ÜBER DIE HYDRODYNAMISCHEN GLEICHUNGEN IN LAGRANGESCHER UND EULERSCHER FORM UND IHRE LINEARISIERUNG FÜR DAS STUDIUM KLEINER STÖRUNGEN

VON

V. BJERKNES

(Manuskript am 12. April 1929 eingegangen.)

I. Einleitung.

1. Die beiden Formen der hydrodynamischen Gleichungen. — Die vielfach mit dem Namen der »Bergener Schule« verknüpften Fortschritte in der dynamischen Meteorologie erfolgten als Früchte einer Arbeit, die sich durch lange Jahre um *eine* Aufgabe konzentrierte: das meteorologische Prognosenproblem als eine rein hydrodynamisch-thermodynamische Aufgabe durchzudiskutieren, und gegebenenfalls zu lösen, nämlich nach dem einfachen Programm, die *Ortsveränderungen und die sie begleitenden Zustandsänderungen der bewegten Luftmassen zu berechnen oder schätzen*[1].

Der Übergang von einer Meteorologie der Druck-, Temperatur- und Bewegungs*felder* zu einer der *bewegten Luftmassen* bedeutet aber hydrodynamisch der Übergang von den Eulerschen zu den Lagrangeschen Gleichungen. Zurückgehalten durch den traditionellen Schrecken vor den letzteren, suchte ich aber möglichst lange mit den Eulerschen auszukommen. Das Einpassen der Probleme in ungeeignete Form zeigte sich jedoch immer unbefriedigender, und führte mich zuletzt — leider erst ganz neulich — zu einem eingehenden Vergleich der beiden Gleichungssysteme. Das Resultat wurde mir eine große Überraschung: es kann nur als ein historisches Vorurteil bezeichnet werden, wenn man *allgemein* das eine Gleichungssystem als einfacher als das andere hinstellt.

Zwar sind im Eulerschen System die Bewegungsgleichungen niedrigerer Ordnung und die Kontinuitätsgleichung niedrigeren Grades als im Lagrangeschen. Welches von den beiden vollständigen Gleichungssystemen das einfachste ist, entscheidet aber die »fünfte« Gleichung, — ich werde sie die *physikalische Gleichung* nennen. Sie definiert die inneren physikalischen Eigenschaften der einzelnen Flüssigkeitspartikelchen, und stellt gegebenenfalls die Verbindung her mit der Thermodynamik und dadurch mit den in flüssigen Systemen sich abspielenden physikalischen Prozessen. Die Physik gibt diese Gleichung in endlicher Form. Sie fügt sich auch als eine solche zwanglos in das Lagrangesche System hinein. Im Eulerschen fehlen uns aber die Koordinaten, um sie mit Individualisierung für die einzelnen Flüssigkeitspartikelchen zu schreiben. Man hat nur den Ausweg, auch diese Gleichung in Differentialform zu bringen, wie unten angegeben.

Ist diese an sich so leicht zugängliche Gleichung wirklich neu, — ich habe sie nicht in der Literatur finden können — so wird auch unten das Eulersche Gleichungs-

[1] V. Bjerknes: Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik. Met. Zs. *21* (1904), S. 1—7. Die Meteorologie als exacte Wissenschaft, Braunschweig (Vieweg) 1913.

system zum ersten Male mit gleicher Allgemeinheit wie das Lagrangesche geschrieben. Vergleicht man dann die beiden gleich allgemeinen Systeme, so hat man gar kein Recht, das eine als einfacher als das andere hinzustellen. Denn die höhere Ordnung gewisser Differentialgleichungen des einen Systems wird aufgewogen oder mehr als aufgewogen durch die größere Zahl der Differentialgleichungen des anderen.

2. »Klassische« Hydrodynamik und »physikalische« Hydrodynamik. Die größere Einfachheit hat das Eulersche System erst, wenn man auf jede Individualisierung für die einzelnen Flüssigkeitspartikelchen verzichten kann, das heißt, *wenn der Austausch irgend zweier Partikelchen der Flüssigkeit keinen Unterschied im Massenfelde, und damit in den übrigen Feldern, herbeiführt.* Man hat diese Austauschbarkeit, wenn das Massenfeld durch das Druckfeld eindeutig bestimmt ist; oder geometrisch ausgedrückt, wenn die Flächen gleicher Dichte und gleichen Druckes immer zusammenfallen. In diesem Falle der *Barotropie* bleibt die physikalische Gleichung auch im Eulerschen Falle eine endliche Gleichung. Man hat den vollen Vorteil der niedrigeren Ordnung der anderen Gleichungen; und man befindet sich in einem Gebiete der Schönheit und Harmonie, das man nicht gern verläßt, gekennzeichnet vor allem durch die wundervollen Helmholtz'schen Sätze von der Erhaltung der Wirbel. Innerhalb dieses *klassischen* Gebietes hat sich auch die Entwickelung bis heute in der Hauptsache vollzogen, ganz entsprechend dem schon von Lagrange gegebenen Ratschlag, in den Anwendungen den einfacheren Eulerschen Gleichungen den Vorzug zu geben.

In realen flüssigen Systemen wie Atmosphäre und Meer, von Gasmassen wie Sonne und kosmische Nebel nicht zu reden, sind aber die Partikelchen nicht austauschbar, und die Flächen gleicher Dichte und gleichen Druckes nicht zusammenfallend. Man hat anstatt des spezielleren barotropen Zustandes den allgemeineren *baroklinen*, wo die beiden Flächenscharen zueinander geneigt sind und sich schneiden.

Solange man die Lagrangeschen Gleichungen nicht anwenden und die Eulerschen nicht verallgemeinern wollte, mußte dies allgemeinere *physikalische* Gebiet der Hydrodynamik in der Hauptsache brach liegen. Einzelne Vorstöße erfolgten jedoch sozusagen automatisch. So hat man einen *semi-baroklinen* Fall oder eine *begrenzte Barotropie*, wenn verschiedene barotrope Schichten aufeinander lagern, mit Austauschbarkeit innerhalb jeder Schicht, nicht aber durch die Schichtgrenzen. Jede Grenzfläche ist dann gekennzeichnet durch eine Anzahl miteinander zusammenfallender Flächen gleicher Dichte, die von den Flächen gleichen Druckes durchschnitten werden können. Das Gesamtsystem ist somit baroklin, aber das Problem doch innerhalb des klassischen Rahmens lösbar, weil das barokline nicht durch die Hauptgleichungen, sondern nur durch die Grenzflächenbedingungen eingeführt wird. Wertvolle Vorstöße sind auch auf dem Wege der allgemeinen Diskussion erfolgt. Jeder allgemeine Satz, den man aus den allgemeinen Gleichungen ableitet, ohne die physikalische Gleichung hinzuzuziehen, ist auf das barokline System anwendbar. Solche Sätze sind die über Wirbel-Bildung und -Vernichtung, die die Helmholtz'schen Erhaltungssätze als Spezialfälle enthalten. Sie haben als Leitfäden in der ozeanographischen und meteorologischen Forschung dienen können, bis sich jetzt die großen Fundamentalprobleme, vor allem das Zyklonenproblem, zur Lösung herausgeschält haben. Zu dieser Lösung muß aber das vollständige Gleichungssystem in Anwendung gebracht werden.

3. Kleine Störungen. — In dieser Situation nützt es jedoch nicht sehr viel, festgestellt zu haben, daß die Eulerschen Gleichungen ebenso schwer handlich sind wie die Lagrangeschen. Glücklicherweise hat aber die Natur, als sie uns das Problem stellte, auch die Anweisung zu seiner Lösung gegeben. Jede atmosphärische Störung, einschließ-

lich der Zyklone, entsteht nämlich aus einem relativ einfachen Grundzustand, und zwar als eine *klein* anfangende Störung. Sie muß deshalb studiert werden können mit Hilfe *linearisierter* Gleichungen.

Auf Aufgaben dieser Art zugeschnitten, habe ich schon früher linearisierte Gleichungen aus den Eulerschen Gleichungen abgeleitet, aber nur für den *semi-baroklinen* Fall, wo barotrope Schichten aufeinander lagern[1]. Der Zweck dieser Abhandlung ist, linearisierte Gleichungen vollster Allgemeinheit sowohl aus den Lagrangeschen wie aus den auf volle Allgemeinheit gebrachten Eulerschen Gleichungen abzuleiten, um dadurch den Weg zum Angreifen der Störungsprobleme in voller Breite zu eröffnen. Mit Rücksicht auf die allgemeine Verwendbarkeit sollen dabei alle Gleichungen nicht bloß in der üblichen kartesischen Form erscheinen, sondern sowohl in konzise Vektorform gebracht, als auf ganz beliebige krummlinige Koordinaten bezogen werden.

Die parallele Entwickelung aller dieser Gleichungen sowohl in Eulerscher wie Lagrangescher Form wird es möglich machen, in jedem Falle die am meisten zweckentsprechende in Anwendung zu bringen. So weit meine Erfahrungen bis jetzt reichen, scheint aber kein Grund vorzuliegen, vor den Lagrangeschen Formen zurückzuschrecken, wenn sie sich sonst dem Problem gut anschließen.

Das Spezialproblem, das zu der Entwickelung dieser Gleichungen Anlaß gab, war, wie schon erwähnt, das Zyklonenproblem[2]. Man darf nicht erwarten, dieses große Problem bald in voller Allgemeinheit bewältigen zu können. Die hier entwickelten Gleichungen haben aber ein Interesse weit über dieses Problem hinaus. Sie sammeln unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkt Störungen der verschiedensten Arten und aller Dimensionen, von den Schallwellen und den Kräuselungen einer Wasserfläche bis zu den mächtigsten atmosphärischen Störungen.

Durch seine Bearbeitung dieses in das Zyklonenproblem gipfelnden Problemkomplexes hat sich Dr. H. Solberg große Erfahrung auf diesem allgemeinen Gebiete der Hydrodynamik erworben. Die Diskussionen mit ihm sind mir bei der Abfassung dieser Abhandlung sehr nützlich gewesen, wie ich ihm auch für wertvolle Unterstützung bei der Rechenarbeit und bei der Korrektur zu grossem Dank verpflichtet bin.

II. Die Lagrangeschen und die Eulerschen Gleichungen.

4. Die primären Gleichungen. — Es sei t die Zeit, und x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Partikelchens, p Druck, q Dichte, Φ das Potential der äußeren Kraft. Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w werden durch die ersten Ableitungen nach der Zeit dargestellt

$$(\alpha) \qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

und die Komponenten der Beschleunigung durch die entsprechenden zweiten Ableitungen.

Nach den Prinzipien der Newtonschen Mechanik gelangt man für ein beliebiges Partikelchen der Flüssigkeit zu drei kartesischen Bewegungsgleichungen

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 . \end{aligned}$$

---

[1] V. Bjerknes: Die atmosphärischen Störungsgleichungen. Beitr. z. Physik der freien Atmosphäre, Bd. XIII, Heft 1 (1926).

[2] V. Bjerknes: On the Dynamics of the Circular Vortex, p. 70; Wave Theory of Cyclones and Anticyclones. Geofys. Publ., Vol. II. No. 4, Oslo (1921).

Bei den großen Bewegungen der Atmosphäre oder der Hydrosphäre hat man noch auf die Erddrehung Rücksicht zu nehmen. Es kann in zweierlei Weise geschehen. Man behält die Gleichungen (A) bei, aber benutzt ein Koordinatensystem, das die Rotation der Erde nicht mitmacht. Oder man läßt das Koordinatensystem mit der Erde rotieren, und ergänzt die Trägheitsglieder der Gleichungen (A) durch die Komponenten der Coriolisbeschleunigung

$$\text{(A')} \qquad \begin{array}{l} 2\,\Omega_y w - 2\,\Omega_z v \\ 2\,\Omega_z u - 2\,\Omega_x w \\ 2\,\Omega_x v - 2\,\Omega_y u, \end{array}$$

wo $\mathbf{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist, mit den Komponenten Ω_x, Ω_y, Ω_z.

Das Prinzip von der Erhaltung der Masse verlangt, daß sich Dichte und Volumen eines bewegten Partikelchens reziprok verhalten. Dies drückt sich in Differentialform durch die »Kontinuitätsgleichung«

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

aus, wo sich $\frac{dq}{dt}$ auf die Dichteänderung des bewegten physischen Individuums bezieht.

Schließlich soll die physikalische Gleichung angeben, wie jedes Partikelchen der Flüssigkeit gegenüber dem Druck reagiert. In dieser Gleichung kommt in realen Fällen immer noch eine Variable, die Temperatur, vor. Wird eine solche sechste abhängige Variable explizite eingeführt, so muß auch eine sechste Gleichung eingeführt werden, die dem Prinzip von der Erhaltung der Energie Ausdruck verleiht. Bei unseren Störungsproblemen können wir jedoch auf diese explizite Einführung der Temperatur in den Gleichungen verzichten, müssen aber Raum für ihren Einfluß auf den Anfangszustand offen halten. Wir können deshalb die physikalische Gleichung einfach

$$\text{(C)} \qquad q = q\,(p)$$

schreiben, aber dabei voraussetzen, daß *eine solche Gleichung für jedes einzelne Partikelchen der Flüssigkeit* gegeben ist. Differentiation dieser Gleichung nach p gibt

$$\text{(C')} \qquad \frac{dq}{dp} = \gamma,$$

wo γ für jedes Partikelchen eine Funktion des Druckes ist, und von Partikelchen zu Partikelchen verschieden sein kann.

Diese physikalisch einfachsten Formen der hydrodynamischen Gleichungen sind mathematisch nicht befriedigend. Im ersten Gliede der Gleichungen (A) treten x, y, z als abhängige Variablen auf, die nach der Zeit differentiiert werden, in den beiden folgenden Glieder dagegen dienen sie als unabhängige Variablen, nach denen differentiiert wird. Noch mehr wird man diese unvollständige Trennung der unabhängigen und der abhängigen Variablen in der Gleichung (B) hervortreten sehen, wenn man die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w durch die Zeitableitungen (α) ausdrückt. Und in der Gleichung (C) haben wir nicht die Individualisierung für die verschiedenen Partikelchen zum Ausdruck bringen können.

Zu mathematisch befriedigenden Formen gelangt man erst, indem man getrennte Systeme von abhängigen und unabhängigen Variablen einführt. Dies kann auf zwei Wegen geschehen, von denen der eine zu den Lagrangeschen, der andere zu den Eulerschen Gleichungen führt.

5. Die Lagrangeschen Gleichungen. — Wir behalten x, y, z als abhängige Variablen bei, d. h. als die Koordinaten bewegter Flüssigkeitspartikelchen, führen als unabhängige Variablen drei Größen a, b, c ein, die nach irgendeinem Prinzipe die Flüssigkeitspartikelchen *eindeutig numerieren*, und suchen die Lösung des Problems in der Form

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= p(a, b, c, t) \\ q &= q(a, b, c, t)\,. \end{aligned}$$

Am anschaulichsten wählt man als Numerierungsvariablen diejenigen rechtwinkligen Koordinaten $a=x_0$, $b=y_0$, $c=z_0$, die die Partikelchen x, y, z zu einer gewählten Anfangszeit $t=t_0$ haben. Die spezielle Definition dieser Variablen halten wir vorläufig offen.

Die Bewegungsgleichungen, die sich auf diese neuen Variablen beziehen, bildet man, indem man die Gleichungen 4 (A) der Reihe nach einmal mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ multipliziert und addiert, einmal mit $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$ und einmal mit $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$. Dies gibt die Gleichungen

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= 0\,. \end{aligned}$$

Hier haben sämtliche Ableitungen die klare Bedeutung partieller Ableitungen; bei jeder Ableitung läßt man drei der unabhängigen Variablen a, b, c, t unverändert, während die vierte variiert wird.

Nach bekannten Prinzipien der Infinitesimalgeometrie bringt man die Kontinuitätsgleichung in die Form

$$(\mathrm{B}) \qquad q \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} - q_0 \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial x_0}{\partial c} \\ \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial c} \\ \frac{\partial z_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wenn a, b, c die rechtwinkligen Anfangskoordinaten sind, $a=x_0$, $b=y_0$, $c=z_0$, wird die letzte Determinante gleich 1.

Die physikalische Gleichung schreibt sich schließlich

$$(\mathrm{C}) \qquad q=q(a, b, c, p)\,,$$

wo die Koordinaten a, b, c die Individualisierung von Partikelchen zu Partikelchen geben. Wenn diese Koordinaten aus der Gleichung ausfallen, haben wir den klassischen Fall der Barotropie.

Auf eine wichtige Eigenschaft dieses Gleichungssystems machen wir gleich aufmerksam. Mit Hilfe der Gleichung (C) kann man durch einfache Substitution die Dichte q aus Bewegungsgleichungen (A) und Kontinuitätsgleichung (B) eliminieren. Dann geht aber der Druck p nur als endliche Größe in die Kontinuitätsgleichung ein, und auch diese Größe kann man deshalb, ohne Erhöhung der Ordnungszahl, aus den Bewegungsgleichungen eliminieren. Nur im Falle der Inkompressibilität, wenn p nicht in der physikalischen Gleichung (C) vorkommt, wird diese Elimination des Druckes illusorisch.

6. Die Eulerschen Gleichungen. — Man behält die Koordinaten x, y, z als unabhängige Variablen, d. h. als Koordinaten geometrischer Raumpunkte bei, und führt als neue abhängige Variablen die Geschwindigkeitskomponenten 4 (α) ein. D. h. man sucht die Lösung des Problems in der Form

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} u &= u\,(x, y, z, t) \\ v &= v\,(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= p\,(x, y, z, t) \\ q &= q\,(x, y, z, t)\,. \end{aligned}$$

Ehe man die Koordinaten x, y, z von den bewegten Partikelchen losgelöst hat, bildet man die totale Zeitableitung einer der Größen (α) durch die Operation

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Nachdem wir aber hier 4 (α) eingeführt haben,

$$(\beta) \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

können wir das Loslösen der x, y, z von ihrer Verbindung mit dem bewegten Flüssigkeitspartikelchen bewerkstelligen, und sie künftig nur als unabhängige Variablen, als Koordinaten geometrischer Raumpunkte, benutzen. $\frac{\partial}{\partial t}$ wird dann die *lokale*, bei konstantem x, y, z, ausgeführte Zeitdifferentiation; $\frac{d}{dt}$ bleibt aber wie in den Formeln 4 fortwährend die *individuelle*, auf das bewegte physische Partikelchen bezogene Zeitderivation.

Die Bewegungsgleichungen 4 (A) werden nun, wenn man sie in der entwickelten Form (β) schreibt,

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\,. \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung 4 (B) läßt sich nach Entwicklung der Zeitableitung in der Form

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (q\,u)}{\partial x} + \frac{\partial (q\,v)}{\partial y} + \frac{\partial (q w)}{\partial z} = 0$$

schreiben.

Koordinaten wie im Lagrangeschen Fall, um die physikalische Gleichung 4 (C') für die einzelnen Partikelchen zu individualisieren, besitzen wir jetzt nicht. Um die Gleichung in Differentialform zu bringen, betrachten wir erst die individuelle Zeitableitung $\frac{dq}{dt}$. Hier haben wir das Recht, den Druck als intermediäre Variable einzuführen, und dann nach Gleichung 4 (C') die physikalisch definierte Größe γ einzusetzen. Dies gibt

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{dp}{dt} = \gamma\,\frac{dp}{dt}\,.$$

Indem wir jetzt die individuellen Zeitableitungen entwickeln, ergibt sich

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial z}=\gamma\left[\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right], \tag{C}$$

welches die Differentialform der physikalischen Gleichung ist.

Es stellen somit (A), (B), (C) das vollständige Eulersche Gleichungssystem dar. Vergleichen wir es mit dem Lagrangeschen, 5 (A), (B), (C), so sind die Bewegungsgleichungen niedrigerer Ordnung, und die Kontinuitätsgleichung niedrigeren Grades. Dafür ist aber die physikalische Gleichung im Lagrangeschen System eine endliche Gleichung, im Eulerschen dagegen eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades. Man darf deshalb nicht ohne weiteres das eine als einfacher als das andere hinstellen. Erst das Arbeiten mit den Gleichungen wird die gegenseitigen Vorteile und Nachteile der beiden Systeme hervortreten lassen.

In einer Hinsicht zeigt sich aber gleich ein wesentlicher Vorteil des Lagrangeschen Systems: die Leichtigkeit, womit man durch Elimination die Dichte, und — vom Ausnahmefall der Inkompressibilität abgesehen — auch den Druck aus den Gleichungen entfernen kann. Die entsprechenden Eliminationen im Eulerschen System sind dagegen umständlich, und führen unumgänglich zu Gleichungen erhöhter Ordnung.

III. Vektorform der Gleichungen.

7. Die linearen Vektoroperationen. — Durch Vektorbezeichnungen das Koordinatensystem in den Hintergrund treten zu lassen und den Formelapparat zu konzentrieren, ist in der Hydrodynamik nur wenig üblich gewesen. Dies kommt wohl hauptsächlich daher, daß man im klassischen Gebiete dieser Wissenschaft gewöhnlich direkt zu der Integrationsarbeit schreiten kann. Es ist relativ wenig durch allgemeine, an die physikalische Anschauung geknüpfte Diskussionen, oder durch allgemeine Operationen mit den Gleichungen, zu erzielen. Im physikalischen Gebiete der Hydrodynamik wird sich aber dies wesentlich anders stellen. Man wird hier viel mehr auf allgemeine Diskussion angewiesen sein. Und bei Eliminationen oder anderen vorbereitenden Arbeiten, um die integrablen Fälle zu entdecken, leisten die vektoriellen Operationen unschätzbare Dienste. Ich werde deshalb im folgenden die Gleichungen in Vektorform zusammenfassen, und später auch in beschränkter Ausdehnung die Entwicklungen durch einfache Vektoroperationen abkürzen.

Außer den meist bekannten Vektoroperationen werden dabei zwei lineare Differentialoperationen in Anwendung kommen, die hier gleich besprochen und in bezug auf Bezeichnungen festgelegt werden sollen. Beide Operationen beziehen sich auf zwei Vektoren, einen Vektor **B**, der differentiiert werden soll, und einen Vektor **A**, der genauer angibt *wie*.

Die erste Operation werde ich kurz die *Vektorliniendifferentiation* des Vektors **B** bezeichnen. Ihre analytische Definition zugleich mit der anzuwendenden Vektorbezeichnung sieht man aus dem Schema

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}\equiv\begin{cases}A_x\dfrac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\dfrac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\dfrac{\partial B_x}{\partial z}\\[2ex] A_x\dfrac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\dfrac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\dfrac{\partial B_y}{\partial z}\\[2ex] A_x\dfrac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\dfrac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\dfrac{\partial B_z}{\partial z}\end{cases} \tag{α}$$

oder auch

$$(\alpha') \qquad \mathbf{A}\cdot\nabla\,\mathbf{B}=A_x\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+A_y\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}+A_z\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\,.$$

Die Bedeutung der Operation erhellt sogleich, wenn man z. B. der x-Achse die Richtung des Vektors **A** gibt, so daß man sich im obigen Schema $A_y=A_z=0$ und $A_x=A$ zu denken hat. Der Vektor **B** wird dann längs der x-Achse, d. h. längs den Vektorlinien des Vektors **A** differentiiert — woraus der Name — und nachträglich mit dem Skalarwert von **A** multipliziert. Wenn man die Komponenten eines Vektors nach dem Taylorschen Theorem entwickelt, sind die linearen Glieder der Form (α), wobei $A_x=x-x_0$, $A_y=y-y_0$, $A_z=z-z_0$, oder $\mathbf{A}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$. Die Taylorsche Entwickelung des Vektors **B** läßt sich deshalb

$$(\alpha') \qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla\,\mathbf{B}$$

schreiben, welches gleich die Wichtigkeit der Operation zeigt.

Die zweite Operation soll entsprechend als die *Differentiation der Vektorlinienkomponente* von **B** bezeichnet werden. Ihre analytische Definition und ihre vektorielle Bezeichnung erhellt aus dem Schema

$$(\beta) \qquad \nabla\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\equiv\left\{\begin{array}{l} A_x\dfrac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\dfrac{\partial B_y}{\partial x}+A_z\dfrac{\partial B_z}{\partial x} \\[2ex] A_x\dfrac{\partial B_x}{\partial y}+A_y\dfrac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\dfrac{\partial B_z}{\partial y} \\[2ex] A_x\dfrac{\partial B_x}{\partial z}+A_y\dfrac{\partial B_y}{\partial z}+A_z\dfrac{\partial B_z}{\partial z} \end{array}\right.$$

oder auch

$$(\beta') \qquad \nabla\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=A_x\nabla\,B_x+A_y\nabla\,B_y+A_z\nabla\,B_z\,.$$

Diese halb-entwickelte Form der Operation ist oft nützlich. Wenn man eine Koordinatenachse, die x-Achse, längs den Vektorlinien des Vektors **A** orientiert, wird $\nabla\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=A\nabla B_x$. Also: auf die Komponente des Vektors B längs den Vektorlinien von **A** führt man die Operation ∇ aus, und multipliziert nachträglich mit dem Skalarwert A.

Wie man sieht, unterscheidet man in der gewählten Bezeichnungsweise die beiden Operationen voneinander durch die Reihenfolge der beiden symbolischen Faktoren des Vektors **A** und des Tensors $\nabla\mathbf{B}$. Im Falle (α) ist es der Tensor $\nabla\mathbf{B}$, der mit dem Vektor **A** als Präfaktor skalar multipliziert wird; im Falle (β) ist es der Tensor $\nabla\mathbf{B}$, der mit dem Vektor **A** als Postfaktor multipliziert wird, welches nach den Prinzipien der Tensoranalysis einen Vektor gibt. Drückt man die Vektoren **A** und **B** und die Operation ∇ durch die drei zueinander senkrechten Vektoreinheiten **i**, **j**, **k** aus: $\mathbf{A}=\mathbf{i}\,A_x+\mathbf{j}\,A_y+\mathbf{k}\,A_z$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}\,B_x+\mathbf{j}\,B_y+\mathbf{k}\,B_z$, $\nabla=\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$, so leitet, nach den formellen Regeln der Vektoralgebra, die Operation $\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$ direkt zu der kartesischen Definition (α), und die Operation $\nabla\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ direkt zu der Definition (β).

Die beiden Operationen sind nahe miteinander verwandt, und wie man leicht verifiziert, durch die Relation

$$(\gamma) \qquad \mathbf{A}\cdot\nabla\,\mathbf{B}=\nabla\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\operatorname{curl}\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

verbunden. Wenn der differentiierte Vektor wirbelfrei ist, sind folglich die beiden Operationen mit einander identisch.

Es ist nützlich, sich gleich einige Spezialfälle der beiden Operationen zu notieren. Sind die beiden Vektoren untereinander identisch, $\mathbf{B}=\mathbf{A}$, so reduziert sich (β) auf

$$(\delta) \qquad \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{2} A^2 \right),$$

und bei Wirbelfreiheit des Vektors **A** reduziert sich auch (α) auf diese Form

$$(\delta') \qquad \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{2} A^2 \right).$$

Ist der differentiierte Vektor der Radiusvektor $\mathbf{B} = \mathbf{r}$, mit den Komponenten $B_x = x$, $B_y = y$, $B_z = z$, so führen beide Operationen zu dem nicht differentiierten Vektor **A** zurück,

$$(\varepsilon) \qquad \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{A}, \quad \nabla \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Wenn wir zu Vektorbezeichnungen übergehen, können wir, ohne zu lange Formeln zu erhalten, auch die Erddrehungsglieder in den Bewegungsgleichungen mitnehmen. Um die primären Gleichungen (4) in Vektorform aufzuschreiben, ersetzen wir die Koordinaten x, y, z durch den Radiusvektor $\mathbf{r}$. Die Geschwindigkeit mit den Komponenten u, v, w bezeichnen wir mit $\mathbf{v}$, wo

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Die Bewegungsgleichungen in ihrer primären Form, unter Berücksichtigung der Erddrehung, wird dann

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{1}{q} \nabla p + \nabla \Phi = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung schreibt sich

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Die physikalische Gleichung 4 (C) oder (C′) bleibt unverändert.

8. Vektorform der Lagrangeschen Gleichungen. — Man sucht die Lösung des Problems in der Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t), \qquad p = p(a, b, c, t), \qquad q = q(a, b, c, t).$$

Zur Bestimmung dieser Variablen dienen eine Vektorgleichung und zwei Skalargleichungen.

Um die Bewegungsgleichung 7 (A) auf die unabhängigen Variablen a, b, c zu beziehen, multipliziert man sie skalar mit dem Tensor $\nabla \mathbf{r}$ als Präfaktor, wobei sich die Operation ∇ auf die Variablen a, b, c bezieht. Das erste Glied wird $\nabla \mathbf{r} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}$, welches, nach 7 ($\beta$) entwickelt, zu den trinomischen Trägheitsgliedern der Gleichungen 5 (A) zurückführt. Dann folgt das in diesen Gleichungen nicht aufgenommene Erddrehungsglied $\nabla \mathbf{r} \cdot \left(2\,\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)$.

Geben wir durch Indices a, b, c, x, y, z an, auf welche Variablen sich die Operation ∇ bezieht, so findet man, durch vollständiges Ausschreiben nach den Definitionsgleichungen 7 (β), $\nabla_{a,b,c}\, \mathbf{r} \cdot \nabla_{x,y,z}\, p = \nabla_{a,b,c}\, p$, und ähnlich für den Skalar Φ. Die Vektorgleichung der Bewegung wird dann die folgende, wo sich die Operation ∇ jetzt auf die Variablen a, b, c bezieht:

$$\text{(A)} \qquad \nabla \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) + \frac{1}{q} \nabla p + \nabla \Phi = 0.$$

Ist speziell $a = x$, $b = y$, $c = z$, so kommt man nach 7 (ε) auf die Gleichung 7 (A) zurück.

Die in der Kontinuitätsgleichung auftretende Determinante ist einfach das parallelepipedische Produkt der Ableitungen des Vektors **r** nach a, b, c. Diese Gleichung schreibt sich deshalb

$$q\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c}-q_0\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial a}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial b}\times\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial c}=0\,, \tag{B}$$

oder, wenn a, b, c Anfangskoordinaten sind, in der einfacheren Form

$$q\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c}-q_0=0\,. \tag{B'}$$

Die physikalische Gleichung bleibt unverändert

$$q=q\,(a,\,b,\,c,\,p)\,. \tag{C}$$

Schließlich werden wir jetzt auch die Grenzflächenbedingungen hinzufügen, die oben noch nicht behandelt worden sind. Das flüssige System besteht aus zwei verschiedenen Flüssigkeitsmassen, die aneinander grenzen. Die Partikelchen der einen Masse sollen die Numerierungskoordinaten a, b, c haben, und zu jeder beliebigen Zeit die Koordinaten x, y, z, oder den Radiusvektor **r**. Die Partikelchen der anderen Masse sollen durch die entsprechenden gestrichelten Buchstaben gekennzeichnet sein. Die Partikelchen der beiden Massen, die der Grenzfläche angehören, werden durch die Gleichungen

$$F_0\,(a,\,b,\,c)=0 \qquad F_0\,(a',\,b',\,c')=0 \tag{D}$$

gekennzeichnet, wo in beiden Gleichungen F_0 identisch dasselbe Funktionenzeichen ist.

Hat man nun x, y, z als Funktionen von a, b, c, t gefunden, und x', y', z' als Funktionen von a', b', c', t, so kann man durch Auflösung a, b, c als Funktionen von x, y, z, t, und a', b', c' als Funktionen von x', y', z', t finden, und in die Gleichungen (D) einsetzen. Es ergeben sich dann zwei Gleichungen

$$F(x,\,y,\,z,\,t)=0\,, \qquad F'\,(x',\,y',\,z',\,t)=0\,, \tag{E}$$

wo F und F' verschiedene Funktionenzeichen sind. Die zu erfüllende kinematische Grenzflächenbedingung ist, daß die beiden Gleichungen (E) zu jeder Zeit identisch dieselbe Fläche darstellen sollen. Dies werden wir in den unten folgenden Formelschemata $[F=0]\equiv[F'=0]$ symbolisieren, vergl. 11 (E). Die gefundenen Ausdrücke von x, y, z als Funktionen von a, b, c, t und von x', y', z' als Funktion von a', b', c', t sind derart zu spezialisieren, daß diese Bedingung erfüllt wird. Bei äußeren Grenzflächen kann man von der zweiten Gleichung (D) und (E) absehen. Hat diese Grenzfläche eine vorgeschriebene Bewegung, so ist die erste Gleichung (E) gegeben, und die Lösung so anzupassen, daß sie erfüllt wird.

Schließlich müssen nach der dynamischen Grenzflächenbedingung die jeweilig an der Grenzfläche einander gegenüberliegenden Partikelchen zu jeder Zeit denselben Druck haben. Ist der Druck p als Funktion von a, b, c, t und p' als Funktion von a', b', c', t gefunden, so hat man wieder p und p' durch die entsprechenden x, y, z, t und x', y', z', t auszudrücken, und für $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, $t=t$ soll dann

$$p\,(x,\,y,\,z,\,t)=p'\,(x',\,y',\,z',\,t) \tag{F}$$

sein. Ist die Fläche eine äußere Grenzfläche, auf der ein konstanter Druck lastet, so ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null oder konstant zu setzen.

9. Vektorform der Eulerschen Gleichungen. — Es ist jetzt **v** ein Vektor mit den Komponenten u, v, w. Die Lösung des Problems wird gesucht in der Form

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}\,(x,\,y,\,z,\,t)\,, \qquad p=p\,(x,\,y,\,z,\,t)\,, \qquad q=q\,(x,\,y,\,z,\,t)\,. \tag{α}$$

Die Entwickelung der individuellen Zeitableitung 6 (β) wird mit Vektorbezeichnungen

$$(\beta) \qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\,.$$

Führt man in Gleichung 7 (A) die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ als abhängige Variable ein, und entwickelt die individuelle Zeitableitung, so ergibt sich die Vektorgleichung

$$(A) \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}+2\,\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}+\frac{1}{q}\nabla p+\nabla\Phi=0\,.$$

Schreibt man die entsprechenden drei Skalargleichungen, indem man die Bedeutung der linearen Operation $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ nach 7 (α) berücksichtigt, so kommt man auf die Eulerschen Bewegungsgleichungen 6 (A) zurück, nur jetzt noch durch die Erddrehungsglieder ergänzt.

Die Kontinuitätsgleichung schreibt sich

$$(B) \qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\operatorname{div}(q\mathbf{v})=0\,.$$

Die physikalische Gleichung 6 (C) wird

$$(C) \qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla q-\gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla p\right)=0\,.$$

An der Grenzfläche

$$(D) \qquad F(x,\,y,\,z,\,t)=0$$

müssen als kinematische Grenzflächenbedingungen die beiden Gleichungen

$$(E) \qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla F=0\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{v}'\cdot\nabla F=0$$

erfüllt sein. Die eine dieser Gleichungen kann weggelassen werden, wenn die Grenzfläche eine äußere ist.

Endlich muß an der Grenzfläche (E) der Druck beiderseits gleich groß sein. Diese dynamische Grenzflächenbedingung drückt sich also einfach durch die endliche Gleichung

$$(F) \qquad p-p'=0$$

aus, welche für alle diejenigen Werte x, y, z, t gelten soll, die der Gleichung (E) genügen. Es wird aber gewöhnlich vorteilhaft sein, um unnötige Rechnung zu vermeiden, auch diese Gleichung in Differentialform zu bringen. Man erzielt es durch die folgende Überlegung: p und p' in (F) sind Funktionen der Koordinaten und der Zeit, und ihre Differenz $p-p'$ auch eine solche Funktion, die die Eigenschaft hat, gleich Null gesetzt die Fläche (D) darzustellen. Die Differenz $p-p'$ darf deshalb mit gleichem Recht wie F in die Gleichungen (E) eingesetzt werden, welches

$$(F') \qquad \frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla(p-p')=0\,,\qquad \frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\mathbf{v}'\cdot\nabla(p-p')=0$$

gibt. Wenn es sich um eine freie Grenzfläche handelt, kann man wieder die gestrichenen Buchstaben gleich Null setzen, und eine der Gleichungen weglassen[1].

[1] Ich verdanke Herrn Solberg die Bemerkung, daß man die dynamische Grenzflächenbedingung in dieser oft nützlichen Differentialform schreiben kann. Sie ist viel einfacher als die von mir früher benutzte $\nabla F\times\nabla(p-p')=0$, die außerdem zwar notwendig, nicht aber immer hinreichend ist. Wie ich nachträglich bemerkt habe, schreibt schon Lagrange für den Fall einer äußeren Grenzfläche die dynamische Grenzflächenbedingung, doch ohne nähere Begründung, in der differentiierten Form (F'). Später scheint sie aber in Vergessenheit geraten zu sein. Oder man hat an ihrer Richtigkeit gezweifelt, weil die Bedeutung der individuellen Zeitableitung der Differenz $p-p'$ gar nicht unmittelbar klar scheint, wenn man nicht die oben im Texte gegebene Überlegung anstellt.

IV. Störungsgleichungen in Lagrangescher Form.

10. Grundzustand und gestörter Zustand. — Ich betrachte jetzt eine Bewegung gekennzeichnet durch die abhängigen Variablen

$$(\alpha) \qquad \mathbf{R},\ P,\ Q,$$

die keinen anderen Bedingungen unterworfen sein sollen als der, die Lagrangeschen Gleichungen einschließlich der Grenzflächenbedingungen zu erfüllen. Für diese Variablen haben wir also einfach nur das gesamte Lagrangesche Gleichungssystem aufzuschreiben. Dabei werden wir ausdrücklich annehmen, daß zu Anfang der Zeit, $t=t_0$,

$$(\beta) \qquad X^0=R_x^0=a,\ Y^0=R_y^0=b,\ Z^0=R_z^0=c,$$

so daß *als unabhängige Variablen a, b, c die Anfangskoordinaten dienen.*

Dann betrachte ich einen Bewegungszustand, der sich nur sehr wenig von diesem Grundzustand unterscheidet, gekennzeichnet durch die abhängigen Variablen

$$(\gamma) \qquad \mathbf{R}+\mathbf{r},\ P+p,\ Q+q.$$

Die Zuschlagswerte $\mathbf{r}$, p, q sollen kleine Größen erster Ordnung sein, und dasselbe soll für die räumlichen Ableitungen dieser Größen gelten. Zu Anfang der Zeit haben die Größen (γ) die Werte

$$(\delta) \qquad \mathbf{R}_0+\mathbf{r}_0,\ P_0+p_0,\ Q_0+q_0,$$

wo $\mathbf{r}_0$, p_0, q_0 die Anfangswerte der kleinen Störung darstellen. Wir werden ausdrücklich annehmen, daß diese Anfangswerte gleich Null sein sollen:

$$(\varepsilon) \qquad t=t_0,\ \mathbf{r}_0=0,\ p_0=0,\ q_0=0.$$

Das heißt: *zu Anfang der Zeit soll ein und dasselbe Partikelchen bei der gestörten Bewegung dieselbe Lage einnehmen wie bei der ungestörten, und dieselbe Dichte und denselben Druck haben.* Oder: *die Größen a, b, c können als Anfangskoordinaten ebenso bei der gestörten wie bei der ungestörten Bewegung verwendet werden.*

Natürlich ist diese Voraussetzung (ε) nicht notwendig. Sie erleichtert aber sehr die Betrachtungen, und sie beschränkt nicht die Allgemeinheit der gestörten Bewegung, sondern nur die Art und Weise, wie man sich physikalisch den Übergang von dem ungestörten zu dem gestörten Zustand zu denken hat: er soll geschehen durch Momentanimpulse, die zur Zeit t_0 plötzlich die Geschwindigkeit eines jeden Partikelchens ändern.

Um die Gleichungen der kleinen Störung zu entwickeln, hat man nun in das Lagrangesche Gleichungssystem die unabhängigen Variablen in der Summenform (γ) zu schreiben, die einzelnen Glieder zu entwickelen, und die Vereinfachungen vorzunehmen, die daraus folgen, daß

(1) die Variablen des Grundzustandes das gesamte Lagrangesche Gleichungssystem befriedigen

(2) die Zuschlagsgrößen $\mathbf{r}$, p, q sowie ihre räumlichen Ableitungen kleine Größen erster Ordnung sein sollen, so daß man die in diesen Größen nicht linearen Glieder vernachlässigen kann.

Die Gleichungen, zu denen man auf diese Weise geführt wird, lassen sich nun, wie man sich gleich überzeugt, nach der folgenden Regel direkt aufschreiben: man bildet die erste Variation sämtlicher Gleichungen des Grundzustandes in bezug auf die Größen $\mathbf{R}$, P, Q, *und zwar so, daß man die Variation δ als unabhängig von den schon in den Gleichungen vorkommenden Differentiationen betrachtet.* Nach vollführter Variation ersetzt man dann $\delta\mathbf{R}$ durch $\mathbf{r}$, δP durch p, δQ durch q. Bei dieser Variation bleibt entsprechend der Voraussetzung (ε) der Anfangszustand unvariiert.

In dieser Weise sind unten sämtliche Gleichungen des Grundzustandes aufgeschrieben, 11 (A)—(F), und sämtliche durch Variation gebildete Störungsgleichungen 11 (a)—(f). Der Übersichtlichkeit halber sind dabei prinzipiell die Gleichungsschemata nur für »absolute» Bewegung aufgeschrieben, um die Symmetrie der Gleichungen hervortreten zu lassen. Der Vollständigkeit halber ist aber jedem Schema unten die Bewegungsgleichung mit beigefügten Erddrehungsgliedern beigefügt, 11 (A') und 11 (a').

Zu den einzelnen Gleichungen seien noch die folgenden Bemerkungen beigefügt.

11 (A), (a). — In den Bewegungsgleichungen kann man in den einfachsten Fällen Φ und $\mathbf{\Omega}$ unvariiert lassen, nicht aber ohne weiteres bei Störungen von der Größenordnung der Zyklonen. Die Variation von Φ, wenn ein Partikelchen statt den Radiusvektor $\mathbf{R}$ den Radiusvektor $\mathbf{R}+\mathbf{r}$ hat, wird

$$(\zeta) \qquad \delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial X} x + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} z = \nabla_R \Phi \cdot \mathbf{r},$$

wo sich die Operation ∇_R nicht auf die unabhängigen Variablen a, b, c bezieht, sondern auf die Variablen X, Y, Z oder die Projektionen des Vektors $\mathbf{R}$. Dasselbe gilt für jede Komponente von $\mathbf{\Omega}$, und man kann nach 7 (α') die Variation des Vektors $\mathbf{\Omega}$ in der Form

$$(\eta) \qquad \delta\mathbf{\Omega} = \mathbf{r} \cdot \nabla_R \mathbf{\Omega}$$

schreiben. Die Druck- und Kräfteglieder der variierten Gleichung sind etwas umgeschrieben. Die Variation gibt unmittelbar

$$\frac{1}{Q} \nabla p - \frac{q}{Q^2} \nabla P + \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla_R \Phi),$$

welches sich

$$\nabla \left(\frac{p}{Q} + \nabla_R \Phi \cdot \mathbf{r} \right) + \frac{p \nabla Q - q \nabla P}{Q^2}$$

schreibt, wo schließlich nach der physikalischen Gleichung $q = \gamma p$ eingeführt wird.

11 (B), (b). — Weil a, b, c Anfangskoordinaten sind, kann man die einfache Gleichungsform 8 (B') zu Grunde legen. In der variierten Gleichung fällt das konstante Glied aus, da der Anfangszustand unvariiert bleibt.

11 (C), (c). — Wenn man die physikalische Gleichung (C) nach P variiert, bei konstanten Werten von a, b, c, wird die Ableitung von Q nach P die durch die physikalischen Messungen am Partikelchen gefundene Größe γ, 4 (C').

11 (D), (d). — Da der Anfangszustand unvariiert bleibt, sind die Partikelchen, die einer Grenzfläche angehören, durch identisch dieselben Gleichungen im Grundzustand und nach der Störung definiert.

11 (E), (e). — Die Variationen der Funktionen F und F', die von der ungestörten zu der gestörten Grenzfläche überführen, sollen einander gleich sein für Punkte die während der unendlich kleinen Störung einander gegenüberliegen. Das heißt, es soll $\delta F = \delta F'$, wenn $\mathbf{R}+\mathbf{r} = \mathbf{R}'+\mathbf{r}'$. Da aber δF und $\delta F'$ klein erster Ordnung sind, wird man nur einen Fehler zweiter Ordnung begehen, wenn man die Argumentwerte $\mathbf{R}+\mathbf{r}$ und $\mathbf{R}'+\mathbf{r}'$ durch $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ ersetzt. Gleichzeitig sind die Variationen δF und $\delta F'$ in derselben Weise zu schreiben, wie oben die Variation von Φ:

$$\delta F = \mathbf{r} \cdot \nabla_R F, \quad \delta F' = \mathbf{r}' \cdot \nabla_{R'} F',$$

was zu 11 (e) führt.

11 (F), (f). — In der dynamischen Grenzflächenbedingung 11 (f) fällt das P ganz aus, weil es sich um dieselben beiden Partikelchen im gestörten und ungestörten Zustande handelt; man hat nur die Druckvariationen für Partikelchen, die einander gegenüberliegen,

gleichzusetzen, daß heißt $p(\mathbf{R}+\mathbf{r}, t) = p'(\mathbf{R}'+\mathbf{r}', t)$, wenn $\mathbf{R}+\mathbf{r} = \mathbf{R}'+\mathbf{r}'$. Da aber p klein von erster Ordnung ist, begeht man wieder nur einen Fehler zweiter Ordnung, wenn man die Argumente $\mathbf{R}+\mathbf{r}$ und $\mathbf{R}'+\mathbf{r}'$ durch $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ ersetzt. Dadurch ergibt sich die einfache Form 11 (f).

11. Grundzustandsgleichungen und Störungsgleichungen. — Wir können somit nach dem vorhergehenden die Gleichungen des Grundzustandes folgendermaßen aufschreiben:

(A) $$\nabla\mathbf{R}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2}+\frac{1}{Q}\nabla P+\nabla\Phi=0$$

(B) $$Q\,\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial c}-Q_0=0$$

(C) $$Q=Q(a,\,b,\,c,\,P)$$

(D) $$F_0(a,\,b,\,c)=0\,,\qquad F_0(a',\,b',\,c')=0$$

(E) $$[F(\mathbf{R},\,t)=0]\equiv[F'(\mathbf{R}',\,t)=0]$$

(F) $$P(\mathbf{R},\,t)=P'(\mathbf{R}',\,t),\ \ \mathbf{R}'=\mathbf{R},\ \ t=t.$$

Die durch Variationen dieser Gleichungen gebildeten Störungsgleichungen werden

(a) $$\nabla\mathbf{R}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}+\nabla\mathbf{r}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2}+\nabla\left[\frac{p}{Q}+\nabla_R\Phi\cdot\mathbf{r}\right]+\frac{\nabla Q-\gamma\nabla P}{Q^2}p=0$$

(b) $$\gamma\frac{p}{Q}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial c}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial c}+\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial c}+\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial c}=0$$

(c) $$q=\gamma p$$

(d) $$F_0(a,\,b,\,c)=0,\ \ F_0(a',\,b',\,c')=0$$

(e) $$\nabla_R F\cdot\mathbf{r}=\nabla_{R'}F'\cdot\mathbf{r}',\ \ \mathbf{R}'=\mathbf{R}$$

(f) $$p(\mathbf{R},\,t)=p'(\mathbf{R}',\,t),\ \ \mathbf{R}'=\mathbf{R},\ \ t=t.$$

Wenn die Erddrehungsglieder hinzukommen, werden die Bewegungsgleichungen beziehungsweise für Grundzustand und für Störungsbewegung:

(A′) $$\nabla\mathbf{R}\cdot\left(\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2}+2\,\mathbf{\Omega}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}\right)+\frac{1}{Q}\nabla P+\nabla\Phi=0$$

(a′) $$\nabla\mathbf{R}\cdot\left[\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}+2\,\mathbf{\Omega}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}+(\mathbf{r}\cdot\nabla_R 2\,\mathbf{\Omega})\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}\right]+\nabla\mathbf{r}\cdot\left[\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2}+2\,\mathbf{\Omega}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}\right]$$
$$+\nabla\left[\frac{p}{Q}+\nabla_R\Phi\cdot\mathbf{r}\right]+\frac{\nabla Q-\gamma\nabla P}{Q^2}p=0\,.$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn man $\mathbf{\Omega}$ als von den Koordinaten unabhängig ansehen kann, so daß $\nabla_R 2\,\mathbf{\Omega}=0$ ist. Sowohl (a) wie (a′) vereinfachen sich, wenn man von der Veränderlichkeit des Schwerepotentials absehen kann, so daß $\nabla_R\Phi=0$ ist.

12. Anwendung allgemeiner Koordinaten. — Um die verschiedenen Spezialprobleme von allen Seiten angreifen zu können, ist es wichtig, sämtliche Gleichungen auch in beliebigen krummlinigen Koordinaten zu besitzen.

Um solche einführen zu können, kehren wir zu den primären Bewegungsgleichungen 4 (A) zurück. Sie sind nichts als die Bewegungsgleichungen eines Partikelchens unter der Einwirkung zweier Kräfte, mit den Beträgen $-\frac{1}{q}\nabla p$ und $-\nabla\Phi$ pro Masseneinheit.

Denken wir uns die Koordinaten x, y, z dieses Partikelchens durch beliebige andere ψ_1, ψ_2, ψ_3 ersetzt,

$$(\alpha) \qquad x=x(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \quad y=y(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \quad z=z(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t),$$

so lassen sich die Gleichungen nach Lagrange in der bekannten Form schreiben

$$(\beta) \qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} = 0 \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial \psi_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2} = 0 \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial \psi_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_3} = 0 .
\end{aligned}$$

T ist der Ausdruck der kinetischen Energie pro Masseneinheit

$$(\beta') \qquad T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) .$$

In diesen Ausdruck sind die neuen Variablen nach (α) einzuführen. Behält man die Zeit t in den Gleichungen (α) bei, so ist auch jeder Fall der relativen Bewegung mit einbegriffen. Wir brauchen deshalb nicht die Erddrehungsglieder explizite einzusetzen.

Wendet man diese Gleichungen unmittelbar auf sämtliche Partikelchen einer Flüssigkeit an, so zeigen sie dieselbe mathematische Unvollkommenheit wie die entsprechenden kartesischen 4 (A), keine getrennten Systeme von abhängigen und unabhängigen Variablen zu haben. Zu der Lagrangeschen Form der Gleichungen der Hydrodynamik, bezogen auf allgemeine Koordinaten, gelangt man, indem man ψ_1, ψ_2, ψ_3 als abhängige Variablen, d. h. als Koordinaten der bewegten Partikelchen, beibehält und beliebige neue Koordinaten a, b, c zur eindeutigen Numerierung einführt. Die drei auf diese unabhängigen Variablen bezogenen Gleichungen erhält man, indem man die Gleichungen (β) einmal mit $\frac{\partial \psi_1}{\partial a}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial a}$, $\frac{\partial \psi_3}{\partial a}$ multipliziert und addiert, einmal mit $\frac{\partial \psi_1}{\partial b}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial b}$, $\frac{\partial \psi_3}{\partial b}$ und einmal mit $\frac{\partial \psi_1}{\partial c}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial c}$, $\frac{\partial \psi_3}{\partial c}$. Man kommt somit zu den folgenden, im doppelten Sinne des Wortes Lagrangeschen Gleichungen

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial a} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2}\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial a} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3}\right)\frac{\partial \psi_3}{\partial a} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\
&\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial b} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2}\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial b} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3}\right)\frac{\partial \psi_3}{\partial b} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\
&\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial c} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2}\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial c} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3}\right)\frac{\partial \psi_3}{\partial c} + \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 ,
\end{aligned}$$

wo man, nach Substitution von (α) in (β')

$$(\mathrm{A}') \qquad T = T(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, t)$$

hat.

Zum vollen Verständnis dieser Formeln und der darin benützten Bezeichnungen ist es wichtig, daran festzuhalten, daß (A) nicht die expliziten Bewegungsgleichungen selbst sind, sondern Rechenschemata, um sie zu bilden. In diesen Rechenschemata ist das von (β) übernommene Symbol einer totalen Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ beibehalten worden, zum Zeichen, daß man die Reihenfolge der beiden Operationen $\frac{d}{dt}$ und $\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}$ nicht vertauschen darf. Die

Zeitableitungen aber, die in den fertig gebildeten Gleichungen vorkommen, sind partielle, bei konstantem Werte von a, b, c gebildete Ableitungen, die wir durch $\frac{\partial}{\partial t}$ oder mit den Newtonschen Punkten zu bezeichnen haben.

Zur Transformation der Kontinuitätsgleichung 5 (B) schreiben wir mit Funktionaldeterminantenbezeichnung, und mit a', b', c' als Numerierungskoordinaten

$$q\frac{D(x, y, z)}{D(a', b', c')} - q_0\frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a', b', c')} = 0.$$

In der ersten Determinante führen wir als intermediäre Variable erst die neuen abhängigen Variablen ψ_1, ψ_2, ψ_3 und dann die neuen Numerierungskoordinaten a, b, c ein. In der zweiten Determinante führt man entsprechend erst die Anfangswerte ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0 der neuen abhängigen Variablen und dann die Numerierungskoordinaten a, b, c ein. Die letzten brauchen also weder mit ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0 noch mit a', b', c' identisch zu sein. Es wird dann

$$q\frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)}\frac{D(a, b, c)}{D(a', b', c')}$$

$$- q_0\frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}\frac{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}{D(a, b, c)}\frac{D(a, b, c)}{D(a', b', c')} = 0.$$

Es fällt ein gemeinschaftlicher Faktor fort, der die ursprünglichen Numerierungskoordinaten a', b', c' enthält, und die Gleichung wird

$$\text{(B)} \qquad q\,D\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} - q_0\,D_0\frac{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}{D(a, b, c)} = 0,$$

wo D und D_0 die Ausdrücke

$$\text{(B')} \qquad D = \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}, \quad D_0 = \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}$$

sind. In diesen Ausdrücken hat man nach (α) die Werte von x, y, z einzuführen, dann ist (B) die neue Kontinuitätsgleichung. — Wenn die Numerierungskoordinaten Anfangskoordinaten sind, wird die Gleichung (B) einfacher:

$$\text{(B'')} \qquad q\,D\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} - q_0 D_0 = 0.$$

Alle anderen Gleichungen sind Gleichungen endlicher Form, die sich unmittelbar durch die Substitution (α) transformieren. Wir brauchen sie deshalb nicht aufzuschreiben.

Bei der Anwendung der krummlinigen Koordinaten geht das geometrische *Bild* des Vektors verloren. Wegen der Symmetrie kann man aber rein formal durch Vektorbezeichnungen die Gleichungen in eine konzentriertere Form bringen. Dies wird uns im folgenden nützlich sein. Zunächst kann man die drei Ableitungen der Größen ψ_1, ψ_2, ψ_3 nach a, b, c als die Komponenten dreier Vektoren $\nabla\psi_1$, $\nabla\psi_2$, $\nabla\psi_3$ auffassen und dementsprechend die drei Gleichungen (A) als eine Vektorgleichung schreiben

$$\text{(A'')} \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right)\nabla\psi_1 + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial\psi_2}\right)\nabla\psi_2 + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial\psi_3}\right)\nabla\psi_3 + \frac{1}{q}\nabla p + \nabla\Phi = 0.$$

Wenn man dann noch ψ_1, ψ_2, ψ_3 als Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{\psi}$ auffassen will, und $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{\psi}}} - \frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\psi}}$ als einen Vektor definiert, dessen Komponenten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1}-\frac{\partial T}{\partial \psi_1},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2}-\frac{\partial T}{\partial \psi_2},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3}-\frac{\partial T}{\partial \psi_3}$$

sind, so läßt sich die Gleichung (A), entsprechend 7 (β), in der konzisen Form

$$\text{(A''')} \qquad \nabla \boldsymbol{\psi}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}}-\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\psi}}\right)+\frac{1}{q}\nabla p+\nabla \Phi=0$$

schreiben.

Um Störungsgleichungen aus den auf allgemeine Koordinaten bezogenen Gleichungen abzuleiten, ist der direkte Weg der folgende. Man führt die in den Bewegungsgleichungen (A), (A''), (A''') vorkommenden Differentiationen aus, so daß man die Bewegungsgleichungen mit den neuen abhängigen Variablen explizite erhält. Dann werden jede dieser abhängigen Variablen in die Summe einer endlichen Größe und einer Zuschlagsgröße erster Ordnung zerlegt, und die Linearisierung in der üblichen Weise vorgenommen.

Statt diesen Weg zu gehen, kann man aber auf die explizite gebildeten Gleichungen dieselbe Variationsmethode wie oben anwenden, indem man die Operation δ als unabhängig auffaßt von den in den Gleichungen vorkommenden Differentiationsoperationen.

Zuletzt kann man aber die Variation der explizite ausgerechneten Gleichungen durch Variation der formalen Gleichungen (A), (A'') oder (A''') ersetzen, vorausgesetzt, daß man die Variation immer nach demselben Prinzipe ausführt: *das δ wird als eine von den sonst in den Gleichungen vorkommenden Differentiationen unabhängige Operation betrachtet.* Das heißt, man variiert sämtliche in T implizite enthaltenen abhängigen Variablen. Man variiert aber nicht das als Nenner in der Operation $\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}$ oder $\frac{\partial}{\partial \psi}$ vorkommende ψ. Die nach diesen einfachen Prinzipien auszuführende Variation gibt eine einfache Rechenarbeit, so daß man gleich die Störungsgleichungen aufschreiben kann.

13. Grundzustandsgleichungen und Störungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten. — Der Grundzustand soll jetzt durch die abhängigen Variablen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, P und Q gegeben sein. Man hat

$$(\alpha) \qquad X=X(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t), \quad Y=Y(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t), \quad Z=Z(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t).$$

Die unabhängigen Variablen a, b, c sollen die Werte von Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 zur Zeit $t=t_0$ sein

$$(\beta) \qquad t=t_0, \quad a=\Psi_1^0, \quad b=\Psi_2^0, \quad c=\Psi_3^0.$$

Die Gleichungen des Grundzustandes lassen sich dann schreiben

$$\text{(A)} \qquad \nabla \boldsymbol{\Psi}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\Psi}}}-\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Psi}}\right)+\frac{1}{Q}\nabla P+\nabla \Phi=0$$

$$\text{(B)} \qquad Q\,D\,\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{D(a, b, c)}-Q_0 D_0=0$$

$$\text{(C)} \qquad Q=Q(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, P)$$

$$\text{(D)} \qquad F_0(a, b, c)=0, \qquad F_0(a', b', c')=0$$

$$\text{(E)} \qquad [F(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t)=0]\equiv[F'(\Psi'_1, \Psi'_2, \Psi'_3, t)=0]$$

$$\text{(F)} \qquad P(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t)=P'(\Psi'_1, \Psi'_2, \Psi'_3, t), \; \Psi'_1=\Psi_1, \; \Psi'_2=\Psi_2, \; \Psi'_3=\Psi_3, \; t=t.$$

Die in den Bewegungsgleichungen vorkommende Größe T ist

$$\text{(A')} \qquad T=\frac{1}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)=T(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2, \dot{\Psi}_3, t),$$

die man direkt mit Hilfe der Gleichungen (α) berechnet. In ähnlicher Weise berechnet man die in der Kontinuitätsgleichung vorkommende Größe D,

$$D = \frac{D(X, Y, Z)}{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)} = D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t). \tag{B'}$$

Es wird kein Mißverständnis veranlassen, daß in dieser letzten Gleichung der Buchstabe D sowohl als Funktionenzeichen wie als Differentiationszeichen benutzt worden ist.

Um die Störungsgleichungen zu bilden, hat man nun die erste Variation der obigen Gleichungen in bezug auf sämtliche abhängigen Variablen zu nehmen, das heißt in bezug auf den symbolischen Vektor $\boldsymbol{\Psi}$ mit den Komponenten Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, und in bezug auf die Skalargrößen P und Q; und dann sind die Variationen $\delta\boldsymbol{\Psi}$, δP, δQ durch die kleinen Größen $\boldsymbol{\psi}$, p und q zu ersetzen, wo $\boldsymbol{\psi}$ wieder ein symbolischer Vektor mit den Komponenten ψ_1, ψ_2, ψ_3 ist. Indem wir die entsprechende Variation von T durch τ und von D durch d bezeichnen, und zugleich die Druck- und Kraftglieder in derselben Weise wie vorher umformen, finden wir

$$\nabla\boldsymbol{\Psi}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\tau}{\partial\dot{\boldsymbol{\Psi}}} - \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{\Psi}}\right) + \nabla\boldsymbol{\psi}\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{\Psi}}} - \frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\Psi}}\right) + \nabla\left[\frac{p}{Q} + \boldsymbol{\psi}\cdot\nabla_{\Psi}\Phi\right] + \frac{\nabla Q - \gamma\nabla P}{Q^2}p = 0 \tag{a}$$

$$\left(\frac{\gamma p}{Q} + \frac{d}{D}\right)\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\Psi_1, \psi_2, \Psi_3)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} = 0 \tag{b}$$

$$q = \gamma p \tag{c}$$

$$F_0(a, b, c) = 0, \quad F_0(a', b', c') = 0 \tag{d}$$

$$\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla_{\Psi} F = \boldsymbol{\psi}'\cdot\nabla_{\Psi'} F', \quad \boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Psi} \tag{e}$$

$$p(\boldsymbol{\Psi}, t) = p'(\boldsymbol{\Psi}', t), \quad \boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Psi}, \quad t = t. \tag{f}$$

In Gleichung [a] hat τ die Bedeutung

$$\tau = \frac{\partial T}{\partial\dot{\Psi}_1}\dot{\psi}_1 + \frac{\partial T}{\partial\dot{\Psi}_2}\dot{\psi}_2 + \frac{\partial T}{\partial\dot{\Psi}_3}\dot{\psi}_3 + \frac{\partial T}{\partial\Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial T}{\partial\Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial T}{\partial\Psi_3}\psi_3. \tag{a'}$$

Und ganz entsprechend hat die Grösse d in Gleichung (b) die Bedeutung

$$d = \frac{\partial D}{\partial\Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial D}{\partial\Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial D}{\partial\Psi_3}\psi_3. \tag{b'}$$

Über die Kontinuitätsgleichung ist zu bemerken, daß sie durch Division mit dem Faktor QD auf möglichst konzise Form gebracht worden ist. In vielen Fällen wird es aber zweckmäßiger sein, diesen Faktor wieder hoch zu multiplizieren, weil D, wie in den Beispielen unten mit zylindrischen oder polaren Koordinaten, gleich Null werden kann.

14. Die voll entwickelten kartesischen Gleichungen. — Die somit entwickelten allgemeinen Gleichungen sollen jetzt zur Veranschaulichung explizite aufgeschrieben werden in einer Reihe von Spezialfällen, wo wichtige Aufgaben zur Lösung vorliegen. Dabei werde ich gewöhnlich nicht mehr die Grenzflächenbedingungen mitnehmen, sondern nur die Hauptgleichungen.

Der mit Vektorrechnung Vertraute entnimmt die Spezialfälle leicht den mit Vektorbezeichnung geschriebenen allgemeinen Gleichungen. Zur Erleichterung schreibe ich aber die entsprechenden Gleichungen explizite auf. Für den Grundzustand haben wir dann bei absoluter Bewegung:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial a}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial a}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial b}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial b}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial b}=0 \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial c}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial c}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial c}=0 \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad Q\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial a} & \dfrac{\partial X}{\partial b} & \dfrac{\partial X}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial a} & \dfrac{\partial Y}{\partial b} & \dfrac{\partial Y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial a} & \dfrac{\partial Z}{\partial b} & \dfrac{\partial Z}{\partial c} \end{vmatrix} - Q_0 = 0$$

$$\text{(C)}\quad Q = Q(a,\, b,\, c,\, P)\,.$$

Für die kleinen Störungen gelten

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial a}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial a} \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial a}\left[\dfrac{p}{Q}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial X}x+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}y+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}z\right]+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial a}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial a}\right)\dfrac{p}{Q^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial b}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial b} \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial b}\left[\dfrac{p}{Q}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial X}x+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}y+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}z\right]+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial b}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial b}\right)\dfrac{p}{Q^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\dfrac{\partial X}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\dfrac{\partial Y}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\dfrac{\partial Z}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}\dfrac{\partial x}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\dfrac{\partial y}{\partial c}+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\dfrac{\partial z}{\partial c} \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial c}\left[\dfrac{p}{Q}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial X}x+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}y+\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}z\right]+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial c}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial c}\right)\dfrac{p}{Q^2}=0 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \gamma\frac{p}{Q}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial a} & \dfrac{\partial X}{\partial b} & \dfrac{\partial X}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial a} & \dfrac{\partial Y}{\partial b} & \dfrac{\partial Y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial a} & \dfrac{\partial Z}{\partial b} & \dfrac{\partial Z}{\partial c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial X}{\partial b} & \dfrac{\partial X}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial Y}{\partial b} & \dfrac{\partial Y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial Z}{\partial b} & \dfrac{\partial Z}{\partial c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial X}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial Y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial Z}{\partial c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial a} & \dfrac{\partial X}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial a} & \dfrac{\partial Y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial a} & \dfrac{\partial Z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(c)}\quad q = \gamma p\,.$$

Wenn zugleich die Erddrehung zu berücksichtigen ist, wird die erste Gleichung (A)

$$\text{(A')}\quad \left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+2\left(\Omega_y\frac{\partial Z}{\partial t}-\Omega_z\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial X}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+2\left(\Omega_z\frac{\partial X}{\partial t}-\Omega_x\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial Y}{\partial a}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+2\left(\Omega_x\frac{\partial Y}{\partial t}-\Omega_y\frac{\partial X}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial Z}{\partial a}+\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial a}=0\,.$$

Die beiden andern folgen, wenn man a erst durch b und dann durch c ersetzt. Die Gleichung für die a-Koordinate der Störungsbewegung wird, solange man mit einem von den Koordinaten unabhängigen Ω rechnen darf:

$$\text{(a')}\quad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\left(\Omega_y\frac{\partial z}{\partial t}-\Omega_z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial X}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\left(\Omega_z\frac{\partial x}{\partial t}-\Omega_x\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial Y}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+2\left(\Omega_x\frac{\partial y}{\partial t}-\Omega_y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial Z}{\partial a}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+2\left(\Omega_y\frac{\partial Z}{\partial t}-\Omega_z\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+2\left(\Omega_z\frac{\partial X}{\partial t}-\Omega_x\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+2\left(\Omega_x\frac{\partial Y}{\partial t}-\Omega_y\frac{\partial X}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial a}$$
$$+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{p}{Q}+\frac{\partial \Phi}{\partial X}x+\frac{\partial \Phi}{\partial Y}y+\frac{\partial \Phi}{\partial Z}z\right]+\left[\frac{\partial Q}{\partial a}-\gamma\frac{\partial P}{\partial a}\right]\frac{p}{Q^2}=0\,.$$

Die beiden andern Gleichungen folgen wieder, indem man das a erst durch b und dann durch c ersetzt. Die Störungsgleichungen sind vollständig, solange man von der Veränderlichkeit des Vektors $\mathbf{\Omega}$ mit der Breite absehen wird, was man natürlich mit Rücksicht auf die Integrationsarbeit solange wie möglich tun wird. Bei Störungsbewegungen von den Dimensionen der Zyklonen wird aber dies in der Wahrheit nie gestattet sein. Schließlich wird man deshalb auf die vollständige Gleichung zurückgreifen, wo auch die räumlichen Ableitungen von $\mathbf{\Omega}$ wie von Φ auftreten:

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2\left(\Omega_y\frac{\partial z}{\partial t}-\Omega_z\frac{\partial y}{\partial t}\right)+2\left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_y}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_y}{\partial Z}z\right)\frac{\partial Z}{\partial t}-2\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_z}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_z}{\partial Z}z\right)\frac{\partial Y}{\partial t}\right]\frac{\partial X}{\partial a}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\left(\Omega_z\frac{\partial x}{\partial t}-\Omega_x\frac{\partial z}{\partial t}\right)+2\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_z}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_z}{\partial Z}z\right)\frac{\partial X}{\partial t}-2\left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_x}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_x}{\partial Z}z\right)\frac{\partial Z}{\partial t}\right]\frac{\partial Y}{\partial a}$$
$$\text{(a'')}\quad +\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+2\left(\Omega_x\frac{\partial y}{\partial t}-\Omega_y\frac{\partial x}{\partial t}\right)+2\left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_x}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_x}{\partial Z}z\right)\frac{\partial Y}{\partial t}-2\left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial X}x+\frac{\partial \Omega_y}{\partial Y}y+\frac{\partial \Omega_y}{\partial Z}z\right)\frac{\partial X}{\partial t}\right]\frac{\partial Z}{\partial a}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+2\left(\Omega_y\frac{\partial Z}{\partial t}-\Omega_z\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+2\left(\Omega_z\frac{\partial X}{\partial t}-\Omega_x\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial a}+\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+2\left(\Omega_x\frac{\partial Y}{\partial t}-\Omega_y\frac{\partial X}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial a}$$
$$+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{p}{Q}+\frac{\partial \Phi}{\partial X}x+\frac{\partial \Phi}{\partial Y}y+\frac{\partial \Phi}{\partial Z}z\right]+\left[\frac{\partial Q}{\partial a}-\gamma\frac{\partial P}{\partial a}\right]\frac{p}{Q^2}=0\,.$$

Die beiden andern Gleichungen folgen, wenn man a durch b und durch c ersetzt.

Der Vergleich dieser drei Gleichungen mit der einen 11 (a') gibt ein gutes Beispiel von dem Vermögen der Vektoranalysis, den Formelapparat zu konzentrieren, und weist auf die Vorteile hin, die Vektorbezeichnung möglichst lange beizubehalten.

15. Gleichungen der Akustik. — Der Grundzustand sei ein Zustand des Gleichgewichtes. Der Radiusvektor $\mathbf{R}$ eines Partikelchens im Grundzustand behält immer seinen Anfangswert $\mathbf{R}_0$ bei, und die Projektionen X, Y, Z von $\mathbf{R}$ sind mit den Anfangskoordinaten a, b, c identisch:

$$(\alpha)\qquad \mathbf{R}=\mathbf{R}_0;\ \text{oder}\ X=a,\ Y=b,\ Z=c.$$

Dieser Gleichgewichtszustand soll ohne Eingreifen äußerer Kräfte bestehen, was sich durch $\Phi=\text{const.}$ ausdrückt. Wenn man dies zugleich mit (α) in die Gleichungen des Grundzustandes einführt, ergibt sich ein räumlich konstanter Wert von P. Setzen wir zugleich Homogenität voraus, d. h. $Q=\text{const.}$, so hat man im Grundzustand einfach

$$\text{(A)}\qquad P=\text{const.},\quad Q=\text{const.},\quad \Phi=\text{const.}$$

Die Störungsgleichungen sind jetzt nach (α) und (A) zu vereinfachen. Benutzen wir die Vektorform, so folgt aus 7 (ε), daß sich das erste Trägheitsglied in 11 (a) auf $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}$ reduziert. Das zweite verschwindet, weil $\mathbf{R}$ von der Zeit unabhängig ist. Das Druckglied reduziert sich auf $\frac{1}{Q} \nabla p$. Die Ableitungen von $\mathbf{R}$ nach a, b, c geben nach (α) drei Einheitsvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} = \mathbf{a}_{\mathrm{I}}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b} = \mathbf{b}_{\mathrm{I}}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c} = \mathbf{c}_{\mathrm{I}},$$

gerichtet beziehungsweise längs den Achsen a, b, c. Benutzt man dieses in der Kontinuitätsgleichung 11 (b), so findet man als Wert des ersten parallelepipedischen Produktes 1, und als Wert der drei folgenden $\mathbf{a}_{\mathrm{I}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} + \mathbf{b}_{\mathrm{I}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} + \mathbf{c}_{\mathrm{I}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = \operatorname{div} \mathbf{r}$. Die Störungsgleichungen in Vektorform werden somit

$$\text{(a, b, c)} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\frac{1}{Q} \nabla p, \quad \gamma \frac{p}{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{r}, \quad q = \gamma p.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen kann man leicht einmal p und einmal $\mathbf{r}$ eliminieren. Dies gibt die Gleichungen

$$\text{(a', b')} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{r}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma} \nabla^2 p$$

oder explizite kartesisch geschrieben

$$\text{(a'', b'')} \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right) \\
\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial c^2}\right).
\end{aligned}$$

Man gelangt direkt zu diesen kartesischen Gleichungsformen von den Gleichungen 14 (a) und (b) aus, indem man in sie nach (α)

$$(\beta) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial c} = 0, \\
&\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial c} = 0, \\
&\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial c} = 1
\end{aligned}$$

einführt.

Als Lösungen geben diese Gleichungen reine Longitudinalwellen, die sich mit der Schallgeschwindigkeit $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ fortpflanzen. Das Mitnehmen der Erddrehungsglieder ist von untergeordnetem Interesse.

16. Störung eines beliebigen Gleichgewichtszustandes. — Der Grundzustand soll jetzt ein ganz beliebiger Gleichgewichtszustand sein, der unter der Wirkung beliebiger äußerer Kräfte besteht. Das Potential Φ dieser Kräfte ist dann nicht mehr konstant, und statt auf 15 (A) führen die Gleichungen des Grundzustandes auf

$$\nabla P = -Q \nabla \Phi, \quad \text{oder} \quad dP = -Q\, d\Phi\,. \tag{A}$$

Diese Gleichung enthält das bekannte Resultat, daß sowohl die Flächen gleichen Druckes wie die Flächen gleicher Dichte im Falle des Gleichgewichtes mit den Flächen gleichen Potentiales zusammenfallen. Die physikalische Gleichung kann deshalb nicht eine beliebige Funktion von a, b, c und P sein, sondern muß die Form $Q = Q\,(\Phi, P)$ haben, wo a, b, c implizite in Φ und P eingehen. Mit Hilfe dieser Relation läßt sich die Gleichung (A) integrieren, und gibt sowohl P als Q explizite als Funktionen von Φ, $P = F_1\,(\Phi)$, $Q = F_2\,(\Phi)$. Eliminiert man aus diesen Gleichungen das Φ, so kann man die räumliche Verteilung von Q auf die von P beziehen, $Q = F_3\,(P)$, und eine Ableitung

$$\Gamma = \frac{dQ}{dP} \tag{α}$$

definieren. Dieses Γ hat also nur mit der räumlichen Verteilung der Größen P und Q zu tun, im Gegensatz zu dem physikalischen γ, 4 (C'), welches das Verhalten der Dichte bei Kompression charakterisiert. Wenn wir dieses Γ benutzen, können wir $\nabla Q = \Gamma \nabla P$ oder unter Benutzung von (A)

$$\nabla Q = -Q \Gamma \nabla \Phi \tag{β}$$

schreiben.

Die Trägheitsglieder der Störungsgleichung reduzieren sich ganz wie im vorigen Falle. Nur die vom Drucke P und vom Potential Φ abhängigen Glieder treten wieder in den Gleichungen auf, und spezialisieren sich entsprechend den Relationen (A) und (β). Die Kontinuitätsgleichung bleibt ganz wie im vorigen Falle, und die Störungsgleichungen in Vektorform werden:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{p}{Q} + \nabla_R \Phi \cdot \mathbf{r} \right) - \frac{\Gamma - \gamma}{Q} p \nabla \Phi = 0 \tag{a}$$

$$\gamma \frac{p}{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{r}, \quad q = \gamma p\,. \tag{b, c}$$

Elimination des Druckes p aus der Bewegungsgleichung gibt

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{r} - \nabla_R \Phi \cdot \mathbf{r} \right) + \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma} \nabla \Phi \operatorname{div} \mathbf{r} = 0\,. \tag{a'}$$

Man schreibt leicht die kartesische Entwickelung dieser Gleichungen aus, oder entwickelt sie aus den allgemeinen kartesischen Gleichungen 14. Für den Fall einer konstanten Schwerkraft, abwärts längs der z-Achse gerichtet, hat man $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = g$, und die Gleichungen werden

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} \right] - g z \right\} = 0 \\
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} \right] - g z \right\} = 0 \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} \right] - g z \right\} + \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma} g \left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} \right) = 0\,.
\end{aligned} \tag{a''}$$

Während die akustischen Gleichungen als Lösungen reine Longitudinalwellen geben, die sich durch rein elastische Energie fortpflanzen, wird man als Lösung dieser Gleichungen kombinierte Longitudinal- und Transversalwellen finden, die sich sowohl durch Schwerkraftenergie wie durch elastische Energie fortpflanzen, ganz unabhängig von freier Oberfläche oder inneren Grenzflächen. Besonders zeigen die Lösungen den intimen Zusammenhang zwischen Welle und Wirbel. Diese inneren Wellen sind Wirbel, die aber nicht mehr wie die Helmholtz'schen an die sie einmal tragenden Massen gebunden sind, sondern sich durch die Flüssigkeit von Masse zu Masse fortpflanzen. Man findet einen sehr lehrreichen und leicht explizite durchführbaren Fall, wenn die Dichte im Gleichgewichtszustande exponentiell mit der Höhe abnimmt, wie in der isothermen Atmosphäre.

Sehr wichtig ist auch der Fall, wo sich die Dichte in ein oder mehreren Niveaus unstetig verändert. Man hat dann die allgemeinen Gleichungen für jede einzelnen Schichten zu lösen, und die Lösungen mit Hilfe der Grenzflächenbedingungen zusammenzufügen. Nimmt man speziell die einzelnen Schichten barotrop an, so kommt man auf Fälle, die im Rahmen der klassischen Hydrodynamik, doch wesentlich nur für den Fall der Inkompressibilität, behandelt worden sind.

17. Störung geradliniger Strömungen. — Im Grundzustande soll sich jedes Partikelchen geradlinig und gleichmäßig parallel der ab-Ebene bewegen, mit einer Geschwindigkeit, die nur vom Abstande c von dieser Ebene abhängt. Für X, Y, Z und ihre Ableitungen haben wir dann

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} X&=A(c)\,t+a & \frac{\partial X}{\partial a}&=1, & \frac{\partial X}{\partial b}&=0, & \frac{\partial X}{\partial c}&=A'\,t \\ Y&=B(c)\,t+b & \frac{\partial Y}{\partial a}&=0, & \frac{\partial Y}{\partial b}&=1, & \frac{\partial Y}{\partial c}&=B'\,t \\ Z&=c & \frac{\partial Z}{\partial a}&=0, & \frac{\partial Z}{\partial b}&=0, & \frac{\partial Z}{\partial c}&=1\,. \end{aligned}$$

Wenn wir das in die Gleichungen des Grundzustandes einführen, kommen wir zu den Gleichgewichtsgleichungen 16 (A), (α), (β) zurück. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen der kleinen Störungen gibt

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}+\mathbf{k}\,t\left(A'\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)+\nabla\left(\frac{p}{Q}+\nabla_R\Phi\cdot\mathbf{r}\right)-\frac{\Gamma-\gamma}{Q}p\nabla\Phi=0$$

$$\text{(b, c)}\qquad \gamma\frac{p}{Q}+\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-t\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)=0\,,\quad q=\gamma p\,.$$

Wenn man die Elimination des Druckes ausführt, wird

$$\text{(a')}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}+\mathbf{k}\,t\left(A'\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)-\nabla\left[\frac{1}{\gamma}\left(\operatorname{div}\mathbf{r}-t\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)\right)-\nabla_R\Phi\cdot\mathbf{r}\right] \\ &\qquad\qquad +\frac{\Gamma-\gamma}{\gamma}\nabla\Phi\left(\operatorname{div}\mathbf{r}-t\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)\right)=0\,. \end{aligned}$$

Im Falle konstanter, längs der z-Achse abwärts gerichteter Schwerkraft kommt man zu der folgenden Verallgemeinerung des Gleichungssystemes

$$
\text{(a'')}\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)t\right)-gz\right]=0\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)t\right)-gz\right]=0\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+A't\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+B't\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)t\right)-gz\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{\Gamma-\gamma}{\gamma}\left[\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(A'\frac{\partial z}{\partial a}+B'\frac{\partial z}{\partial b}\right)t\right]g=0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen führen zu vielen interessanten Spezialaufgaben, die man durch Integration lösen kann.

Wenn A und B von z unabhängig sind, d. h. wenn der Grundstrom in allen Höhen gleiche Richtung und Stärke hat, kommt man auf die Gleichungen 16 (a'') für die Störung des Gleichgewichtes zurück. Folgen der Horizontalbewegung kommen aber durch die Grenzflächenbedingungen hinein, wenn mehrere verschieden bewegte Schichten aufeinander ruhen.

18. Das Zyklonenproblem. — Wir brauchen jetzt nur noch das vorangehende Problem über die geradlinigen Ströme durch das Hinzufügen der Erddrehungsglieder zu verallgemeineren, um dem vollständigen Problem der Zyklonenbildung in einfachster Form zu begegnen.

Zunächst wird durch die Erddrehungsglieder der Grundzustand wesentlich modifiziert. Zur Vereinfachung können wir den geradlinigen Strom in allen Höhen längs der x-Achse gerichtet annehmen, so daß in 17 (α) $Y = b$ wird. Mit dieser Vereinfachung setzt man 17 (α) in die Gleichungen 14 (A') ein, wobei noch

$$
(\alpha)\qquad \frac{\partial X}{\partial t}=A(c),\quad \frac{\partial Y}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial t}=0
$$

zu erinnern ist. Die Kontinuitätsgleichung wird identisch erfüllt. Setzt man noch $\frac{\partial \Phi}{\partial a}=\frac{\partial \Phi}{\partial b}=0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial c}=g,$ so werden die Bewegungsgleichungen 14 (A') des Grundzustandes

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial a}=0\\
&2\,\Omega_z\,A(c)+\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial b}=0\\
-&2\,\Omega_y\,A(c)+\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial c}+g=0\,.
\end{aligned}
$$

Da P von a unabhängig ist, darf a in den beiden letzten Gleichungen auch nicht vorkommen. Das heißt, auch Q muß von a unabhängig sein, und die physikalische Gleichung darf auch nur die Koordinaten b und c enthalten:

$$
\text{(C)}\qquad Q=Q(b,c,P)\,.
$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich nun das Q aus den Gleichungen (A) eliminieren. Und ist dann $A(c)$ gegeben, so gestatten diese Gleichungen, den Druck P als Funktion von b und c zu bestimmen. Dies in (C) eingesetzt gibt die Dichte eines beliebigen Partikelchens im Grundzustand.

Dieser gleichmäßige Strom wird nun gestört. Wenn wir von den allgemeinen Gleichungen 14 (a') ausgehen, und also von der Veränderlichkeit der Vektorkomponenten Ω_x, Ω_y, Ω_z mit der Breite absehen, werden die entsprechenden Gleichungen der kleinen Störung

$$
\text{(a)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\,\Omega_y \frac{\partial z}{\partial t} - 2\,\Omega_z \frac{\partial y}{\partial t} + 2\,\Omega_z A \frac{\partial y}{\partial a} - 2\,\Omega_y A \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{p}{Q} + g z\right] = 0\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\,\Omega_z \frac{\partial x}{\partial t} - 2\,\Omega_x \frac{\partial z}{\partial t} + 2\,\Omega_z A \frac{\partial y}{\partial b} - 2\Omega_y A \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{p}{Q} + g z\right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial b} - \gamma \frac{\partial P}{\partial b}\right]\frac{p}{Q^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\,\Omega_x \frac{\partial y}{\partial t} - 2\,\Omega_y \frac{\partial x}{\partial t} + 2\,\Omega_z A \frac{\partial y}{\partial c} - 2\,\Omega_y A \frac{\partial z}{\partial c} + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\,\Omega_y \frac{\partial z}{\partial t} - 2\,\Omega_z \frac{\partial y}{\partial t}\right] A' t\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{p}{Q} + g z\right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial c} - \gamma \frac{\partial P}{\partial c}\right]\frac{p}{Q^2} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

wo P und Q bekannte Funktionen von b und c sind. Die Kontinuitätsgleichung bleibt dieselbe wie oben 17 (b), wenn keine Erddrehung vorhanden war, nur daß jetzt zur Vereinfachung $B=0$, so daß

$$
\text{(b)}\qquad \gamma \frac{p}{Q} + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} - A' \frac{\partial z}{\partial a} t = 0\,.
$$

Sie gestattet gleich durch Substitution die Elimination des Druckzuschlages p aus den Bewegungsgleichungen, vorausgesetzt, daß man nicht einleitungsweise eine Vereinfachung des Problems durch die Inkompressibilitätsbedingung $\gamma = 0$ suchen will.

Um dem Problem völlig konkrete Form zu geben, hat man den Grundzustand festzulegen durch eine bestimmte Voraussetzung, entweder über die Dichteverteilung oder über die Windverteilung mit der Höhe. Die Integration wird zum Beispiel durchführbar, wenn man eine exponentiell nach oben abnehmende Dichte annimmt. Die innere Wellenbewegung, die oben schon besprochen ist, wird man dann in verallgemeinerter Form wiederfinden. Solange keine Erddrehung eingreift, ist dabei die Orbitalbewegung in den Vertikalebenen enthalten, und die Wirbel sind Vertikalwirbel mit horizontaler Achse. Unter der Wirkung der Erddrehung müssen sich aber die Orbitalebenen umlegen, und die Wirbel werden angenähert Horizontalwirbel mit vertikaler Achse: man nähert sich der wirklichen Zyklone.

Die schematische Zyklone, deren Theorie man somit recht vollständig entwickeln kann, unter Anwendung elementarer mathematischer Hilfsmittel, wird sich von den wirklichen vornehmlich dadurch unterscheiden, daß alle Übergänge stetig sind, während man in den wirklichen Zyklonen, solange sie noch jung und mit kleinen Störungen zu vergleichen sind, plötzliche Wind- und Temperatur-, d. h. Dichtesprünge vorfindet. Diese stellt man mathematisch durch Diskontinuitäten dar. Man hat dann mehrere aufeinander lagernde Schichten zu betrachten, die sich im Grundzustande durch Wind- und Dichtesprünge voneinander unterscheiden.

Auch in diesem Falle kann man mit elementaren Mitteln lehrreiche Lösungen finden, die aber versagen, wenn das Hauptverlangen hinzukommt, daß die Diskontinuitätsfläche die Erde schneiden soll. Eine noch nicht diskutierte formale Lösung, die diesen Fall betrifft, hat neulich Dr. H. Solberg bei Eulerscher Formulierung des Problems gegeben [1]).

---

[1]) H. Solberg: Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen. I. Geofys. Publ. Vol. V. No. 9. S. 104 ff.

19. Zylindrische Koordinaten. — Als abhängige Variablen des Grundzustandes dienen

$$(\alpha)\qquad \Psi_1 = R, \quad \Psi_2 = \Psi, \quad \Psi_3 = Z,$$

so daß wir für die Transformation

$$(\beta)\qquad X = R\cos\Psi, \quad Y = R\sin\Psi, \quad Z = Z$$

haben. Der Ausdruck der kinetischen Energie pro Masseneinheit wird

$$(\gamma)\qquad T = \frac{1}{2}\left[\dot{R}^2 + R^2\dot{\Psi}^2 + \dot{Z}^2\right].$$

Dieses ist in die Bewegungsgleichungen 13 (A) einzuführen. Wir denken uns die Trägheitsglieder dreigliedrig zerlegt,

$$(\delta)\qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial T}{\partial R}\right)\nabla R + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial T}{\partial \Psi}\right)\nabla\Psi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} - \frac{\partial T}{\partial Z}\right)\nabla Z,$$

bilden die eingeklammerten Glieder nach (γ) und finden

$$(\mathrm{A})\qquad \left(\ddot{R} - R\dot{\Psi}^2\right)\nabla R + \frac{\partial}{\partial t}\left(R^2\dot{\Psi}\right)\nabla\Psi + \ddot{Z}\nabla Z + \frac{1}{Q}\nabla P + \nabla\Phi = 0.$$

Diese Vektorgleichung läßt sich wieder gleich als drei Skalargleichungen schreiben.

Wenn man (α) in den Determinantenausdruck der Größe D einführt 13 (B′), findet man $D = R$. Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich somit:

$$(\mathrm{B})\qquad Q R\frac{D(R,\Psi,Z)}{D(a,b,c)} - Q_0 R_0 = 0.$$

Die übrigen Gleichungen brauchen wir nicht aufzuschreiben: es sind die Gleichungen 13 (C)—(F), wenn man in sie (α) substituiert.

Will man jetzt die Bewegungsgleichungen der kleinen Störung aus der allgemeinen Gleichung 13 (a) entwickeln, so bildet man die Variation von T,

$$\tau = \dot{R}\dot{r} + R\dot{\Psi}^2 r + R^2\dot{\Psi}\dot{\psi} + \dot{Z}\dot{z}$$

und setzt T und τ in die Gleichung 13 (a) ein. Oder man variiert direkt die Gleichung (A). Auf beiden Wegen gelangt man zu der Gleichung

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{aligned}&\left[\ddot{r} - \dot{\Psi}^2 r - 2R\dot{\Psi}\dot{\psi}\right]\nabla R + \frac{\partial}{\partial t}\left(2R\dot{\Psi}r + R^2\dot{\psi}\right)\nabla\Psi + \ddot{z}\nabla Z + \left[\ddot{R} - R\dot{\Psi}^2\right]\nabla r\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left(R^2\dot{\Psi}\right)\nabla\psi + \ddot{Z}\nabla z + \nabla\left[\frac{p}{Q} + r\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \psi\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi} + z\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right] + \left(\nabla Q - \gamma\nabla P\right)\frac{p}{Q^2} = 0.\end{aligned}$$

Für die Kontinuitätsgleichung findet man ähnlich, entweder aus der Gleichung 13 (b), oder durch Variation der Gleichung (B), und indem man $q = \gamma p$ substituiert:

$$(\mathrm{b})\qquad \left(\gamma\frac{p}{Q} + \frac{r}{R}\right)\frac{D(R,\Psi,Z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(r,\Psi,Z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(R,\psi,Z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(R,\Psi,z)}{D(a,b,c)} = 0.$$

Die übrigen Gleichungen sind die Gleichungen 13 (c)—(f), wenn man in sie die Substitution (α) einführt.

20. Der zirkulare Wirbel in zylindrischen Koordinaten. — Die zylindrischen Koordinaten eignen sich besonders zum Studium des wichtigen Falles des zirkularen Wirbels. Wir setzen

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned}R = R_0 = a, &\qquad Z = Z_0 = c,\\ \Psi = \Psi_0 + \Omega t = b + \Omega t, &\qquad \Omega(R,Z) = \Omega(a,c)\end{aligned}$$

und erhalten die folgenden Werte der Differentialquotienten:

$$\dot{R}=0,\ \ddot{R}=0,\ \dot{Z}=0,\ \ddot{Z}=0,\ \dot{\Psi}=\Omega,\ \ddot{\Psi}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a}=1,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial a}=\frac{\partial \Omega}{\partial a}t,\quad \frac{\partial Z}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial b}=1,\quad \frac{\partial Z}{\partial b}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial c}=0,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial c}=\frac{\partial \Omega}{\partial c}t,\quad \frac{\partial Z}{\partial c}=1.$$

Die Gleichungen des Grundstromes werden die folgenden, indem man zu der Kontinuitätsgleichung (B) bemerkt, daß $\frac{D(R,\Psi,Z)}{D(a,b,c)}=1$ ist:

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} -a\,\Omega^2+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial a}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial a}=0 \\ \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial b}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial b}=0 \\ \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial c}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial c}=0 \end{cases}$$

$$\text{(B)}\qquad Q=Q(a,b,c,P)\,.$$

Die entsprechenden Störungsgleichungen werden:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \ddot{r}-\Omega^2 r-2\,a\,\Omega\,\dot{\psi}+(2\,a\,\Omega\,\dot{r}+a^2\ddot{\psi})\dfrac{\partial \Omega}{\partial a}t-a\,\Omega^2\dfrac{\partial r}{\partial a}+\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{p}{Q}+r\dfrac{\partial \Phi}{\partial a}+\psi\dfrac{\partial \Phi}{\partial b}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial c}\right) \\ \qquad\qquad+\dfrac{p}{Q^2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial a}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial a}\right)=0 \\ 2\,a\,\Omega\,\dot{r}+a^2\ddot{\psi}-a\,\Omega^2\dfrac{\partial r}{\partial b}+\dfrac{\partial}{\partial b}\left(\dfrac{p}{Q}+r\dfrac{\partial \Phi}{\partial a}+\psi\dfrac{\partial \Phi}{\partial b}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial c}\right)+\dfrac{p}{Q^2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial b}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial b}\right)=0 \\ \ddot{z}+(2\,a\,\Omega\,\dot{r}+a^2\ddot{\psi})\dfrac{\partial \Omega}{\partial c}t-a\,\Omega^2\dfrac{\partial r}{\partial c}+\dfrac{\partial}{\partial c}\left(\dfrac{p}{Q}+r\dfrac{\partial \Phi}{\partial a}+\psi\dfrac{\partial \Phi}{\partial b}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial c}\right)+\dfrac{p}{Q^2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial c}-\gamma\dfrac{\partial P}{\partial c}\right)=0 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\qquad \gamma\frac{p}{Q}+\frac{r}{a}+\frac{\partial r}{\partial a}+\frac{\partial \psi}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(\frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial \Omega}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial \Omega}{\partial c}\right)t=0,$$

wozu noch die übrigen Gleichungen wie vorher kommen.

Die Integration dieser Gleichungen für den einfachen Fall einer konstanten Schwerkraft gerichtet abwärts längs der z-Achse wird von großem Interesse sein, sowohl wenn alles von festen Wänden eingeschlossen ist, wie wenn freie Oberfläche und auch innere Diskontinuitätsflächen vorkommen.

Ein ganz besonderes Interesse wird noch der aller einfachste Fall haben, wo keine äußere Kraft vorkommt, $\Phi=\text{const.}$, die Flüssigkeit homogen und inkompressibel, $\gamma=0$, und wo Ω von den Koordinaten unabhängig ist. *Der Grundstrom ist dann einfach eine Rotation wie die eines festen Körpers*, wobei die homogene und inkompressible Flüssigkeit in einem ganz geschlossenen Gefäß eingeschlossen ist, und keine äußeren Kräfte wirken. Die Gleichungen des Grundstromes geben dann

$$\text{(A}'\text{)}\qquad \frac{\partial P}{\partial a}=Q\,a\,\Omega^2,\quad P=\frac{1}{2}\,Q\,\Omega^2 a^2+\text{const.},$$

und die Störungsgleichungen reduzieren sich auf

$$\text{(a')}\quad \begin{cases} \ddot{r} - \Omega^2 r - 2a\Omega\dot{\psi} - a\Omega^2 \dfrac{\partial r}{\partial a} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial a} = 0 \\ a^2\ddot{\psi} + 2a\Omega\dot{r} - a\Omega^2 \dfrac{\partial r}{\partial b} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial b} = 0 \\ \ddot{z} - a\Omega^2 \dfrac{\partial r}{\partial c} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b')}\quad \frac{r}{a} + \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0.$$

Wenn zugleich c und z als Variablen verschwinden, ergibt sich noch einfacher:

$$\text{(a'')}\quad \begin{cases} \ddot{r} - \Omega^2 r - 2a\Omega\dot{\psi} - a\Omega^2 \dfrac{\partial r}{\partial a} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial a} = 0 \\ a^2\ddot{\psi} + 2a\Omega\dot{r} - a\Omega^2 \dfrac{\partial r}{\partial b} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b'')}\quad \frac{r}{a} + \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen werden innere Schwingungen geben, die auf eine *Stabilität kinetischen Ursprunges* beruhen.

Entsprechenden *Instabilitäten* wird man sicher auch begegnen, wenn man zu allgemeineren Geschwindigkeitsverteilungen im zirkularen Wirbel zurückkehrt: *man muß auf diesem Wege fundamentale Resultate über Laminarbewegungen und Turbulenzbildung bei gekrümmten Strömen finden können.*

Auch im Zyklonenproblem muß Stabilität oder Instabilität diesen Ursprunges als Folge der Erddrehung eingreifen. Verschiedene dynamisch noch nicht durchdiskutierte Erscheinungen, denen Dr. Solberg bei seiner Arbeit über das Zyklonenproblem begegnet ist, geben hier Fingerzeige[1].

21. Polarkoordinaten. — Die abhängigen Variablen im Grundzustand seien jetzt

$$(\alpha)\quad \Psi_1 = R, \quad \Psi_2 = \Psi, \quad \Psi_3 = \Theta,$$

so daß wir

$$(\beta)\quad X = R\sin\Theta\cos\Psi, \quad Y = R\sin\Theta\sin\Psi, \quad Z = R\cos\Theta$$

haben. Der Ausdruck der Energie und die Größe D wird

$$(\gamma)\quad T = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}^2\right), \quad D = -R^2\sin\Theta.$$

Indem man wie im Falle zylindrischer Koordinaten vorgeht, findet man die Lagrangeschen Gleichungen des Grundzustandes

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &\left(\ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}^2\right)\nabla R + \frac{\partial}{\partial t}\left(R^2\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}\right)\nabla\Psi \\ &\quad + \left[\frac{\partial(R^2\dot{\Theta})}{\partial t} - R^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}^2\right]\nabla\Theta + \frac{1}{Q}\nabla P + \nabla\Phi = 0, \end{aligned}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\text{(B)}\quad QR^2\sin\Theta\,\frac{D(R,\Psi,\Theta)}{D(a,b,c)} - Q_0 R_0^2\sin\Theta_0 = 0,$$

[1] H. Solberg: l. c., p. 60 ff.

wobei man $\Theta_0 = c$ zu berücksichtigen hat. Die übrigen Gleichungen sind die Gleichungen 13 (C)—(F), wenn man in sie (α) substituiert.

Um die Störungsgleichungen nach dem Schema 13 (a)—(f) zu entwickeln, bildet man die Variation der Größen T und D

$$\tau = \dot{R}\dot{r} + R(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\Psi}^2)\,r + R^2\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}\dot{\psi} + R^2\,\dot{\Theta}\dot{\theta} + R^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}^2\,\theta$$

$$d = -2R\sin\Theta\, r - R^2\cos\Theta\,\theta\,.$$

Die Bewegungsgleichung 13(a) wird

$$(a)\left\{\begin{aligned}
&[\ddot{r} - (\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\Psi}^2)\,r - 2R\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}\dot{\psi} - 2R\,\dot{\Theta}\dot{\theta} - 2R\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}^2\,\Theta]\,\nabla R\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial t}(2R\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}r + R^2\sin^2\Theta\,\dot{\psi} + 2R^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}\theta)\right]\nabla\Psi\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial t}(2R\,\dot{\Theta}r + R^2\,\dot{\Theta}) - 2R\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}^2 r - 2R^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}\dot{\psi} - R^2\cos^2\Theta\,\dot{\Psi}^2\,\theta\right]\nabla\Theta\\
&+(\ddot{R} - R\,\dot{\Theta}^2 - R\sin^2\Theta\,\dot{\Psi}^2)\,\nabla r + \frac{\partial}{\partial t}(R^2\sin^2\Theta\,\dot{\Psi})\,\nabla\psi\\
&+\left(\frac{\partial(R^2\,\dot{\Theta})}{\partial t} - R^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\Psi}^2\right)\nabla\theta + \nabla\left(\frac{p}{Q} + r\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \psi\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi} + \theta\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right) + (\nabla Q - \gamma\nabla P)\frac{p}{Q^2} = 0
\end{aligned}\right.$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$(b)\qquad \left(\frac{q}{Q} + 2\frac{r}{R} + \frac{\theta}{\operatorname{tg}\Theta}\right)\frac{D(R,\Psi,\Theta)}{D(a,b,c)} + \frac{D(r,\Psi,\Theta)}{D(a,b,c)} + \frac{D(R,\psi,\Theta)}{D(a,b,c)} + \frac{D(R,\Psi,\theta)}{D(a,b,c)} = 0\,.$$

Alle übrigen Gleichungen behalten ihre gewöhnliche Form.

22. Zirkularer Wirbel in Polarkoordinaten. — Die Polarkoordinaten eignen sich auch besonders für die Behandlung allgemeiner Aufgaben über zirkulare Wirbel.

Der zirkulierende Grundstrom wird dann durch die Gleichungen

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} &R = R_0 = a\,, \quad \Theta = \Theta_0 = c\\ &\Psi = \Psi_0 + \Omega t = b + \Omega t\,, \quad \Omega(R,\Theta) = \Omega(a,c)\end{aligned}$$

definiert. Man erhält dann die folgenden Werte der Differentialquotienten:

$$\dot{R} = 0\,,\quad \ddot{R} = 0\,,\quad \dot{\Theta} = 0\,,\quad \ddot{\Theta} = 0\,,\quad \dot{\Psi} = \Omega\,,\quad \ddot{\Psi} = 0\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 1\,,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial a} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}t\,,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial a} = 0\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = 0\,,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial b} = 1\,,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial b} = 0\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} = 0\,,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial c} = \frac{\partial\Omega}{\partial c}t\,,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial c} = 1\,.$$

Die Gleichungen des Grundstromes werden dann die folgenden, indem man zur Kontinuitätsgleichung bemerkt, daß $\dfrac{D(R,\Psi,\Theta)}{D(a,b,c)} = 1$ ist:

$$
\text{(A)}\quad \left\{\begin{aligned}
-a\Omega^2\sin^2 c+\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}&=0\\
\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial b}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}&=0\\
-a^2\Omega^2\sin c\cos c+\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial c}+\frac{\partial\Phi}{\partial c}&=0
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(B)}\qquad Q=Q(a,b,c,P).
$$

Darauf findet man die Störungsgleichungen

$$
\text{(a)}\left\{\begin{aligned}
&\ddot r-(\Omega r+2a\dot\psi)\Omega\sin^2 c-a\Omega^2\sin 2c\,\theta+[(2\Omega\dot r+a\ddot\psi)a\sin^2 c+a^2\Omega\sin 2c\,\dot\theta]\frac{\partial\Omega}{\partial a}t\\
&-a\Omega^2\sin^2 c\frac{\partial r}{\partial a}-\frac{1}{2}a^2\Omega^2\sin 2c\frac{\partial\theta}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{Q}+r\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\psi\frac{\partial\Phi}{\partial b}+\theta\frac{\partial\Phi}{\partial c}\right)+\frac{p}{Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}-\gamma\frac{\partial P}{\partial a}\right)=0\\
&\quad(2\Omega\dot r+a\ddot\psi)a\sin^2 c+a^2\Omega\sin 2c\,\dot\theta-a\Omega^2\sin^2 c\frac{\partial r}{\partial b}-\frac{1}{2}a^2\Omega^2\sin 2c\frac{\partial\theta}{\partial b}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{Q}+r\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\psi\frac{\partial\Phi}{\partial b}+\theta\frac{\partial\Phi}{\partial c}\right)+\frac{p}{Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}-\gamma\frac{\partial P}{\partial b}\right)=0\\
&a^2\ddot\theta-(\Omega r+a\dot\psi)a\Omega\sin 2c-a^2\Omega^2\cos 2c\,\theta+[(2\Omega\dot r+a\ddot\psi)a\sin^2 c+a^2\Omega\sin 2c\,\dot\theta]\frac{\partial\Omega}{\partial c}t\\
&-a\Omega^2\sin^2 c\frac{\partial r}{\partial c}-\frac{1}{2}a^2\Omega^2\sin 2c\frac{\partial\theta}{\partial c}+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{p}{Q}+r\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\psi\frac{\partial\Phi}{\partial b}+\theta\frac{\partial\Phi}{\partial c}\right)+\frac{p}{Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial c}-\gamma\frac{\partial P}{\partial c}\right)=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(b)}\qquad \gamma\frac{p}{Q}+2\frac{r}{a}+\operatorname{cotg} c\,\theta+\frac{\partial r}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial b}+\frac{\partial\theta}{\partial c}-\left(\frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\frac{\partial\theta}{\partial b}\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)t=0.
$$

Im allgemeinsten Falle kann man hier annehmen, daß das Potential Φ von der gegenseitigen Anziehung sämtlicher Massen abhängt. Eine sehr zweckmäßige erste Annäherung ergibt sich aber in vielen Fällen, wenn man annimmt, daß der Anfangspunkt der Koordinaten Schwerpunkt des ganzen Systems ist, und Φ das Potential einer gegen diesen Punkt gerichteten Zentralkraft.

Diese Gleichungen kann man anwenden, wenn man die ganze Erde mit Atmosphäre und Hydrosphäre als einen einzigen zirkularen Wirbel betrachtet, oder wenn man die entsprechenden kosmischen Probleme über rotierenden flüssigen Systemen wie die Sonne, die Fixsterne oder die kosmischen Nebel angreifen will.

V. Störungsgleichungen in Eulerscher Form.

23. Grundzustandsgleichungen und Störungsgleichungen. — Zur Definition des Grundzustandes denkt man sich eine beliebige Lösung der Eulerschen Gleichungen, gekennzeichnet durch die Größen

$$
(\alpha)\qquad \mathbf{V},\ P,\ Q,\ F.
$$

Geschwindigkeit $\mathbf{V}$, Druck P, Dichte Q sind die abhängigen Variablen, F eine Funktion, die gleich Null gesetzt eine innere oder äußere Grenzfläche darstellt. Sämtliche diese Größen (α) sind Funktionen der als unabhängige Variablen dienenden *Raumkoordinaten* x, y, z und der Zeit t. Die Größen sollen der Allgemeinheit halber keine anderen Bedingungen unterworfen sein, als die, die Eulerschen Gleichungen mit Nebenbedingungen zu befriedigen. Für diese Größen (α) läßt sich deshalb nach 9 das Gleichungssystem (A) bis (F) unten aufschreiben.

Dann denkt man sich einen Bewegungszustand, der sich nur wenig von dem betrachteten unterscheidet,

$$(\beta)\qquad \mathbf{V}+\mathbf{v},\ P+p,\ Q+q,\ F+f.$$

Die Zuschlagsgrößen $\mathbf{v}$, p, q, f sind klein erster Ordnung. Diese Ausdrücke setzt man in die allgemeinen Eulerschen Gleichungen mit Nebenbedingungen ein, und man vereinfacht durch die beiden folgenden Bedingungen:

(1) Die Größen $\mathbf{V}$, P, Q, F sollen die Gleichungen des Grundzustandes (A)—(F) unten befriedigen,

(2) Die Zuschlagsgrößen $\mathbf{v}$, p, q, f nebst ihren räumlichen Ableitungen erster Ordnung sollen so klein sein, daß man alle nicht lineare Glieder vernachlässigen kann.

Die Gleichungen, die man in dieser Weise abzuleiten hat, lassen sich nun, genau wie im Lagrangeschen Fall, durch eine einfache Variation der Grundzustandsgleichungen (A)—(F) aufschreiben: man variiert die Größen $\mathbf{V}$, P, Q, F, indem man das Variationszeichen δ als unabhängig von den in den Gleichungen vorkommenden Differentiationszeichen betrachtet, und ersetzt nach vollführter Variation $\delta\mathbf{V}$ durch $\mathbf{v}$, δP durch p, δQ durch q und δF durch f. Die Größen Φ und Ω, Schwerepotential und Erddrehung, sind nicht zu variieren. Sie hängen von den jetzt als unabhängige Variablen x, y, z dienenden Größen ab, die im Lagrangeschen Falle abhängige Variablen waren, und deshalb Variation von Φ und Ω herbeiführten.

Es werden somit die Gleichungen des Grundzustandes

$$\text{(A)}\qquad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}+2\,\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}+\frac{1}{Q}\nabla P+\nabla\Phi=0$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+\operatorname{div}(Q\mathbf{V})=0$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla Q-\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla P\right)=0$$

$$\text{(D)}\qquad F(x,y,z,t)=0$$

$$\text{(E)}\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{V}'\cdot\nabla F=0$$

$$\text{(F)}\qquad P-P'=0$$

$$\text{(F')}\qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla(P-P')=0,\quad \frac{\partial(P-P')}{\partial t}+\mathbf{V}'\cdot\nabla(P-P')=0.$$

Die entsprechenden Störungsgleichungen schreiben sich nach der angegebenen Variationsregel

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{V}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}+\frac{1}{Q}\nabla p-\frac{q}{Q^2}\nabla P=0$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\operatorname{div}(Q\mathbf{v})+\operatorname{div}(q\mathbf{V})=0$$

$$\text{(c)}\qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla q+\mathbf{v}\cdot\nabla Q-\gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla p+\mathbf{v}\cdot\nabla P\right)=0$$

$$\text{(d)}\qquad F(x,y,z,t)+f(x,y,z,t)=0$$

$$\text{(e)}\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla f+\mathbf{v}\cdot\nabla F=0,\quad \frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{V}'\cdot\nabla f+\mathbf{v}'\cdot\nabla F=0$$

(f) $$P - P' + p - p' = 0$$

(f') $$\frac{\partial (p-p')}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (p-p') + \mathbf{v} \cdot \nabla (P-P') = 0, \quad \frac{\partial (p-p')}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla (p-p') + \mathbf{v}' \cdot \nabla (P-P') = 0.$$

Was die Grenzflächenbedingungen betrifft, so sind die Gleichungen (F') in (F) zusammen mit (D), und (f') in (f) zusammen mit (d) enthalten; die Differentialformen (F') und (f') sind aber oft oder meistens die bequemeren in den Anwendungen. Weiter ist (d) die vollständige Form der Gleichung der gestörten Grenzfläche, während $f(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung für die Abweichung der gestörten Fläche von der ungestörten darstellt.

Der Vollständigkeit halber seien noch die voll entwickelten kartesischen Formen der vorkommenden Vektorgleichungen aufgeschrieben, nämlich die drei Bewegungsgleichungen des Grundzustandes

(A') $$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + 2\,\Omega_y W - 2\,\Omega_z V + \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + 2\,\Omega_z U - 2\,\Omega_x W + \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} + 2\,\Omega_x V - 2\,\Omega_y U + \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

und die drei Bewegungsgleichungen der Störungsbewegung

(a') $$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} + 2\,\Omega_y w - 2\,\Omega_z v \\
&\qquad + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{q}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + W \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} + 2\,\Omega_z u - 2\,\Omega_x w \\
&\qquad + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{q}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + W \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z} + 2\,\Omega_x v - 2\,\Omega_y u \\
&\qquad + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{q}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

Von diesen expliziten Formen kommt man gewöhnlich bequemer als von den Vektorgleichungen zu den für die Integrationsarbeit geeigneten Spezialfällen über. Das explizit-kartesische Aufschreiben der übrigen Gleichungen (B)—(F') und (b)—(f') ist dagegen nicht nötig.

24. Anwendung allgemeiner Koordinaten. — Um die Eulerschen Gleichungen in allgemeinen Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 zu erhalten, kehren wir zu den Gleichungen 12 (α), (β), (β') zurück, nämlich zu den Transformationsgleichungen

(α) $$x = x(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \quad y = y(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \quad z = z(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t)$$

und den Bewegungsgleichungen

$$(\beta)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_1}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial\psi_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}=0\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_2}-\frac{\partial T}{\partial\psi_2}+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial\psi_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}=0\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_3}-\frac{\partial T}{\partial\psi_3}+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial\psi_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_3}=0
\end{aligned}$$

mit dem Energieausdruck

$$(\gamma)\qquad T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

Statt wie in 12 Lagrangisch, werden wir diese Gleichungen jetzt Eulersch entwickeln.

Wir denken uns dann die Werte (α) von $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ in den Energieausdruck (γ) substituiert, und dann sämtliche in den Gleichungen (β) vorkommenden Differentiationen ausgeführt. Diese Gleichungen werden die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3, deren ersten Zeitableitungen $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ und deren zweiten Zeitableitungen $\ddot{\psi}_1, \ddot{\psi}_2, \ddot{\psi}_3$ enthalten. Die Gleichungen sind derselben gemischten Form wie die kartesischen Gleichungen 4 (A), die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 treten in einigen Gliedern auf als wären sie abhängige, in anderen als wären sie unabhängige Variablen.

Als künftige abhängige Variablen führen wir dann die folgenden neuen Größen ein

$$(\delta)\qquad v_1=\dot{\psi}_1,\quad v_2=\dot{\psi}_2,\quad v_3=\dot{\psi}_3.$$

Die Gleichungen enthalten dann die Größen v_1, v_2, v_3 und $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, und wir werden die Lösung des Problems in der Form

$$(\varepsilon)\qquad \begin{aligned}
v_1&=v_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)\\
v_2&=v_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)\\
v_3&=v_3(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)
\end{aligned}\qquad
\begin{aligned}
p&=p(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)\\
q&=q(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)
\end{aligned}$$

suchen. Dazu müssen wir, an der rechten Stelle in den Entwickelungen, die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 von den bewegten physischen Partikelchen loslösen, um sie zu Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen zu lassen.

Ehe wir dieses Loslösen bewerkstelligen, bilden wir die totale Zeitableitung der Größen (ε) oder irgendeiner Funktion F, die für das bewegte Partikelchen charakteristisch ist. Dies geschieht durch die Operation

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{\psi}_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\dot{\psi}_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\dot{\psi}_3\frac{\partial}{\partial\psi_3},$$

die nach (δ)

$$(\zeta)\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}+v_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}+v_3\frac{\partial}{\partial\psi_3}$$

geschrieben werden kann. Wir werden es oft nützlich finden, den Ausdruck abzukürzen. Dazu können wir $\mathbf{v}$ symbolisch als einen Vektor mit den Komponenten v_1, v_2, v_3 auffassen und

$$(\zeta')\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla$$

schreiben, wobei festzuhalten ist, daß nicht mehr x, y, z, sondern die allgemeinen Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Variablen sind.

Wenn wir jetzt alle Zeitableitungen, die in den Gleichungen (β) nach voller Entwickelung und Substitution von (ε) vorkommen, durch diese Operation ausdrücken, können wir die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 von den bewegten Partikelchen loslösen und zu Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen lassen. Das Prinzip des Überganges ist genau dasselbe bei den allgemeinen Koordinaten, als früher bei den kartesischen (6).

Es scheint nicht leicht, das Resultat wie im Lagrangeschen Fall durch ein Formelschema entsprechend 12 (A) oder (A′) darzustellen. Wir müssen uns begnügen, die Rechnungsregel in Worten zu kleiden:

(A) Zur Bildung der Eulerschen Bewegungsgleichungen in den allgemeinen Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 führt man alle in den Gleichungen (β) vorkommenden Differentiationen aus, setzt die neuen abhängigen Variablen (ε) ein, und schreibt alle noch in den Gleichungen vorkommenden Zeitdifferentiationen in die Form (ζ).

Die Kontinuitätsgleichung leitet man am bequemsten aus der voll entwickelten Lagrangeschen Form 12 (B) ab[1]. Man führt das von der Zeit unabhängige Glied auf der rechten Seite über, und differentiiert logarithmisch nach der Zeit. Dies gibt

$$\frac{\dot{q}}{q}+\frac{\dot{D}}{D}+\frac{1}{\dfrac{D(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}}\left[\frac{D(\dot{\psi}_1,\psi_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}+\frac{D(\psi_1,\dot{\psi}_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}+\frac{D(\psi_1,\psi_2,\dot{\psi}_3)}{D(a,b,c)}\right]=0\,,$$

wonach wir in den Funktionaldeterminanten die neuen abhängigen Variablen v_1, v_2, v_3 statt $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, $\dot{\psi}_3$, entsprechend (δ), einführen können. Die somit eingeführten Größen v_1, v_2, v_3 betrachten wir dann als Funktionen von ψ_1, ψ_2, ψ_3, und führen diese Größen ψ_1, ψ_2, ψ_3 als intermediäre Variablen in die Funktionaldeterminanten ein. Die erste Determinante in der Klammer wird dann

$$\frac{D(v_1,\psi_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}=\frac{D(v_1,\psi_2,\psi_3)}{D(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}\,\frac{D(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}=\frac{\partial v_1}{\partial \psi_1}\,\frac{D(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}{D(a,b,c)}\,.$$

Ähnliche Ausdrücke findet man für die beiden anderen Funktionaldeterminanten, und Einsetzen gibt

$$\frac{\dot{q}}{q}+\frac{\dot{D}}{D}+\frac{\partial v_1}{\partial\psi_1}+\frac{\partial v_2}{\partial\psi_2}+\frac{\partial v_3}{\partial\psi_3}=0\,,$$

wo die Lagrangeschen Variablen a, b, c ausgefallen sind. Hier können wir jetzt die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 von ihrer Verbindung mit den bewegten Partikelchen loslösen, und sie zu Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen lassen, unter der Bedingung, daß wir die in den Gleichungen vorkommenden Zeitableitungen in die Form (ζ) schreiben. Indem man die Größen $\dot{q}$ und $\dot{D}$ dementsprechend entwickelt, bringt man die Gleichung leicht auf die Form

(B) $$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial\psi_1}+v_2\frac{\partial q}{\partial\psi_2}+v_3\frac{\partial q}{\partial\psi_3}+\frac{q}{D}\left[\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial(D v_1)}{\partial\psi_1}+\frac{\partial(D v_2)}{\partial\psi_2}+\frac{\partial(D v_3)}{\partial\psi_3}\right]=0\,.$$

Dabei ist die in 12 (B′) gegebene Definition der Größe D zu erinnern:

(B′) $$D=\frac{D(x,y,z)}{D(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}\,.$$

Wenn man durch Vektorbezeichnungen abkürzt, läßt sich (B) schreiben:

(B″) $$\frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla q+\frac{q}{D}\left[\frac{\partial D}{\partial t}+\operatorname{div}(D\mathbf{v})\right]=0\,.$$

Die Transformation der physikalischen Gleichung, und der Gleichungen, die die Grenzflächenbedingungen angeben, geht von selbst.

[1] Appell, Traité de Mécanique, T. III, p. 366 (1921).

25. Zylindrische Koordinaten. — Als erstes Beispiel betrachten wir wieder zylindrische Koordinaten. Die Gleichungen 12 (β) geschrieben explizite für diese, wo

$$x=r\cos\psi,\quad y=r\sin\psi,\quad z=z$$

sind, lauten:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} &\ddot{r}-r\dot{\psi}^2+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}=0 \\ &r^2\ddot{\psi}+2r\dot{r}\dot{\psi}+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial \psi}+\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}=0 \\ &\ddot{z}+\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0\,. \end{aligned}$$

Weiter haben wir schon in 19 gefunden, daß $D=r$. Wenn wir die Grundstromvariablen einführen

$$(\beta)\qquad V_r=\dot{r},\quad V_\psi=\dot{\psi},\quad V_z=\dot{z},\quad P=p,\quad Q=q,$$

können wir gleich das folgende System der Gleichungen eines beliebigen Grundzustandes in zylindrischen Koordinaten aufschreiben:

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r}+V_\psi\dfrac{\partial V_r}{\partial \psi}+V_z\dfrac{\partial V_r}{\partial z}-rV_\psi^2+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial r}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}=0 \\ r^2\left(\dfrac{\partial V_\psi}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_\psi}{\partial r}+V_\psi\dfrac{\partial V_\psi}{\partial \psi}+V_z\dfrac{\partial V_\psi}{\partial z}\right)+2rV_rV_\psi+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \psi}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi}=0 \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}+V_\psi\dfrac{\partial V_z}{\partial \psi}+V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial z}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+V_r\frac{\partial Q}{\partial r}+V_\psi\frac{\partial Q}{\partial \psi}+V_z\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{Q}{r}\left[\frac{\partial (rV_r)}{\partial r}+\frac{\partial (rV_\psi)}{\partial \psi}+\frac{\partial (rV_z)}{\partial z}\right]=0$$

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+V_r\frac{\partial Q}{\partial r}+V_\psi\frac{\partial Q}{\partial \psi}+V_z\frac{\partial Q}{\partial z}-\gamma\left[\frac{\partial P}{\partial t}+V_r\frac{\partial P}{\partial r}+V_\psi\frac{\partial P}{\partial \psi}+V_z\frac{\partial P}{\partial z}\right]=0$$

$$(\mathrm{D})\qquad F(r,\psi,z,t)=0$$

$$(\mathrm{E})\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+V_r\frac{\partial F}{\partial r}+V_\psi\frac{\partial F}{\partial \psi}+V_z\frac{\partial F}{\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial t}+V'_r\frac{\partial F}{\partial r}+V'_\psi\frac{\partial F}{\partial \psi}+V'_z\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

$$(\mathrm{F})\qquad P-P'=0$$

$$(\mathrm{F}')\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial (P-P')}{\partial t}+V_r\frac{\partial (P-P')}{\partial r}+V_\psi\frac{\partial (P-P')}{\partial \psi}+V_z\frac{\partial (P-P')}{\partial z}=0\,, \\ &\frac{\partial (P-P')}{\partial t}+V'_r\frac{\partial (P-P')}{\partial r}+V'_\psi\frac{\partial (P-P')}{\partial \psi}+V'_z\frac{\partial (P-P')}{\partial z}=0\,. \end{aligned}$$

Und die entsprechenden Störungsgleichungen ergeben sich durch die Variation dieser Gleichungen:

$$
\text{(a)} \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial v_r}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + V_\psi \dfrac{\partial v_r}{\partial \psi} + v_\psi \dfrac{\partial V_r}{\partial \psi} + V_z \dfrac{\partial v_r}{\partial z} + v_z \dfrac{\partial V_r}{\partial z} - 2\, r\, V_\psi\, v_\psi \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\
r^2 \left\{ \dfrac{\partial v_\psi}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial v_\psi}{\partial r} + v_r \dfrac{\partial V_\psi}{\partial r} + V_\psi \dfrac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + v_\psi \dfrac{\partial V_\psi}{\partial \psi} + V_z \dfrac{\partial v_\psi}{\partial z} + v_z \dfrac{\partial V_\psi}{\partial z} \right\} \\
\qquad\qquad + 2\, r\,(V_r v_\psi + v_r V_\psi) + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} = 0 \\
\dfrac{\partial v_z}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial v_z}{\partial r} + v_r \dfrac{\partial V_z}{\partial r} + V_\psi \dfrac{\partial v_z}{\partial \psi} + v_\psi \dfrac{\partial V_z}{\partial \psi} + V_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \dfrac{\partial V_z}{\partial z} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial z} = 0
\end{cases}
$$

$$
\text{(b)} \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial q}{\partial t} + V_r \frac{\partial q}{\partial r} + v_r \frac{\partial Q}{\partial r} + V_\psi \frac{\partial q}{\partial \psi} + v_\psi \frac{\partial Q}{\partial \psi} + V_z \frac{\partial q}{\partial z} + v_z \frac{\partial Q}{\partial z} \\
&\qquad + \frac{q}{r}\left[\frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r V_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial (r V_z)}{\partial z}\right] + \frac{Q}{r}\left[\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial (r v_z)}{\partial z}\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(c)} \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial q}{\partial t} + V_r \frac{\partial q}{\partial r} + v_r \frac{\partial Q}{\partial r} + V_\psi \frac{\partial q}{\partial \psi} + v_\psi \frac{\partial Q}{\partial \psi} + V_z \frac{\partial q}{\partial z} + v_z \frac{\partial Q}{\partial z} \\
&- \gamma \left[\frac{\partial p}{\partial t} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} + V_\psi \frac{\partial p}{\partial \psi} + v_\psi \frac{\partial P}{\partial \psi} + V_z \frac{\partial p}{\partial z} + v_z \frac{\partial P}{\partial z}\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(d)} \quad F(r, \psi, z, t) + f(r, \psi, z, t) = 0
$$

$$
\text{(e)} \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t} + V_r \frac{\partial f}{\partial r} + v_r \frac{\partial F}{\partial r} + V_\psi \frac{\partial f}{\partial \psi} + v_\psi \frac{\partial F}{\partial \psi} + V_z \frac{\partial f}{\partial z} + v_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial f}{\partial t} + V'_r \frac{\partial f}{\partial r} + v'_r \frac{\partial F}{\partial r} + V'_\psi \frac{\partial f}{\partial \psi} + v'_\psi \frac{\partial F}{\partial \psi} + V'_z \frac{\partial f}{\partial z} + v'_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(f)} \quad P - P' + p - p' = 0
$$

$$
\text{(f')} \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (p - p') + \mathbf{v} \cdot \nabla (P - P') = 0, \\
&\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla (p - p') + \mathbf{v}' \cdot \nabla (P - P') = 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen entsprechen also den Lagrangeschen Gleichungen des Abschnittes 19.

26. Eulersche Gleichungen des zirkularen Wirbels in zylindrischen Koordinaten. — Um den fundamentalen Fall des zirkularen Wirbels wieder zu betrachten, setzen wir

$$
(\alpha) \quad V_r = 0, \quad V_\psi = \Omega(r, z), \quad V_z = 0.
$$

Aus 25 (A) — (F') ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen des Grundstromes:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} -r\Omega^2+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial r}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}=0 \\ \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \psi}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi}=0 \\ \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial z}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+\Omega\frac{\partial Q}{\partial \psi}=0 \text{ oder } Q=Q(r,\psi-\Omega t, z, P)$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial t}+\Omega\frac{\partial Q}{\partial \psi}-\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\Omega\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)=0$$

$$\text{(D)} \qquad F(r,\psi,z,t)=0$$

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\Omega\frac{\partial F}{\partial \psi}=0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\Omega'\frac{\partial F}{\partial \psi}=0$$

$$\text{(F)} \qquad P-P'=0$$

$$\text{(F')} \qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t}+\Omega\frac{\partial(P-P')}{\partial \psi}=0\,, \qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t}+\Omega'\frac{\partial(P-P')}{\partial \psi}=0$$

wo, wie man sieht, die Kontinuitätsgleichung direkt integrierbar war.

Die Gleichungen 25 (a)—(f') geben als entsprechende Störungsgleichungen

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t}+\Omega\dfrac{\partial v_r}{\partial \psi}-2\,\Omega r v_\psi+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r}-\dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial r}=0 \\ r^2\left\{\dfrac{\partial v_\psi}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial \Omega}{\partial r}+\Omega\dfrac{\partial v_\psi}{\partial \psi}+v_z\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}\right\}+2\,\Omega r v_r+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi}-\dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \psi}=0 \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}+\Omega\dfrac{\partial v_z}{\partial \psi}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial z}-\dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial z}=0 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\Omega\frac{\partial q}{\partial \psi}+v_r\frac{\partial Q}{\partial r}+v_\psi\frac{\partial Q}{\partial \psi}+v_z\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{Q}{r}\left[\frac{\partial(r v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r v_\psi)}{\partial \psi}+\frac{\partial(r v_z)}{\partial z}\right]=0$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\Omega\frac{\partial q}{\partial \psi}+v_r\frac{\partial Q}{\partial r}+v_\psi\frac{\partial Q}{\partial \psi}+v_z\frac{\partial Q}{\partial z}-\gamma\left[\frac{\partial p}{\partial t}+\Omega\frac{\partial p}{\partial \psi}+v_r\frac{\partial P}{\partial r}+v_\psi\frac{\partial P}{\partial \psi}+v_z\frac{\partial P}{\partial z}\right]=0$$

$$\text{(d)} \qquad F(r,\psi,z,t)+f(r,\psi,z,t)=0$$

$$\text{(e)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}+\Omega\frac{\partial f}{\partial \psi}+v_r\frac{\partial F}{\partial r}+v_\psi\frac{\partial F}{\partial \psi}+v_z\frac{\partial F}{\partial z}=0\,, \\ &\frac{\partial f}{\partial t}+\Omega'\frac{\partial f}{\partial \psi}+v'_r\frac{\partial F}{\partial r}+v'_\psi\frac{\partial F}{\partial \psi}+v'_z\frac{\partial F}{\partial z}=0 \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \qquad P-P'+p-p'=0$$

$$\text{(f')} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\Omega\frac{\partial(p-p')}{\partial \psi}+\mathbf{v}\cdot\nabla(P-P')=0\,, \\ &\frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\Omega'\frac{\partial(p-p')}{\partial \psi}+\mathbf{v}'\cdot\nabla(P-P')=0\,. \end{aligned}$$

Im speziellen Fall, wo keine äußere Kraft vorkommt und sich die Flüssigkeit wie ein fester Körper dreht, hat man $\Phi = \text{const.}$ und Ω von den Koordinaten unabhängig. Wenn dann zugleich Q konstant ist, die Flüssigkeit also homogen und inkompressibel, werden die Gleichungen des Grundstromes:

$$(\mathrm{A}') \qquad -r\Omega^2 + \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial r} = 0\,, \qquad P = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 Q + \text{const.}$$

Die entsprechenden Störungsgleichungen werden:

$$(\mathrm{a}') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega \dfrac{\partial v_r}{\partial \psi} - 2\,\Omega\, r\, v_\psi + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\[2ex] r^2 \left\{ \dfrac{\partial v_\psi}{\partial t} + \Omega \dfrac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right\} + 2\,\Omega\, r\, v_r + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega \dfrac{\partial v_z}{\partial \psi} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}') \qquad \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,,$$

wobei die Gleichungen für die Grenzflächenbedingungen ganz dieselben wie im allgemeinen Falle werden.

Wenn schließlich die Koordinate z nicht eingeht, und die Geschwindigkeitskomponente längs der z-Achse Null ist, erhält man die einfachen Gleichungen:

$$(\mathrm{a}'') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega \dfrac{\partial v_r}{\partial \psi} - 2\,\Omega\, r\, v_\psi + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\[2ex] r^2 \left\{ \dfrac{\partial v_\psi}{\partial t} + \Omega \dfrac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right\} + 2\,\Omega\, r\, v_r + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi} = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}'') \qquad \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} = 0\,,$$

die den Lagrangeschen Gleichungen 20 (a″), (b″) entsprechen.

27. Polarkoordinaten. — Als zweites Beispiel nehmen wie wieder Polarkoordinaten. Die Gleichungen 12 (β), geschrieben explizite für die Koordinaten r, ψ, θ, wo $x = r \sin\theta \cos\psi$, $y = r \sin\theta \sin\psi$, $z = r\cos\theta$ sind, lauten:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \\[2ex] r^2 \sin^2\theta\,\ddot{\psi} + 2\,r \sin^2\theta\,\dot{\psi}\,\dot{r} + 2\,r^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}\,\dot{\theta} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0 \\[2ex] r^2\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}^2 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0\,. \end{cases}$$

Weiter haben wir in 20 (γ) $D = -r^2 \sin\theta$ gefunden. Um die voll entwickelten Eulerschen Gleichungen des Grundzustandes zu schreiben, führen wir die Variablen

$$(\beta) \qquad V_r = \dot{r}\,, \quad V_\psi = \dot{\psi}\,, \quad V_\theta = \dot{\theta}\,, \quad P = p\,, \quad Q = q$$

ein. Wenn wir zur Abkürzung **V** formal als einen Vektor mit den Vektorkomponenten V_r, V_ψ, V_θ auffassen, und entsprechende Vektorbezeichnungen zur Abkürzung der skalaren Gleichungen einführen, ergibt sich das folgende Gleichungssystem für den Grundzustand:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_r}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla V_r - r V_\theta^2 - r\sin^2\theta\, V_\psi^2 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \\ r^2\sin^2\theta\left(\dfrac{\partial V_\psi}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla V_\psi\right) + 2r\sin^2\theta\, V_r V_\psi + 2r^2\sin\theta\cos\theta\, V_\psi V_\theta + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0 \\ r^2\left(\dfrac{\partial V_\theta}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla V_\theta\right) + 2rV_r V_\theta - r^2\sin\theta\cos\theta\, V_\psi^2 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla Q + \frac{Q}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\mathbf{V}) = 0$$

$$\text{(C)}\quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla Q - \gamma\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla P\right) = 0$$

$$\text{(D)}\quad F(r, \psi, \theta, t) = 0$$

$$\text{(E)}\quad \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}'\cdot\nabla F = 0$$

$$\text{(F)}\quad P - P' = 0$$

$$\text{(F')}\quad \frac{\partial (P-P')}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla(P-P') = 0, \quad \frac{\partial (P-P')}{\partial t} + \mathbf{V}'\cdot\nabla(P-P') = 0.$$

Dann gibt die Variation dieses Gleichungssystems die Störungsgleichungen:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla v_r + \mathbf{v}\cdot\nabla V_r - 2rV_\theta v_\theta - 2r^2\sin^2\theta\, V_\psi v_\psi + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ r^2\sin^2\theta\left(\dfrac{\partial v_\psi}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla v_\psi + \mathbf{v}\cdot\nabla V_\psi\right) + 2r\sin^2\theta\,(V_r v_\psi + v_r V_\psi) \\ \qquad + 2r^2\sin\theta\cos\theta\,(V_\psi v_\theta + v_\psi V_\theta) + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} = 0 \\ r^2\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla v_\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla V_\theta\right) + 2r(V_r v_\theta + v_r V_\theta) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\, V_\psi v_\psi \\ \qquad + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla q + \mathbf{v}\cdot\nabla Q + \frac{q}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\mathbf{V}) + \frac{Q}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\mathbf{v}) = 0$$

$$\text{(c)}\quad \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla q + \mathbf{v}\cdot\nabla Q - \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + \mathbf{v}\cdot\nabla P\right) = 0$$

$$\text{(d)}\quad F(r, \psi, \theta, t) + f(r, \psi, \theta, t) = 0$$

$$\text{(e)}\quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla f + \mathbf{v}\cdot\nabla F = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V}'\cdot\nabla f + \mathbf{v}'\cdot\nabla F = 0$$

$$\text{(f)}\quad P - P' + p - p' = 0$$

$$\text{(f')}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial (p-p')}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (p-p') + \mathbf{v} \cdot \nabla (P-P') = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial (p-p')}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla (p-p') + \mathbf{v}' \cdot \nabla (P-P') = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen entsprechen also den Lagrangeschen Gleichungen des Abschnittes 21.

28. Eulersche Gleichungen des zirkularen Wirbels in Polarkoordinaten. — Der Grundstrom wird

$$(\alpha)\qquad V_r=0\,,\quad V_\psi=\Omega\,,\quad V_\theta=0$$

definiert. Die Gleichungen des Grundstromes ergeben sich darauf:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} -\, r\,\Omega^2 \sin^2\theta + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0 \\[2ex] -\, r^2\,\Omega^2 \sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial Q}{\partial \psi} = 0 \quad \text{oder} \quad Q = Q\,(r,\,\psi - \Omega t,\,\theta,\,P).$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial Q}{\partial \psi} - \gamma\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial P}{\partial \psi}\right) = 0$$

$$\text{(D)}\qquad F\,(r,\,\psi,\,\theta,\,t) = 0$$

$$\text{(E)}\qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \Omega'\,\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$$

$$\text{(F)}\qquad P - P' = 0$$

$$\text{(F')}\qquad \frac{\partial (P-P')}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial (P-P')}{\partial \psi} = 0\,,\qquad \frac{\partial (P-P')}{\partial t} + \Omega'\,\frac{\partial (P-P')}{\partial \psi} = 0\,,$$

wo die Kontinuitätsgleichung wieder unmittelbar integrierbar war.

Die Gleichungen der kleinen Störung werden darauf:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega\,\dfrac{\partial v_r}{\partial \psi} - 2\,\Omega\, r \sin^2\theta\; v_\psi + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial r} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\[2ex] r^2 \sin^2\theta \left[\dfrac{\partial v_\psi}{\partial t} + \Omega\,\dfrac{\partial v_\psi}{\partial \psi}\right] + 2\,\Omega\, r \sin^2\theta\; v_r + 2\,\Omega\, r^2 \sin\theta\cos\theta\; v_\theta + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \psi} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \psi} = 0 \\[2ex] r^2 \left[\dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + \Omega\,\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \psi}\right] - 2\,\Omega\, r^2 \sin\theta\cos\theta\; v_\psi + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - \dfrac{q}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial q}{\partial \psi} + \frac{q}{r^2 \sin\theta}\,\mathrm{div}\,(r^2 \sin\theta\,\mathbf{V}) + \frac{Q}{r^2 \sin\theta}\,\mathrm{div}\,(r^2 \sin\theta\,\mathbf{v}) = 0$$

$$\text{(c)}\qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial q}{\partial \psi} + \mathbf{v} \cdot \nabla Q - \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial p}{\partial \psi} + \mathbf{v} \cdot \nabla P\right) = 0$$

(d) $$F(r, \psi, \theta, t) + f(r, \psi, \theta, t) = 0$$

(e) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \psi} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega' \frac{\partial f}{\partial \psi} + \mathbf{v}' \cdot \nabla F = 0$$

(f) $$P - P' + p - p' = 0$$

(f') $$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \Omega \frac{\partial (p - p')}{\partial \psi} + \mathbf{v} \cdot \nabla (P - P') = 0,$$
$$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \Omega' \frac{\partial (p - p')}{\partial \psi} + \mathbf{v}' \cdot \nabla (P - P') = 0.$$

Dies ist also die Eulersche Form der Gleichungen, die man anwenden kann, um die in 22 angedeuteten kosmischen Probleme anzugreifen.