Fortpflanzung vor sich gehen soll.

Das Druckzentrum wird deshalb von Origo und dem Windzentrum verschoben, um so mehr, je schneller die Fortpflanzung vor sich geht.

Ich habe früher diese Verschiebung des Druckzentrums von dem Windzentrum für einen Spezialfall näher diskutiert.*)

Beispiel 4.

Wir wählen:

$$v_x = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y,$$
$$v_y = A' x^2 + 2 B' x y + C' y^2 + 2 D' x + 2 E' y,$$

und werden untersuchen, ob die Konstanten A, B, C, D, E, A', B', C', D', E' so gewählt werden können, dass das Bewegungsfeld sich ohne Änderungen längs der X-Achse mit einer Geschwindigkeit v_0 fortpflanzt.

Wir finden:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2 A x + 2 B y + 2 D, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2 B x + 2 C y + 2 E,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 2 A' x + 2 B' y + 2 D', \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2 B' x + 2 C' y + 2 E'.$$

Weiter wird nach Gleichung (7):

$$\omega = 2(A' - B) x + 2(B' - C) y + 2(D' - E),$$
$$\theta = 2(A + B') x + 2(B + C') y + 2(D + E'),$$

und wir finden:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2(A' - B), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2(B' - C).$$

Werden diese Werte in die Bedingungsgleichung (9) eingeführt, so bekommt man nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned}
&2[A(A' - B) + A'(B' - C) + 2(A' - B)(A + B')] x^2 \\
&+ 4[B(A' - B) + B'(B' - C) + (A + B')(B' - C) + (A' - B)(B + C')] x y \\
&+ 2[C(A' - B) + C'(B' - C) + 2(B' - C)(B + C')] y^2 \\
&+ 2[2 D(A' - B) + 2 D'(B' - C) + 2(A + B')(D' - E) + 2(A' - B)(D + E') \\
&\qquad + l(A + B') + c(A' - B)] x \\
&+ 2[2 E(A' - B) + 2 E'(B' - C) + 2(D' - E)(B + C') + 2(D + E')(B' - C) \\
&\qquad + l(B + C') + c(B' - C)] y \\
&+ [- v_0(A' - B) + 2(D' - E)(D + E') + l(D + E') + c(D' - E)] = 0.
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichung identisch erfüllt werden kann, müssen alle Ausdrücke in den eckigen Paranthesen gleich Null sein. Dieses gibt folgende sechs Bedingungsgleichungen zwischen den 10 Koeffizienten und v_0:

$$\begin{aligned}
A(A' - B) + A'(B' - C) + 2(A' - B)(A + B') &= 0, \\
B(A' - B) + B'(B' - C) + (A + B')(B' - C) + (A' - B)(B + C') &= 0, \\
C(A' - B) + C'(B' - C) + 2(B' - C)(B + C') &= 0, \\
2 D(A' - B) + 2 D'(B' - C) + 2(A + B')(D' - E) + 2(A' - B)(D + E') & \\
+ l(A + B') + c(A' - B) &= 0, \\
2 E(A' - B) + 2 E'(B' - C) + 2(B + C')(D' - E) + 2(B' - C)(D + E') & \\
+ l(B + C') + c(B' - C) &= 0, \\
- v_0(A' - B) + 2(D' - E)(D + E') + l(D + E') + c(D' - E) &= 0.
\end{aligned}$$

*) *Th. Hesselberg*: Über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind im nichtstationären Fall. Veröff. des Geoph. Instituts der Universität Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, S. 175.

Durch Einsetzung in Gleichung (10) bekommt man für das Druckfeld:

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}=Lx^3+Mx^2y+Nxy^2+Oy^3+Px^2+Qxy+Ry^2+Sx+Ty-2v_0D,$$

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{M}{3}x^3+Nx^2y+3Oxy^2+Uy^3+\frac{Q}{2}x^2+2Rxy+Vy^2+Tx+Wy-2v_0D'.$$

wo:

$$L=2A^2+2BA',\quad M=6AA'+6A'B',\quad N=2AC+4B^2+2BC'+4CB',$$
$$O=2BC+2CC',\quad P=6AD+4BD'+2EA'-lA'-cA,$$
$$Q=4AE+8BD+4BE'+4CD'+4EB'-2lB'+2cB,$$
$$R=4BE+2CD+4CE'+2EC'-lC'+cC,\quad S=4D^2+4ED'-2lD'+2cD-2v_0A,$$
$$T=4DE+4EE'-2lE'+2cE-2v_0B,\quad U=2CB'+2C'^2,$$
$$V=4EB'+2CD'+6C'E'+lC+cC',\quad W=4ED'+4E'^2+2lE+2cE'-2v_0B.$$

ist.

Durch Integration findet man:

$$-\alpha p=\frac{L}{4}x^4+\frac{M}{3}x^3y+\frac{N}{2}x^2y^2+Oxy^3+\frac{U}{4}y^4+\frac{P}{3}x^3+\frac{Q}{2}x^2y+Rxy^2+\frac{V}{3}y^3$$
$$+\frac{S}{2}x^2+Txy+\frac{W}{2}y^2-2v_0Dx-2v_0D'y+K,$$

wo K eine Integrationskonstante ist.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_0 geht nicht allein in den Gliedern ersten Grades, sondern auch in den Koeffizienten S, T und W ein.

Das Druckfeld wird also bei geänderten v_0 nicht allein verschoben, sondern auch im allgemeinen geändert.

Beispiel 5.

Wenn in einem Bewegungsfeld:

$$\omega=\theta=0$$

ist, so ist Gleichung (6) identisch erfüllt. Irgend welche Bewegung dieser Art ist also möglich. Wir setzen weiter die Bedingung, dass die Bewegung rotatorisch sein soll, und die Gleichungen (12) geben dann:

$$\varphi'(r)+\frac{1}{r}\varphi(r)=0,$$

$$\psi'(r)+\frac{1}{r}\psi(r)=0.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\varphi=\frac{A}{r},\quad \psi=\frac{B}{r},$$

wo A und B Integrationskonstanten sind.

Das Bewegungsfeld wird demnach (siehe Gleichung 11, S. 9):

$$v_x=A\frac{x}{r^2}-B\frac{y}{r^2},$$

$$v_y=B\frac{x}{r^2}+A\frac{y}{r^2}.$$

Weiter gibt Gleichung (16):

$$-a\frac{dp_1}{dr}=-\frac{A^2}{r^3}-\frac{B^2}{r^3}-\frac{lB}{r}+\frac{cA}{r}.$$

Integration gibt dann:

$$-a\,p_1=\tfrac{1}{2}(A^2+B^2)\frac{1}{r^2}+(c\,A-l\,B)\log\operatorname{nat} r+K.$$

Dieses Bewegungsfeld gibt die von Kobayasi*) behandelte Zyklone. Das Druckfeld ist aber bei Kobayasi nur als:

$$p=R\,G\log\operatorname{nat} r+\text{Konst}$$

angegeben, weil er die Zentrifugalkraft ausser Betracht gelassen hat.

Kobayasi lässt seine Zyklone sich ohne Änderungen durch die Luftschichten am Erdboden fortbewegen.

Dieses ist möglich, weil $\omega=\theta=0$ und die Bedingungsgleichung (6) deshalb identisch erfüllt ist.

Das Druckfeld wird aber nicht dasselbe wie im stationären Fall. Nach Gleichung (10) hat man, wenn das Bewegungsfeld sich mit der Geschwindigkeit v_0 längs der positiven X-Achse fortpflanzt:

$$p=p_1+p_2,$$

wo

$$-a\frac{\partial p_1}{\partial x}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-l\,v_y+c\,v_x,$$
$$-a\frac{\partial p_1}{\partial y}=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+l\,v_x+c\,v_y,$$

und

$$-a\frac{\partial p_2}{\partial x}=-v_0\frac{\partial v_x}{\partial x},$$
$$-a\frac{\partial p_2}{\partial y}=-v_0\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

ist, d. h. man kann sich das Druckfeld aus zwei Teilen bestehend denken, von welchen der eine für den stationären Fall gilt, und der andere von der Fortpflanzung abhängt. Das erste Feld haben wir schon berechnet. Für das zweite bekommen wir:

$$-a\frac{\partial p_2}{\partial x}=-v_0\left(-A\frac{x^2}{r^4}+B\frac{y^2}{r^4}+2B\frac{xy}{r^4}\right),$$
$$-a\frac{\partial p_2}{\partial y}=-v_0\left(-B\frac{x^2}{r^4}+B\frac{y^2}{r^4}-2A\frac{xy}{r^4}\right).$$

Durch Integration findet man:

$$-a\,p_2=v_0\left(B\frac{y}{r^2}-A\frac{x}{r^2}\right),$$

*) *Tatuo Kobayasi*: On the Mechanism of Cyclones and Anticyclones. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. July, 1923.

und das Druckfeld der beweglichen Zyklone wird:

$$-a p = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2)\frac{1}{r^2} + (c A - l B) \log \operatorname{nat} r + \frac{v_0}{r^2}(B y - A x) + K,$$

ein Druckfeld, das nicht mehr zirkular um Origo ist.

Beispiel 6.

Wir wählen:

$$\psi(r) = 100\,(10^{-18} r^3 - 2 \cdot 10^{-12} r^2 + 10^{-6} r)\,.$$

Diese Gleichung gibt $\psi = 0$ für $r = 0$ und $r = 1000$ km. Weiter hat man $\psi_{max} = 14.7$ m/sek für $r = 300$ km.

Setzen wir weiter $c = 10^{-4}$ und $l = 10^{-4}$, so gibt Gleichung (17):

$$\varphi(r) = -100\,\frac{10^{-18} r^3 - 2 \cdot 10^{-12} r^2 + 10^{-6} r}{4 \cdot 10^{-12} r^2 - 6 \cdot 10^{-6} r + 3}\,.$$

Gleichung (11) gibt dann für das Windfeld:

$$v_x = -100\,(10^{-12} r^2 - 2 \cdot 10^{-6} r + 1)\left[\frac{10^{-6} x}{4 \cdot 10^{-12} r^2 - 6 \cdot 10^{-6} r + 3} + 10^{-6} y\right] + v_0\,,$$

$$v_y = 100\,(10^{-12} r^2 - 2 \cdot 10^{-6} r + 1)\left[10^{-6} x - \frac{10^{-6} y}{4 \cdot 10^{-12} r^2 - 6 \cdot 10^{-6} r + 3}\right].$$

Mit Hilfe der Gleichungen (15) und (16) kann demnach das Druckfeld bestimmt werden. Da dieses viel Rechnen verursachen würde, habe ich ein graphisches Verfahren benutzt.

In Fig. 3 und 4 sind Lösungen graphisch dargestellt für einestationäre Zyklone und eine Zyklone, die sich mit einem Strom von 4 m/sek. fortbewegt. Die dünnen Linien sind Isobaren (Druck in mbar), die dicken Linien mit Pfeilspitzen sind Stromlinien und die dicken Linien ohne Pfeilspitze sind Kurven gleicher Geschwindigkeit (in m/sek.).

Es ist in Fig. 4 auffallend, dass die Zyklone so kräftig deformiert ist, selbst bei dem relativ schwachen durchgehenden Strom von 4 m/sek. Unsere Zyklonen scheinen sich mehr dem Typ zu nähern, der im Beispiel 3 beschrieben worden ist und der sich ohne einen durchgehenden Strom fortbewegt.

Beispiel 7.

Um eine Zyklone zu behandeln, die sich an Ort und Stelle ändert, z. B. vertieft, lassen wir $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ in den Gleichungen (11) nicht allein Funktionen von r, sondern auch von t sein. Wir wählen also:

$$(18)\qquad \begin{cases} v_x = \varphi(r \cdot t)\,\dfrac{x}{r} - \psi(r \cdot t)\,\dfrac{y}{r}\,, \\[2ex] v_y = \psi(r \cdot t)\,\dfrac{x}{r} + \varphi(r \cdot t)\,\dfrac{y}{r}\,. \end{cases}$$

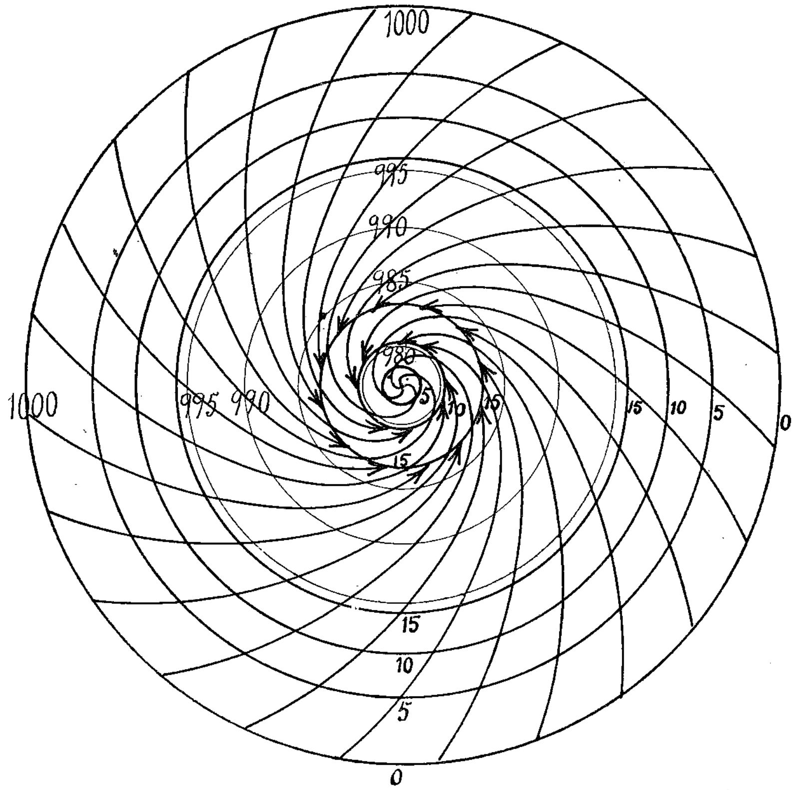
1000
995
990
985
980
5
10
15
1000
995
990
15
10
5
0
15
10
5
0

Fig. 3.

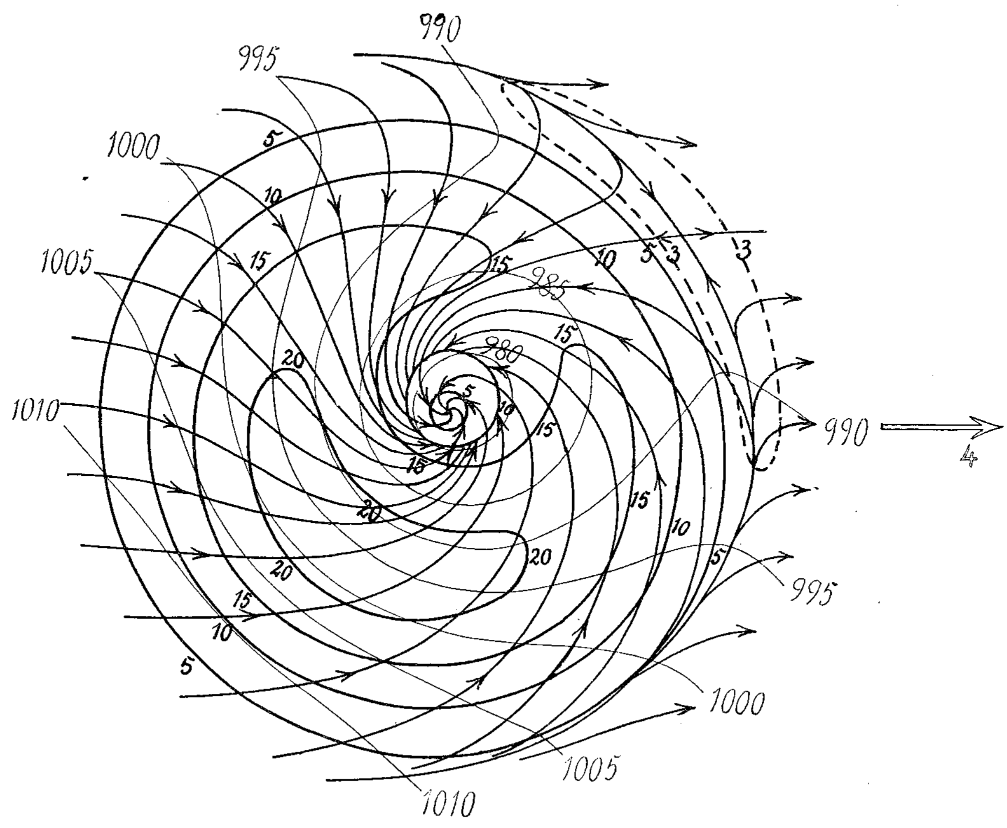
990
995
1000
1005
1010
5
10
15
20
985
980
3
990
4
995
1000
1005
1010

Fig. 4.

Aus diesen Gleichungen finden wir entsprechend Gleichung (12):

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\varphi ,$$

$$\omega = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi .$$

Wir haben dann:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right).$$

Weiter wie früher:

$$v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \varphi\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\psi\right),$$

und die Bedingungsgleichung (6) gibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right) + \varphi\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\psi\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\varphi\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right)$$
$$+ l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\varphi\right) + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right) = 0 .$$

Wie vorher werden die Glieder in folgender Weise geordnet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right) + \left(\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\psi + \frac{\partial \psi}{\partial r}\varphi\right)$$
$$+ l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\varphi\right) + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi\right) = 0 .$$

Multiplikation mit r gibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}r + \psi\right) + \left(\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}r + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r}r + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\psi + \frac{\partial \psi}{\partial r}\varphi\right)$$
$$+ l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}r + \varphi\right) + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}r + \psi\right) = 0 ,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\psi r)\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}r\right) + \frac{\partial}{\partial r}(\varphi\,\psi) + l\frac{\partial}{\partial r}(r\,\varphi) + c\frac{\partial}{\partial r}(r\,\psi) = 0 ,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}r + \varphi\,\psi + l\,r\,\varphi + c\,r\,\psi\right) = 0 .$$

Integration gibt:

$$r\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}r + \varphi\,\psi + l\,r\,\varphi + c\,r\,\psi = C(t) ,$$

eine Gleichung, die sich von Gleichung (13) nur dadurch unterscheidet, dass das Glied $r\frac{\partial \psi}{\partial t}$ auf der linken Seite auftritt und dass auf der rechten Seite eine Funktion von t statt einer Integrationskonstante auftritt.

Mit Hilfe der Gleichungen (8) finden wir weiter:

$$-a\frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\psi^2-l\psi+c\varphi\right)\frac{x}{r}-C(t)\frac{y}{r^2},$$
$$-a\frac{\partial p}{\partial y}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\psi^2-l\psi+c\varphi\right)\frac{y}{r}+C(t)\frac{x}{r^2}.$$

Das erste Glied dieser Gleichungen gibt ein Druckfeld, wo der Gradient längs dem Radius Vektor fällt. Das zweite gibt ein Druckfeld, das senkrecht zum Radius Vektor verlaüft, also ein Feld, das in der Natur nicht vorkommen kann. Man hat deshalb:

$$C(t)=0,$$

und folglich für das Druckfeld:

$$(19)\qquad -a\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\psi^2-l\psi+c\varphi,$$

und für das Bewegungsfeld:

$$(20)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\varphi\psi+l\varphi+c\psi=0.$$

Wird diese Gleichung nach φ aufgelöst, so erhalten wir:

$$(21)\qquad \varphi=-\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+c\psi}{\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\psi+l}.$$

Wenn man eine Funktion ψ von r und t gewählt hat, so kann man mit Hilfe von Gleichung (21) φ bestimmen. Dann ist das Bewegungsfeld durch die Gleichungen (18) gegeben. Weiter findet man das Druckfeld durch Integration der Gleichung (19).

Wir wählen z. B.:

$$\psi=a(1+bt)r.$$

Hieraus hat man:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=a(1+bt),\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=abr.$$

Gleichung (21) gibt dann:

$$\varphi=-a\frac{b+c(1+bt)}{l+2a(1+bt)}r.$$

Die Gleichungen (18) geben demnach das Bewegungsfeld:

$$v_x=-a\frac{b+c(1+bt)}{l+2a(1+bt)}x-a(1+bt)y,$$
$$v_y=a(1+bt)x-a\frac{b+c(1+bt)}{l+2a(1+bt)}y.$$

Für dieses Bewegungsfeld findet man:

$$\omega = 2a(1 + bt),$$
$$\theta = -2a\frac{b + c(1 + bt)}{l + 2a(1 + bt)}.$$

Der Wirbel nimmt also proportional mit der Zeit zu.

Für das Druckfeld gibt Gleichung (19):

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial r} = \left[ab\frac{2ab - lc}{[l + 2a(1 + bt)]^2} + a^2\left(\frac{b + c(1 + bt)}{l + 2a(1 + bt)}\right)^2 + a^2(1 + bt)^2 - al(1 + bt) - ac\frac{b + c(1 + bt)}{l + 2a(1 + bt)}\right]r.$$

Integration gibt:

$$-\alpha p = \tfrac{1}{2}Qr^2 + C,$$

wo Q der Ausdruck in den eckigen Klammern ist und C eine Integrationskonstante.

Für den Zeitpunkt $t = 0$ haben wir:

$$\psi = ar,$$
$$\varphi = -a\frac{b + c}{l + 2a}r,$$

Ist β der Ablenkungswinkel zwischen Wind und Gradient oder zwischen dem Wind und dem Radius Vektor, so ist für $t = 0$:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\psi}{\varphi} = \frac{l + 2a}{b + c},$$

Wenn die Zyklone sich vertieft (b positiv), ist also der Ablenkungswinkel im inneren Gebiet klein, während er gross ist, wenn die Zyklone sich ausfüllt. Für $b + c < 0$ ist er sogar grösser wie 90° (Auge der Zyklone).

Schlussbemerkung. Durch die einfachen Beispiele, die oben gegeben worden sind, hoffe ich gezeigt zu haben, dass es vorteilhaft ist, Bewegungsfelder zu suchen, welche der dritten Wirbelgleichung Genüge leistet und dann erst das Druckfeld zu bestimmen. Durch dieses Verfahren kann man Integrale der Bewegungsgleichungen in vielen Fällen finden, wo es auf gewöhnlichem Wege schwierig ist. Die Genauigkeit der gefundenen Lösungen wird besonders dadurch beschränkt, dass die Bewegungsgleichungen (4) nur angenähert richtig sind. Erst wenn man durch weitere Untersuchungen bessere Kenntnisse der Reibungskraft erhalten hat, kann man diese Fehlerquelle entfernen.