UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GESETZE DER AUSGEGLICHENEN BEWEGUNGEN IN DER ATMOSPHÄRE.

VON

TH. HESSELBERG.

(Manuskript am 5. Mai 1927 eingeliefert.)

---

1. *Einleitung.* Die Gesetze der Hydrodynamik und der Thermodynamik gelten streng genommen nur für die wirklichen, ungeordneten Bewegungen und Zustände in der Atmosphäre, und man kann nicht ohne weiteres davon ausgehen, dass sie auch für die ausgeglichenen Felder gültig sind, die unsere meteorologischen Beobachtungen geben.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich versucht die Gesetze der ausgeglichenen Bewegungen und Zustände aus denjenigen der ungeordneten abzuleiten. Es wurde gezeigt, dass unsere Beobachtungen in guter Übereinstimmung mit folgenden Definitionen sind:

$$(1) \quad p = \frac{1}{\tau}\int_\tau p'\,d\tau,\ \varrho = \frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho'\,d\tau,\ \varrho\vartheta = \frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho'\,\vartheta' d\tau,\ \varrho\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho'\,\boldsymbol{v}'\,d\tau$$

wo

p = ausgeglichener Luftdruck,
ϱ = ausgeglichene Dichte,
ϑ = — Temperatur,
$\boldsymbol{v}$ = — Geschwindigkeit

ist, während p', ϱ', ϑ' und $\boldsymbol{v}'$ die wirklichen, ungeordneten Werte der Elemente bedeuten, und $d\tau$ ein Element des Volumens τ ist.

Eine Reihe abgeleiteter Grössen sind dann durch ihre Verbindungsgleichungen mit den in den Gleichungen (1) definierten Grössen zu bestimmen:

$$(2) \quad a = \frac{1}{\varrho},\ \boldsymbol{V} = \varrho\,\boldsymbol{v},\ K = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,v^2,\ W = I\,c_p\,\varrho\,\vartheta\,.$$

Die Buchstaben haben hier folgende Bedeutung:

a = spezifisches Volumen,
$\boldsymbol{V}$ = spezifische Bewegungsgrösse,
K = kinetische Energie pro Volumeneinheit,
W = innere Energie pro Volumeneinheit,
I = Arbeitsäquivalent,
c_p = spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck.

---

[1] *Th. Hesselberg:* Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, XII Band, Heft 3, 1925.

Mit Hilfe von den Definitionen (1) ist es leicht zu zeigen, dass die Zustandsgleichung und die Kontinuitätsgleichung unverändert für die ausgeglichenen Werte der Elemente gelten.

Man hat:

$$p' = R\varrho'\vartheta'.$$

Wenn man hier mit $d\tau$ multipliziert und über das Volumen τ integriert, so bekommt man:

$$\frac{1}{\tau}\int_\tau p'\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int_\tau R\varrho'\vartheta'\,d\tau = R\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho'\vartheta'\,d\tau,$$

oder nach den Gleichungen (1):

(3) $$p = R\varrho\vartheta.$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$-\frac{\partial\varrho'}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho' v_x')}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho' v_y')}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho' v_z')}{\partial z}.$$

Indem man wieder mit $d\tau$ multipliziert und über das Volumen τ integriert, so erhält man:

$$-\frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial\varrho'}{\partial t}\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial(\varrho' v_x')}{\partial x}\,d\tau + \frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial(\varrho' v_y')}{\partial y}\,d\tau + \frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial(\varrho' v_z')}{\partial z}\,d\tau.$$

Hieraus bekommt man:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho'\,d\tau\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' v_x'\,d\tau\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' v_y'\,d\tau\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' v_z'\,d\tau\right],$$

oder nach den Gleichungen (1):

(4) $$-\frac{\partial\varrho}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z}.$$

Wenn man weiter feststellt, dass das ausgeglichene Luftindividuum die ausgeglichene Bewegung folgen soll, so hat man für irgend ein Element f:

(5) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Aus Gleichung (4) bekommt man:

$$-\frac{\partial\varrho}{\partial t} - v_x\frac{\partial\varrho}{\partial x} - v_y\frac{\partial\varrho}{\partial y} - v_z\frac{\partial\varrho}{\partial z} = \varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

und mit Hilfe von Gleichung (5), indem $f = \varrho$ gesetzt wird:

(6) $$-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Wir sehen also, dass die Zustandsgleichung und die Kontinuitätsgleichung unverändert für die ausgeglichenen Werte der Elemente gelten.

Da die Kontinuitätsgleichung gültig ist, wird unser Luftindividuum seine Masse beibehalten. Wegen der ungeordneten Bewegungen wird also ebenso viel Masse in das Luftindividuum hineingebracht wie hinausgebracht. Die Luftmassen, die hineinströmen, haben aber gewöhnlich andere Eigenschaften als die hinausströmenden Luftmassen. Durch die ungeordneten Bewegungen werden deshalb gewöhnlich dem betrachteten Individuum Eigenschaften von den herumgebenden Luftmassen zugeführt. Es wird z. B. durch diesen Austausch Bewegungsgrösse, kinetische Energie und innere Energie dem Individuum zugeführt Wenn wir die ausgeglichenen Felder behandeln, treten deshalb in den Bewegungsgleichungen und in dem ersten Satz der mechanischen Wärmetheorie Zusatzglieder auf, welche bei den entsprechenden Gleichungen für die wirklichen Felder nicht vorkommen.

In der oben erwähnten Abhandlung sind die Hauptgleichungen eine vorläufige Behandlung unterworfen; im folgenden sollen sie eine mehr eingehende Behandlung gegeben werden.

I. Der Austausch.

2. *Massenaustausch.* Für den Massentransport M_z pro Zeit und Flächeneinheit durch eine horizontale Fläche σ_z haben wir:

$$M_z = \frac{1}{\sigma_z} \int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_z' \, d\sigma_z .$$

Wenn man eine Fläche σ so gross wählt, dass Partikelchen in allen möglichen Phasen der ungeordneten Bewegung sich in der Fläche befinden, so gibt der Ausdruck:

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{\sigma} \varrho' f' \, d\sigma$$

einen von den wegen der ungeordneten Bewegungen auftretenden Variationen befreiten Mittelwert eines Elements f', in derselben Weise wie das Raumintegral:

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_{\tau} \varrho' f' \, d\tau$$

es macht, wenn das Volumen τ hinreichend gross gewählt wird. Wir können deshalb:

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{\sigma} \varrho' f' \, d\sigma = \frac{1}{\tau} \int\limits_{\tau} \varrho' f' \, d\tau \tag{7}$$

setzen. Wir bekommen dann:

$$M_z = \frac{1}{\sigma_z} \int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_z' \, d\sigma_z = \varrho v_z .$$

Denselben Massentransport erhält man, wenn man die ausgeglichene Bewegung behandelt. Algebraisch gerechnet geschieht kein vertikaler Massentransport durch die Fläche wegen der ungeordneten Bewegungen. Wegen dieser hat man demnach denselben Massentransport m_z pro Zeit und Flächeneinheit nach unten wie nach oben. Dieser Massentransport werden wir den vertikalen Massenaustausch nennen.

Durch eine horizontale Fläche F_z, welche der ausgeglichenen Bewegung folgt, hat man also wegen der ungeordneten Bewegungen einen Massentransport m_z nach oben und einen gleichen nach unten. Relativ zu dieser Fläche haben die Luftteilchen vertikale Geschwindigkeiten:

$$\triangle v_z = v_z' - v_z$$

gleich der ungeordneten vertikalen Zusatzgeschwindigkeiten.

Denken wir uns jetzt einen Augenblick, dass jedes einzelne Luftteilchen, das durch F_z herabsteigt, eine gleiche relative Vertikalgeschwindigkeit nach oben hätte, wir würden dann einen Transport von Masse durch F_z gleich $2\ m_z$ nach oben haben, und wir bekommen:

$$2\ m_z = \frac{1}{\sigma_z} \int\limits_{\sigma_z} \varrho' \mid \triangle v_z' \mid d\sigma_z = \varrho\ \overline{\triangle v_z},$$

wo $\overline{\triangle v_z}$ der mittlere numerische Wert der vertikalen Zusatzgeschwindigkeiten ist, die wegen der ungeordneten Bewegungen auftreten. Nennen wir diesen Mittelwert u_z, so haben wir:

$$m_z = \tfrac{1}{2}\ \varrho u_z .$$

Die Luftmassen, welche durch F hinaufsteigen, haben eine Masse m^z und eine mittlere vertikale Zusatzgeschwindigkeit $u_{z.1}$. Die nach unten gehenden Luftmassen haben die gleiche Masse m_z und eine mittlere vertikale Zusatzgeschwindigkeit $u_{z.2}$ nach unten. Es ist dann der Mittelwert:

$$m_z\ u_{z.1} + m_z\ (- u_{z.2}) = 0,$$

weil der mittlere algebraische Wert der Zusatzgeschwindigkeiten gleich Null ist. Man hat dann:

(8) $$u_{z.1} = u_{z.2} = u_z .$$

Wir werden jetzt den Massentransport M_x pro Zeit- und Flächeneinheit durch eine vertikale Fläche σ_x senkrecht auf der X-Achse suchen. Wir haben:

$$M_x = \frac{1}{\sigma_x} \int\limits_{\sigma_x} \varrho' v_x' d\sigma_x = \varrho v_x .$$

Denselben Massentransport hat man, wenn man die ausgeglichene Bewegung behandelt. Man hat also wegen der ungeordneten Bewegungen denselben Massentransport m_x pro Zeit- und Flächeneinheit durch die Fläche σ_x in positiver wie in negativer Richtung. Durch eine entsprechende Überlegung wie bei dem vertikalen Massenaustausch findet man:

$$m_x = \tfrac{1}{2}\ \varrho u_x ,$$

wo m_x der Massenaustausch durch σ_x ist, und u_x den mittleren numerischen Wert der X-Komponenten der wegen der ungeordneten Bewegungen auftretenden Zusatzgeschwindigkeiten bedeutet.

In ganz analoger Weise findet man für den Massenaustausch durch eine Fläche σ_y senkrecht auf der Y-Achse:

$$m_y = \tfrac{1}{2}\ \varrho u_y .$$

Da es bei den ungeordneten Bewegungen keine bevorzugte Richtung gibt, so ist:

$$u_x = u_y = u_z = u,$$

und folglich:

$$m_x = m_y = m_z = m.$$

Wir haben schliesslich:

(9) $$m = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, u.$$

3. *Vertikaler Transport von der X-Komponente der Bewegungsgrösse.* Für den Transport $B_{x.z}$ von Bewegungsgrösse parallel der X-Achse pro Zeit- und Flächeneinheit durch die horizontale Fläche σ_z haben wir:

$$B_{x.z} = \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' v_z' \, d\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' (v_z + \triangle v_z)\, d\sigma_z$$

$$= v_z \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \, d\sigma_z + \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \triangle v_z \, d\sigma_z,$$

oder:

$$B_{x.z} = \varrho\, v_x v_z + \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \triangle v_z \, d\sigma_z.$$

Für das letzte Integral haben wir:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \triangle v_z \, d\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\left[\int\limits_{\tau_1} \varrho' v_x' \, d\tau, - \int\limits_{\tau_2} \varrho' v_x' \, d\tau_z\right],$$

wo τ_1 das Volumen der wegen des Austausches aufsteigenden Partikelchen bedeutet, die pro Zeiteinheit durch σ_z gehen, und τ_2 das Volumen der absteigenden Luftteilchen ist. Wir bekommen dann weiter, indem Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \triangle v_z \, d\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\left(\varrho_1 v_{x.1} \tau_1 - \varrho_2 v_{x.2} \tau_2\right) + - - -$$

Es ist hier ϱ_1 die mittlere Dichte und $v_{x.1}$ die mittlere Geschwindigkeit der wegen des Austausches aufsteigenden Luftteilchen, während ϱ_2 und $v_{x.2}$ die mittlere Dichte und Geschwindigkeit der absteigenden Luftmassen sind.

Wegen des Austausches hat man aber nach § 2 denselben Massentransport m nach oben wie nach unten. Wir haben deshalb:

$$\varrho_1 \tau_1 = \varrho_2 \tau_2 = m\, \sigma_z.$$

Folglich bekommen wir:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho' v_x' \triangle v_z \, d\sigma_z = m\,(v_{x.1} - v_{x.2}),$$

und:

(10) $$B_{x.z} = \varrho\, v_x v_z + m\,(v_{x.1} - v_{x.2}).$$

Das erste Glied gibt den Transport von Bewegungsgrösse wegen der ausgeglichenen Bewegungen und das zweite den Transport wegen des Austausches.

Wenn v_x mit der Höhe zunimmt, werden die aufsteigenden Luftteilchen im Mittel eine kleinere Geschwindigkeit haben als die absteigenden, weil sie von schwächer bewegten Luftschichten kommen, während die letzteren von den stärker bewegten oberen Luftschichten kommen. In diesem Falle hat man wegen des Austausches einen Transport von Bewegungsgrösse nach unten. Wenn v_x mit der Höhe abnimmt, ist das umgekehrte der Fall. Je grösser der Zahlenwert von $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ ist, um so grösser ist dieser Transport. Wir werden versuchen dieses analytisch auszudrücken.

4. *Der Austauschkoeffizient.* Die Luftteilchen, die im Laufe eines Sekundes wegen des Austausches durch die Fläche σ_z hinaufsteigen, kommen im Mittel von einer Höhe l_1 unterhalb der Fläche. Sie haben deshalb im Mittel angenähert eine Geschwindigkeit gleich der ausgeglichenen Geschwindigkeit in der Höhe l_1 unterhalb σ_z. Wir können deshalb:

$$v_{x\,.\,1} = v_x - l_1 \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

setzen. In derselben Weise finden wir, dass:

$$v_{x\,.\,2} = v_x + l_2 \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

ist, wo l_2 die Höhe oberhalb der Fläche σ_z bedeutet, von welcher die durch σ_z im Laufe eines Sekundes absteigenden Luftteilchen im Mittel kommen.

Wir bekommen also:

$$v_{x\,.\,1} - v_{x\,.\,2} = -(l_1 + l_2) \frac{\partial v_x}{\partial z} = - l \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

wo l die mittlere Weglänge ist, die ein Partikelchen wegen des Austausches in einer Sekunde durchläuft. Es hat l denselben Zahlenwert wie u.

Gleichung (10) gibt dann:

$$B_{x\,.\,z} = \varrho\, v_x v_z - m\, l \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Wenn wir hier:

(11) $$\eta = m\, l = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, u\, l$$

setzen, so bekommen wir:

(12) $$B_{x\,.\,z} = \varrho\, v_x v_z - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Der Koeffizient η werden wir mit Wilhelm Schmidt den Austauschkoeffizienten nennen.

Mit Hilfe von Gleichung (11) können wir uns über die Grössenordnung [1] von η und seinen Ableitungen orientieren.

Wir wissen nämlich, dass die ungeordnete Zusatzgeschwindigkeit derselben Grössenordnung aber etwas kleiner als die Geschwindigkeit selbst ist, und dass sie mit dieser etwa proportional wächst, wenigstens in der Nähe der Erdoberfläche. Wir haben deshalb:

$$\text{Magn. } \eta = 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2},$$
$$\text{Magn. } \frac{\partial \eta}{\partial z} = 10^{-6} \text{ bis } 10^{-5},$$

[1] Vergleich *Th. Hesselberg* und *A. Friedmann:* Die Grössenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Veröff. des Geophys. Inst. der Univ. Leipzig, zweite Serie, Band I, Heft 5.

$$\text{Magn.}\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \text{Magn.}\ \frac{d\eta}{dt} = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6},$$

$$\text{Magn.}\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = \text{Magn.}\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7}.$$

Die gefundene Grössenordnung von η ist, wie man sieht, die gleiche, die nach verschiedenen anderen Methoden gefunden ist.

5. *Transport von Bewegungsgrösse.* Wie für $B_{x.z}$ finden wir den Transport $B_{y.z}$ von Bewegungsgrösse parallel der Y-Achse pro Zeit- und Flächeneinheit durch die horizontale Fläche σ_z:

$$B_{y.z} = \varrho\, v_y v_z - \eta \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Für den Transport von Bewegungsgrösse $B_{z.z}$ parallel der Z-Achse pro Zeit- und Flächeneinheit haben wir wie für $B_{x.z}$ (vergl. Gleichung (10)):

$$B_{z.z} = \frac{1}{\sigma_z} \int_{\sigma_z} \varrho'\, v_z'\, v_z'\, d\sigma_z = \varrho\, v_z v_z + m\,(v_{z.1} - v_{z.2}),$$

wo $v_{z.1}$ die mittlere vertikale Geschwindigkeit der wegen des Austausches aufsteigenden Luftmassen ist, und $v_{z.2}$ die mittlere vertikale Geschwindigkeit der absteigenden Luftteilchen bedeutet.

Die Luftteilchen, die nach oben gehen, haben nach § 2 eine mittlere Geschwindigkeit:

$$v_{z.1} = v_z + u,$$

während die absteigenden Luftmassen eine mittlere Geschwindigkeit:

$$v_{z.2} = v_z - u$$

haben Wir bekommen demnach:

$$m\,(v_{z.1} - v_{z.2}) = 2\, m u.$$

Setzen wir jetzt:

(13) $$\eta^* = m u = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, u^2,$$

so bekommen wir:

(14) $$B_{z.z} = \varrho\, v_z v_z + 2\eta^*$$

Der Zahlenwert von u ist gleich demjenigen von l. Wir haben deshalb für η^* denselben Zahlenwert wie für η. Während η die Dimension $L^{-1}\, M\, T^{-1}$ hat, so hat aber η^* die Dimension $L^{-1}\, M\, T^{-2}$ (L = Länge, M = Masse T = Zeit).

Für den Transport von Bewegungsgrösse durch eine horizontale Fläche σ_z haben wir folgendes System von Gleichungen gefunden:

$$B_{x.z} = \varrho\, v_x v_z - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z},\quad B_{y.z} = \varrho\, v_y v_z - \eta \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$B_{z.z} = \varrho\, v_z v_z + 2\,\eta^*.$$

In derselben Weise finden wir für die Transporte von Bewegungsgrösse durch die vertikalen Flächen σ_x und σ_y, und wir bekommen:

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
B_{x\,.\,x} &= \varrho\, v_x v_x + 2\,\eta^*, \quad B_{y\,.\,x} = \varrho\, v_y v_x - \eta\,\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad B_{z\,.\,x} = \varrho\, v_z v_x - \eta\,\frac{\partial v_z}{\partial x}, \\
B_{x\,.\,y} &= \varrho\, v_x v_y - \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad B_{y\,.\,y} = \varrho\, v_y v_y + 2\,\eta^*, \quad B_{z\,.\,y} = \varrho\, v_z v_y - \eta\,\frac{\partial v_z}{\partial y}, \\
B_{x\,.\,z} &= \varrho\, v_x v_z - \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad B_{y\,.\,z} = \varrho\, v_y v_z - \eta\,\frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad B_{z\,.\,z} = \varrho\, v_z v_z + 2\,\eta^*.
\end{aligned}\right.
$$

Für den Transport $B_{x\,.\,a}$ von der X-Komponente der Bewegungsgrösse aus einem Einheitskubus hat man:

$$
\begin{aligned}
B_{x\,.\,a} &= \frac{\partial B_{x\,.\,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{x\,.\,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{x\,.\,z}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\varrho\, v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\, v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\, v_x v_z) + 2\,\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

In derselben Weise bestimmt man die Transporte $B_{y\,.\,a}$ und $B_{z\,.\,a}$ von der Y-Komponente und der Z-Komponente der Bewegungsgrösse aus dem Einheitskubus, und man erhält folgendes System von Gleichungen:

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
B_{x\,.\,a} &= \frac{\partial}{\partial x}(\varrho\, v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\, v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\, v_x v_z) + 2\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right). \\
B_{y\,.\,a} &= \frac{\partial}{\delta x}(\varrho\, v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\, v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\, v_y v_z) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial \eta^*}{\partial y} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\
B_{z\,.\,a} &= \frac{\partial}{\partial x}(\varrho\, v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\, v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\, v_z v_z) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\,\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + 2\,\frac{\partial \eta^*}{\partial z}.
\end{aligned}\right.
$$

6. *Transport von innerer Energie.* Der Transport W_z von innerer Energie pro Zeit- und Flächeneinheit durch die horizontale Fläche σ_z ist:

$$
\begin{aligned}
W_z &= \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} I\, c_p\, \varrho'\, \vartheta'\, v_z'\, d\,\sigma_z = I\, c_p\,\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho'\, \vartheta'\,(v_z + \triangle v_z)\, d\,\sigma_z, \\
&= I\, c_p\, v_z\,\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho'\, \vartheta'\, d\,\sigma_z + I\, c_p\,\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho'\, \vartheta' \triangle v_z\, d\,\sigma_z \\
&= I\, c_p\, \varrho\, \vartheta\, v_z + I c_p \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z} \varrho'\, \vartheta' \triangle v_z\, d\,\sigma_z\,.
\end{aligned}
$$

Für das letzte Integral haben wir in derselben Weise wie bei dem Transport von Bewegungsgrösse (vergl. § 3):

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z}\varrho'\,\vartheta'\,\triangle\,v_z\,d\,\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\tau_1}\varrho'\,\vartheta'\,d\,\tau_1 - \frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\tau_2}\varrho'\,\vartheta'\,d\tau_2 = \frac{1}{\sigma_z}\left(\varrho_1\,\vartheta_1\,\tau_1 - \varrho_2\,\vartheta_2\,\tau_2\right),$$

wo τ_1 das Volumen der wegen des Austausches im Zeiteinheit aufsteigenden Luftteilchen bedeutet, und τ_2 das Volumen der absteigendeu Partikelchen ist. Weiter ist ϱ_1 die mittlere Dichte und ϑ_1 die mittlere Temperatur der aufsteigenden Teilchen, während ϱ_2 und ϑ_2 die mittlere Dichte und Temperatur der absteigenden Luftmassen sind.

Wegen des Austausches haben wir aber denselben Massentransport m pro Zeit- und Flächeneinheit nach oben wie nach unten. Wir haben deshalb:

$$\varrho_1\,\tau_1 = \varrho_2\,\tau_2 = m\,\sigma_z\,,$$

und folglich:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z}\varrho'\,\vartheta'\,\triangle\,v_z\,d\,\sigma_z = m\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)\,.$$

Die Luftmassen, die im Laufe eines Sekundes durch σ_z hinaufsteigen, kommen im Mittel von einer Höhe l_1 unterhalb der Fläche. In dieser Höhe haben sie im Mittel eine Temperatur:

$$\vartheta + l_1\,\gamma\,,$$

wo γ der Temperaturgradient ist. In die Fläche kommen sie angenähert mit einer Temperatur:

$$\vartheta + l_1\,\gamma - l_1\,\gamma'$$

an, wo γ' der adiabatische Temperaturgradient ist (im Falle der Kondensation der feuchtdiabatische Temperaturgradient). Wir bekommen also:

$$\vartheta_1 = \vartheta - l_1\,(\gamma' - \gamma)\,.$$

In derselben Weise finden wir, dass:

$$\vartheta_2 = \vartheta + l_2\,(\gamma' - \gamma)$$

ist, wo l_2 die Höhe oberhalb der Fläche σ_z bedeutet, von welcher die durch σ_z im Laufe eines Sekundes absteigenden Luftteilchen im Mittel kommen. Wir erhalten also:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\,(l_1 + l_2)\,(\gamma' - \gamma) = -\,l\,(\gamma' - \gamma)\,.$$

und:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int\limits_{\sigma_z}\varrho'\,\vartheta'\,\triangle\,v_z\,d\,\sigma_z = -\,m\,l\,(\gamma' - \gamma) = -\,\eta\,(\gamma' - \gamma)\,.$$

Schliesslich erhalten wir:

$$W_z = I\,c_p\,\varrho\,\vartheta\,v_z - I\,c_p\,\eta\,(\gamma' - \gamma)\,.$$

In entsprechender Weise finden wir die Transporte W_x und W_y von innerer Energie durch die vertikalen Flächen σ_x und σ_y, und wir bekommen:

(17)
$$W_x = I\,c_p\,\varrho\,\vartheta\,v_x - I\,c_p\,\eta\,\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x},\quad W_y = I\,c_p\,\varrho\,\vartheta\,v_y - I\,c_p\,\eta\,\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,y},$$
$$W_z = I\,c_p\,\varrho\,\vartheta\,v_z - I\,c_p\,\eta\,(\gamma' - \gamma).$$

Für die Ausströmung W_a von innerer Energie aus dem Einheitskubus bekommt man:

$$W_a = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z},$$

und:

(18)
$$W_a = I c_p \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varrho\, \vartheta\, v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varrho\, \vartheta\, v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho\, \vartheta\, v_z)\right]$$
$$- I c_p \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} (\eta\, (\gamma' - \gamma))\right].$$

Wenn wir für den Fall, dass keine Kondensation vorkommt, für γ' den Wert:

$$\gamma' = \frac{g}{I c_p}$$

einführen, so bekommen wir:

$$I c_p \frac{\partial}{\partial z} (\eta\, (\gamma' - \gamma)) = I c_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + g \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

oder:

(19)
$$I c_p \frac{\partial}{\partial z} (\eta\, (\gamma' - \gamma)) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial}{\partial z} (I c_p \vartheta + g z)\right].$$

II. Die Bewegungsgleichungen.

7. Wenn wir die X-Achse gegen Osten, die Y-Achse gegen Norden und die Z-Achse nach oben richten, lauten die Bewegungsgleichungen der wirklichen Bewegung:

$$\frac{d v'_x}{d t} = - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} + \lambda v_y' - \nu v_z' + \alpha' R_x',$$

$$\frac{d v_y'}{d t} = - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial y} - \lambda v_x' + \alpha' R_y',$$

$$\frac{d v_z'}{d t} = - g - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu v_x' + \alpha' R_z'.$$

Hier hat man:

$$\lambda = 2\, \omega\, sin\, \varphi \quad \text{und} \quad \nu = 2\, \omega\, cos\, \varphi\ ,$$

wo ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite ist. Weiter sind R_x' R_y' und R_z' die Komponenten der Reibungskraft.

Wenn man die erste Gleichung mit $\varrho'\, d\tau$ multipliziert und eine Integration über das Volumen τ ausführt, so bekommt man:

$$\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' \frac{d v_x'}{d t}\, d\tau = - \frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial p'}{\partial x}\, d\tau + \frac{1}{\tau}\int_\tau \lambda\, \varrho'\, v_y'\, d\tau - \frac{1}{\tau}\int_\tau \nu\, \varrho'\, v_z'\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{\tau}\int_\tau R_x'\, d\tau\ .$$

Um das erste Integral umzuformen, werden wir eine bekannte Transformation verwenden. Für eine Grösse f' hat man:

$$\int_\tau \varrho' \frac{df'}{dt}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \varrho' f'\, d\tau + \int_\sigma \varrho' f' v_n'\, d\sigma, \tag{20}$$

wo σ die Oberfläche des Volumens τ ist, und v_n' die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser Oberfläche, positiv nach aussen gerechnet.

Setzen wir in Gleichung (20) $f' = v_x'$ und $\tau = \tau_I$, wo τ_I der Einheitskubus ist, so bekommt man:

$$\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' \frac{d v_x'}{dt}\, d\tau = \int_{\tau_I} \varrho' \frac{d v_x'}{dt}\, d\tau_I = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau_I} \varrho' v_x'\, d\tau_I + B_{x\cdot a} = \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial t} + B_{x\cdot a},$$

oder nach Gleichung (16):

$$\frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' \frac{d v_x'}{dt}\, d\tau = \frac{\partial(\varrho v_a)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_x v_z)$$

$$+ 2\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right),$$

$$= \varrho \frac{d v_x}{dt} + 2\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).$$

Wir haben weiter:

$$-\frac{1}{\tau}\int_\tau \frac{\partial p'}{\partial x}\, d\tau = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\tau}\int_\tau p'\, d\tau\right] = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\tau}\int_\tau \lambda \varrho' v_y'\, d\tau = \lambda \frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' v_y'\, d\tau = \lambda \varrho v_y,$$

$$-\frac{1}{\tau}\int_\tau \nu \varrho' v_z'\, d\tau = -\nu \frac{1}{\tau}\int_\tau \varrho' v_z'\, d\tau = \nu \varrho v_z.$$

Das Reibungsglied gibt die Bewegungsgrösse, die einer Volumeneinheit der betrachteten Luftmasse wegen des molekularen Austausches zugeführt wird. Wir haben aber oben schon die gesammte Ausfuhr von Bewegungsgrösse berechnet, ohne Voraussetzung über den Ursprung des Austausches und unabhängig davon ob dieser in Form von einzelnen Molekylen geschieht oder in grösseren Massen. Es darf dann das Reibungsglied $\frac{1}{\tau}\int_\tau R_x'\, d\tau$ nicht getrennt mitgenommen werden.

Wir bekommen dann die Bewegungsgleichung:

$$\varrho \frac{d v_x}{dt} + 2\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \varrho \vartheta_y - \nu \varrho v_z,$$

oder:

$$\varrho \frac{d v_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \varrho v_y - \nu \varrho v_z - 2\frac{\partial \eta^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).$$

In derselben Weise können wir die zwei anderen Bewegungsgleichungen für die ausgeglichene Bewegung ableiten, und wir erhalten:

$$
(21)\quad \begin{cases}
\dfrac{d v_x}{d t} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial x} + \lambda v_y - \nu v_z - 2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \alpha \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right), \\
\dfrac{d v_y}{d t} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial y} - \lambda v_x + \alpha \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) - 2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial y} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\
\dfrac{d v_z}{d t} = -g - \alpha \dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu v_x + \alpha \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \alpha \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) - 2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Die Glieder haben hier folgende Grössenordnungen:

$$\text{Magn. } g = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 10^1,$$

$$\text{Magn. } 2\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial z} = 10^{-3} \text{ bis } 10^{-2},$$

$$\text{Magn. } \frac{d v_x}{d t} = \text{Magn. } \frac{d v_y}{d t} = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 10^{-4} \text{ bis } 10^{-3},$$

$$\text{Magn. } \lambda v_y = \text{Magn. } \lambda v_x = \text{Magn. } \nu v_x = 10^{-4} \text{ bis } 10^{-3},$$

$$\text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \text{Magn. } 2\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x},$$

$$= \text{Magn. } 2\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial y} = 10^{-5} \text{ bis } 10^{-4},$$

$$\text{Magn. } \frac{d v_z}{d t} = \text{Magn. } \nu v_z = 10^{-6} \text{ bis } 10^{-5},$$

$$\text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}.$$

$$\text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \text{Magn. } \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 10^{-10} \text{ bis } 10^{-9}.$$

Man bekommt also folgende vereinfachte Gleichungen, die mit guter Annäherung erfüllt sind:

$$
(21')\quad \begin{cases}
\dfrac{d v_x}{d t} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial x} + \lambda v_y - 2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right), \\
\dfrac{d v_y}{d t} = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial y} - \lambda v_x - 2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial y} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\
g = -\alpha \dfrac{\partial p}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den früher verwendeten durch die Glieder $-2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial x}$ und $2\alpha \dfrac{\partial \eta^*}{\partial y}$, die von den horizontalen Veränderungen des Austauschkoeffizienten herrühren. Die Glieder sind aber zu gross um ausser Betracht gesetzt zu werden.

III. Die kinetische Energie der ungeordneten Bewegungen.

8. Für die kinetische Energie K' der ungeordneten Bewegung hat man:

$$K' = \frac{1}{\tau}\int_\tau \tfrac{1}{2}\varrho' v'^2 \, d\tau,$$

oder, indem v'^2 in Komponenten zerlegt wird:

$$K' = \frac{1}{\tau}\int_\tau \tfrac{1}{2}\varrho' v_x'^2 \, d\tau + \frac{1}{\tau}\int_\tau \tfrac{1}{2}\varrho' v_y'^2 \, d\tau + \frac{1}{\tau}\int_\tau \tfrac{1}{2}\varrho' v_z'^2 \, d\tau .$$

Wir werden zunächst das erste Glied:

$$K_x' = \frac{1}{\tau} \int_\tau \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_x'^{\,2}\, d\tau$$

bestimmen. Um dieses machen zu können führen wir nicht die Integration über ein Volumen τ aus, sondern über eine Fläche σ_x, senkrecht auf der X-Achse. Wir haben dann:

$$K_x' = \frac{1}{\sigma_x} \int_{\sigma_x} \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_x'^{\,2}\, d\,\sigma_x = \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sigma_x} \int_{\sigma_x} \varrho' v_x' v_x'\, d\,\sigma_x\,.$$

Man sieht dann, dass K_x' gleich der Hälfte des Transportes von der X-Komponente der Bewegungsgrösse pro Zeit- und Flächeneinheit durch die Fläche σ_x ist, oder:

$$K_x' = \tfrac{1}{2}\, B_{x\,.\,x}\,:$$

Nach Gleichung (15) hat man dann:

$$K_x' = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, v_x^2 + \eta^*\,.$$

In ganz entsprechender Weise finden wir:

$$K_y' = \frac{1}{\tau} \int_\tau \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_y'^{\,2}\, d\,\tau = \frac{1}{\sigma_y} \int_{\sigma_y} \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_y'^{\,2}\, d\,\sigma_y = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, v_y^2 + \eta^*\,,$$

$$K_z' = \frac{1}{\tau} \int_\tau \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_z'^{\,2}\, d\,\tau = \frac{1}{\sigma_z} \int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\, \varrho' v_z'^{\,2}\, d\,\sigma_z = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, v_z^2 + \eta^*\,,$$

und schliesslich:

(22) $$K' = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, v^2 + 3\, \eta^*\,.$$

Wenn man hier die Grössenordnungen untersucht, so findet man, dass das letzte Glied nicht ausser Betracht gesetzt werden kann.

Die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung ist also immer grösser als die kinetische Energie der ausgeglichenen Bewegung. Der Unterschied ist so gross, dass er nicht vernachlässigt werden kann.

Dass dieses der Fall sein muss, sieht man übrigens leicht ein, wenn man sich erinnert wie gross die Windunruhe ist.

Führen wir nach Gleichung (13) den Wert von η^* in Gleichung (22) ein, som bekommen wir:

(23) $$K' = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, (v^2 + 3\, u^2),$$

wo u den mittleren numerischen Wert der ungeordneten Zusatzgeschwindigkeit längs einer Koordinatenachse ist. Der mittlere numerische Wert der Zusatzgeschwindigkeit selbst ist dann:

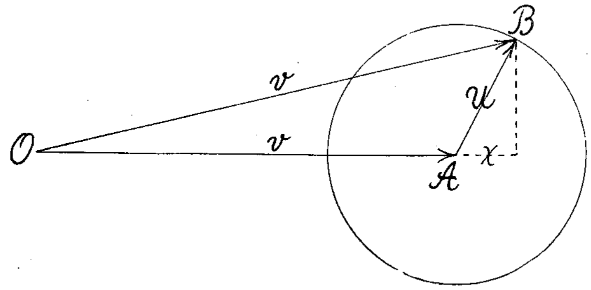
$$U = u \sqrt{3}\,.$$

und man bekommt:

(24) $$K' = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, (v^2 + U^2)\,.$$

Zu derselben Formel kommt man, wenn man annimmt, dass alle Luftteilchen im betrachteten Volum dieselbe Dichte haben, dass der skalare Wert der Zusatzgeschwindigkeit für jedes einzelne Partikelchen gleich dem mittleren skalaren Wert der Zusatzgeschwindigkeiten ist, und dass schliesslich die Zusatzgeschwindigkeiten gleichmässig verteilt auf allen möglichen Richtungen sind.

Wir zeichen die mittlere Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ als



Vektor von Origo O aus. Setzen wir dann die verschiedene $\boldsymbol{v}'$ von O ab, so werden ihre Pfeilspitzen in eine Kugelfläche mit Radius U um die Spitze A des Vektors $\boldsymbol{v}$ fallen, und die Pfeilspitze werden gleichmässig über die Kugelfläche verteilt sein. Aus der Figur ersieht man dann, dass:

$$v'^2 = (v + x)^2 + (U^2 - x^2) = v^2 + U^2 + 2vx \,.$$

Für die mittlere kinetische Energie K' bekommt man:

$$K' = \frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} \tfrac{1}{2}\varrho\,(v^2 + U^2 + 2vx)\,dx = \tfrac{1}{2}\varrho\,(v^2 + U^2)\,,$$

also denselben Formel wie die oben gefundene Gleichung (24).

9. *Transport ungeordneter kinetischer Energie.* Der Transport T_z' von ungeordneter kinetischer Energie pro Zeit- und Flächeneinheit durch eine horizontale Fläche wird:

$$T_z' = \frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2 v_z'\,d\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2 (v_z + \triangle v_z)\,d\sigma_z\,,$$

$$= v_z\,\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2\,d\sigma_z + \frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2 \triangle v_z\,d\sigma_z\,.$$

Für das erste Integral hat man nach Gleichung (22):

$$v_z\,\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2\,d\sigma_z = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,v^2 v_z + 3\,\eta^*\,v_z\,.$$

Das zweite Integral kann man in folgender Weise bestimmen:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2 \triangle v_z\,d\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\left[\int_{\tau_1} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2\,d\tau_1 - \int_{\tau_2} \tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^2\,d\tau_2\right],$$

wo τ_1 das Volumen der wegen des Austausches aufsteigenden Luftteilchen bedeutet, und τ_2 das Volumen der absteigenden Partikeln ist. Gleichung (22) gibt jetzt weiter:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z}\tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^{\,2}\,\triangle\, v_z\, d\,\sigma_z = \frac{1}{\sigma_z}\Big[(\tfrac{1}{2}\,\varrho_1\, v_1^2\,\tau_1 + 3\,\eta_1^*\,\tau_1) - (\tfrac{1}{2}\,\varrho_2\, v_2^2\,\tau_2 + 3\,\eta_2^*\,\tau_2)\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m\,(v_1^2 - v_2^2) + \frac{3}{\sigma_z}\,(\eta_1^*\,\tau_1 - \eta_2^*\,\tau_2)\,.$$

Für das letzte Glied hat man nach Gleichung (13):

$$\frac{3}{\sigma_z}\,(\eta_1^*\,\tau_1 - \eta_2^*\,\tau_2) = \frac{3}{\sigma_z}\,(\tfrac{1}{2}\,\varrho_1\,\tau_1\, u_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\varrho_2\,\tau_2\, u_2^2) = \frac{3}{2}\, m\,(u_1^2 - u_2^2)\,.$$

Da die mittlere vertikale Zusatzgeschwindigkeit nach oben, u_1 nach § 2 die mittlere vertikale Zusatzgeschwindigkeit nach unten, u_2 gleich ist, so bekommt man:

$$\frac{3}{\sigma_z}\,(\eta_1^*\,\tau_1 - \eta_2^*\,\tau_2) = 0\,.$$

Folglich bekommen wir:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z}\tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^{\,2}\,\triangle\, v_z\, d\,\sigma_z = \tfrac{1}{2}\, m\,(v_1^2 - v_2^2) = \tfrac{1}{2}\, m\,(v_x^2{}_{.1} - v_x^2{}_{.2})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, m\,(v^2_{y\,.1} - v^2_{y\,.2}) + \tfrac{1}{2}\, m\,(v^2_{z\,.1} - v^2_{z\,.2})\,.$$

Wir haben jetzt:

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(v_{x\,.1}^2 - v_{x\,.2}^2) = m\,(v_{x\,.1} - v_{x\,.2})\,\frac{v_{x\,.1} + v_{x\,.2}}{2} = m\,(v_{x\,.1} - v_{x\,.2})\, v_x$$

$$= -\,\eta\,\frac{\partial\, v_x}{\partial\, z}\, v_x\,.$$

In derselben Weise finden wir:

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(v_{y\,.1}^2 - v_{y\,.2}^2) = -\,\eta\,\frac{\partial\, v_y}{\partial\, z}\, v_y\,.$$

Weiter haben wir:

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(v_{z\,.1}^2 - v_{z\,.2}^2) = \tfrac{1}{2}\, m\Big[(v_z + u)^2 - (v_z - u)^2\Big] = 2\, m\, u\, v_z = 2\,\eta^*\, v_z.$$

Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{\sigma_z}\int_{\sigma_z}\tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^{\,2}\,\triangle\, v_z\, d\,\sigma_z = -\,\eta\,\frac{\partial\, v_x}{\partial\, z}\, v_x - \eta\,\frac{\partial\, v_y}{\partial\, z}\, v_y + 2\,\eta^*\, v_z$$

$$= -\,\eta\,\frac{\partial\,(\tfrac{1}{2}\, v_x^2)}{\partial\, z} - \eta\,\frac{\partial\,(\tfrac{1}{2}\, v_y^2)}{\partial\, z} + 2\,\eta^*\, v_z\,.$$

Schliesslich finden wir also:

$$T_z' = \tfrac{1}{2}\,\varrho\, v^2\, v_z + 3\,\eta^*\, v_z - \eta\,\frac{\partial\,(\tfrac{1}{2}\, v_x^2)}{\partial\, z} - \eta\,\frac{\partial\,(\tfrac{1}{2}\, v_y^2)}{\partial\, z} + 2\,\eta^*\, v_z\,.$$

In derselben Weise wie für den vertikalen Transport können wir die Transporte T_x' und T_y' der ungeordneten kinetischen Energie berechnen, welche durch die Flächen σ_x und σ_y stattfinden. Wir erhalten dann:

$$(25)\quad \begin{cases} T_x' = \frac{1}{2}\,\varrho\, v^2 v_x + 3\,\eta^*\, v_x - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, x} - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^{\,2})}{\partial\, x} + 2\,\eta^*\, v_x\,, \\ T_y' = \frac{1}{2}\,\varrho\, v^2 v_y + 3\,\eta^*\, v_y - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, y} - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^{\,2})}{\partial\, y} + 2\,\eta^*\, v_y\,, \\ T_z' = \frac{1}{2}\,\varrho\, v^2 v_z + 3\,\eta^*\, v_z - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, z} - \eta\,\dfrac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, z} + 2\,\eta^*\, v_z\,. \end{cases}$$

Für die Ausströmung T_a' von ungeordneter kinetischer Energie aus dem Einheitskubus erhalten wir jetzt:

$$T_a' = \frac{\partial\, T_x'}{\partial\, x} + \frac{\partial\, T_y'}{\partial\, y} + \frac{\partial\, T_z'}{\partial\, z}\,,$$

oder:

$$(26)\quad \begin{aligned} T_a' = {} & v_x\,\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, x} + v_y\,\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, y} + v_z\,\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, z} \\ & + \frac{1}{2}\,\varrho\, v^2 \left(\frac{\partial\, v_x}{\partial x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right) + 3\left[\frac{\partial\,(\eta^*\, v_x)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_y)}{\partial\, y} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_z)}{\partial\, z}\right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^2)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial\, y}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, y}\right)\right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial\, y}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^2)}{\partial\, y}\right) + \frac{\partial}{\partial\, z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, z}\right) + \frac{\partial}{\partial\, z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, z}\right)\right] \\ & + 2\left[\frac{\partial\,(\eta^*\, v_x)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_y)}{\partial\, y} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_z)}{\partial\, z}\right]. \end{aligned}$$

Es bezeichnet hier das Glied:

$$\begin{aligned} & v_x\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, x} + v_y\,\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, y} + v_z\,\frac{\partial(\frac{1}{2}\,\varrho\, v^2)}{\partial\, z} + \frac{1}{2}\,\varrho\, v^2\left(\frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right) \\ & + 3\left(\frac{\partial\,(\eta^*\, v_x)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_y)}{\partial\, y} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_z)}{\partial\, z}\right) \end{aligned}$$

die Ausströmung ungeordneter kinetischer Energie wegen der ausgeglichenen Geschwindigkeiten, während:

$$(27)\quad \begin{aligned} T_a^* = - & \left[\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^2)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial\, y}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, y}\right)\right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial\, y}\left(\eta\,\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^2)}{\partial\, y}\right) + \frac{\partial}{\partial\, z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\, z}\right) + \frac{\partial}{\partial\, z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\, z}\right)\right] \\ & + 2\left[\frac{\partial\,(\eta^*\, v_x)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_y)}{\partial\, y} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_z)}{\partial\, z}\right] \end{aligned}$$

die Ausströmung ungeordneter kinetischer Energie wegen des Austausches bedeutet. Da in obiger Entwickelung das Glied

$$\frac{1}{\sigma_z}\left(3\;\eta_1^*\;\tau_1 - 3\;\eta_2^*\;\tau_2\right)$$

null ist, so gibt T_a^* auch die Ausströmung geordneter kinetischer Energie wegen des Austausches. Dieses ist eine Folge davon, dass Glieder höherer Ordnung ausser Betracht gesetzt worden sind.

10. *Die Änderung der ungeordneten kinetischen Energie mit der Zeit.* Für die ungeordneten Bewegungen hat man:

$$\frac{d\,v_x'}{d\,t} = -\,\alpha'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + \lambda\,v_y' - \nu\,v_z' + \alpha'\,R_x',$$
$$\frac{d\,v_y'}{d\,t} = -\,\alpha'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} - \lambda\,v_x' + \alpha'\,R_y',$$
$$\frac{d\,v_z'}{d\,t} = -\,g - \alpha'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z} + \nu\,v_z' + \alpha'\,R_z'\,.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit v_x', v_y' und v_z' und addiert, so bekommt man:

$$\frac{d\,(\frac{1}{2}\,v'^{\,2})}{d\,t} = -\,\alpha'\left(v_x'\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + v_y'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + v_z'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right) - g\,v_z'$$
$$+\,\alpha'\,(R_x'\,v_x + R_y'\,v_y' + R_z'\,v_z')\,.$$

Wenn man diese Gleichung mit $\varrho'\,\delta\,\tau$ multipliziert und über den Einheitskubus τ_{I} integriert, so erhält man:

$$\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\varrho'\,\frac{d\,(\frac{1}{2}\,v'^{\,2})}{d\,t}\,d\,\tau_{\mathrm{I}} = -\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left(v_x'\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + v_y'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + v_z'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right)d\,\tau_{\mathrm{I}} - \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\varrho'\,g\,v'_z\,d\tau_{\mathrm{I}}$$
$$+\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}(R_x'\,v_x' + R_y'\,v_y' + R_z'\,v_z')\,d\,\tau_{\mathrm{I}}\,. \tag{28}$$

Mit Hilfe von Gleichung (20) hat man, indem $f' = \frac{1}{2}\,v'^{\,2}$ und $\tau = \tau_{\mathrm{I}}$ gesetzt wird:

$$\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\varrho'\,\frac{d\,(\frac{1}{2}\,v'^{\,2})}{d\,t}\,d\,\tau_{\mathrm{I}} = \frac{\partial}{\partial\,t}\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^{\,2}\,d\,\tau_{\mathrm{I}} + \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\tfrac{1}{2}\,\varrho'\,v'^{\,2}\,v_n'\,d\,\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{\partial\,K'}{\partial\,t} + T_a'\,.$$

Weiter haben wir:

$$\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left(v_x'\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + v_y'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + v_z'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right)d\,\tau_{\mathrm{I}}$$
$$= \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left[(v_x + \triangle\,v_x)\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + (v_y + \triangle\,v_y)\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + (v_z + \triangle\,v_z)\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right]d\,\tau_{\mathrm{I}}\,,$$
$$= v_x\,\frac{\partial\,p}{\partial\,x} + v_y\,\frac{\partial\,p}{\partial\,y} + v_z\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z}$$
$$+\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left(\triangle\,v_x\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + \triangle\,v_y\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + \triangle\,v_z\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right)d\,\tau_{\mathrm{I}}\,.$$

Wenn wir hier:

$$-\,\triangle\,a_p = \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left(\triangle\,v_x\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + \triangle\,v_y\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + \triangle\,v_z\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right)d\,\tau_{\mathrm{I}} \tag{29}$$

setzen, so ist $\triangle\,a_p$ gleich dem Unterschied zwischen der wirklichen und der ausgeglichenen Arbeit der Druckkräfte. Wir haben dann:

$$\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}}\left(v_x'\frac{\partial\,p'}{\partial\,x} + v_y'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,y} + v_z'\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,z}\right)d\,\tau_{\mathrm{I}} = v_x\,\frac{\partial\,p}{\partial\,x} + v_y\,\frac{\partial\,p}{\partial\,y} + v_z\frac{\partial p}{\partial\,z} - \triangle\,a_p\,.$$

Weiter haben wir:

$$\int_{\tau_I} \varrho' \, g \, v_z' \, d\tau_I = \varrho \, g \, v_z \, .$$

Die Arbeit gegen der Reibungskräfte

$$-\int_{\tau_I} (R_x' \, v_x' + R_y' \, v_y' + R_z' \, v_z') \, d\tau_I$$

ist gleich der Summe der Dissipation und der Ausströmung von kinetischer Energie wegen des molekylaren Massenaustausches. Wir haben aber schon im K_a' die gesammte Ausströmung von kinetischer Energie berechnet ohne Voraussetzungen über den Ursprung des Austausches und unabhängig davon ob dieser in Form von einzelnen Molekylen geschieht oder in grösseren Massen. Es ist dann klar, dass die Ausströmung kinetischer Energie wegen der Molekylarbewegungen nicht getrennt mitgenommen werden darf. Es ist deshalb die Arbeit der Reibungskräfte durch ein Glied $(-D)$ zu ersetzen, wo D die Dissipation bedeutet.

Durch Einsetzen der gefundenen Ausdrücke in Gleichung (28) bekommen wir dann:

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = - T_a' - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \triangle \, a_p - \varrho \, g \, v_z - D \, . \tag{30}$$

Mit Hilfe von Gleichung (22) können wir auch andere Ausdrücke für die zeitlichen Änderungen der ungeordneten kinetischen Energie finden. Wir erhalten:

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \, \varrho \, v^2\right)}{\partial x} + 3 \frac{\partial \eta^*}{\partial t} \, , \tag{31}$$

und:

$$\frac{d K'}{d t} = \frac{d \left(\frac{1}{2} \, \varrho \, v^2\right)}{d t} + 3 \frac{d \eta^*}{d t} \, . \tag{32}$$

Nach Gleichung (24) haben wir:

$$K' = \tfrac{1}{2} \, \varrho \, (v^2 + U^2) \, ,$$

und bekommen:

$$\frac{d K'}{d t} = \frac{d \left(\frac{1}{2} \, \varrho \, (v^2 + U^2)\right)}{d t} = \varrho \frac{d}{d t} \left(\tfrac{1}{2} \, (v^2 + U^2)\right) + \tfrac{1}{2} \, (v^2 + U^2) \frac{d \varrho}{d t} .$$

Hieraus bekommt man:

$$\varrho \frac{d}{d t} \left(\tfrac{1}{2} \, (v^2 + U^2)\right) = \frac{d K'}{d t} - \tfrac{1}{2} \, v^2 \frac{d \varrho}{d t} - \tfrac{1}{2} \, U^2 \frac{d \varrho}{d t} \, ,$$

oder nach Gleichung (32):

$$\varrho \frac{d}{d t} \left(\tfrac{1}{2} \, (v^2 + U^2)\right) = \frac{d \left(\frac{1}{2} \, \varrho \, v^2\right)}{d t} - \tfrac{1}{2} \, v^2 \frac{d \varrho}{d t} + 3 \frac{d \eta^*}{d t} - \tfrac{1}{2} \, \varrho \, U^2 \frac{1}{\varrho} \frac{d \varrho}{d t} \, ,$$

oder indem man:

$$\tfrac{1}{2} \, \varrho \, U^2 = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \, \varrho \, u^2 = 3 \, \eta^*$$

einführt:

(33) $$\varrho \frac{d}{d\,t}\left(\tfrac{1}{2}\,(v^2 + U^2)\right) = \varrho \frac{d}{d\,t}\,(\tfrac{1}{2}\,v^2) + 3\,\frac{d\,\eta^*}{\partial\,t} + 3\,\eta^*\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right).$$

Es ist hier $\varrho \dfrac{d}{d\,t}\left(\tfrac{1}{2}\,(v^2 + U^2)\right)$ die Zunahme mit der Zeit von der ungeordneten kinetischen Energie eines Luftindividuums, in derselben Weise wie $\varrho \dfrac{d}{d\,t}\,(\tfrac{1}{2}\,v^2)$ die Zunahme der geordneten kinetischen Energie eines Luftindividuums ist. Wir können dieses in folgender Weise einsehen:

$\dfrac{d\,K'}{d\,t}$ ist die individuelle Zunahme mit der Zeit von der ungeordneten kinetischen Energie pro Volumeneinheit gerechnet, während $\dfrac{d\,(\frac{1}{2}\,\varrho\,v^2)}{d\,t}$ die individuelle Zunahme der kinetischen Energie pro Volumeneinheit für die ausgeglichene Bewegung ist. Um die Zunahme von kinetischer Energie eines Luftindividuums zu bekommen, das im betrachteten Moment das Volumen eins hat, muss man in beiden Fällen die Ausströmung kinetischer Energie hinzufügen, die von der individuellen Volumenzunahme des Volumeneinheits pro Sekunde:

$$\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

herrührt.

Die Zunahme der kinetischen Energie des Luftindividuums nennen wir $\dfrac{\delta\,K}{d\,t}$ und $\dfrac{\delta\,K'}{d\,t}$ beziehungsweise für die ausgeglichenen und die ungeordneten Bewegungen. Wir erhalten:

$$\frac{\delta\,K}{d\,t} = \frac{d\,K}{d\,t} + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,v^2\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right) = \frac{d\,(\frac{1}{2}\,\varrho\,v^2)}{d\,t} - \tfrac{1}{2}\,v^2\,\frac{d\,\varrho}{d\,t}$$
$$= \varrho\,\frac{d\,v}{d\,t}\,,$$

und:

$$\frac{\delta\,K'}{d\,t} = \frac{dK'}{d\,t} + K'\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right) = \frac{d\,(\frac{1}{2}\,\varrho\,v^2)}{d\,t} + 3\,\frac{d\,\eta^*}{d\,t}$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\,\varrho\,v^2 + 3\,\eta^*)\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right).$$

Hieraus findet man dann:

$$\frac{\delta\,K'}{d\,t} = \varrho\,\frac{d\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{d\,t} + 3\,\frac{d\,\eta^*}{d\,t} + 3\,\eta^*\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right)$$

was in Uebereinstimmung mit Gleichung (33) ist.

Wenn man in Gleichung (30) die Werte von $\dfrac{\partial\,K'}{\partial\,t}$ (Gleichung 31) und von T_a' (Gleichung 26) einsetzt, so erhält man:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial t}+3\frac{\partial\eta^*}{\partial t}=-\left[v_x\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial x}+v_y\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial y}+v_z\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial z}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\varrho v^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$-3\left(v_x\frac{\partial\eta^*}{\partial x}+v_y\frac{\partial\eta^*}{\partial y}+v_z\frac{\partial\eta^*}{\partial z}\right)-3\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial z}\right)\right]$$
$$-2\left(\frac{\partial(\eta^*v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\eta^*v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\eta^*v_z)}{\partial z}\right)-\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}+v_z\frac{\partial p}{\delta z}\right)$$
$$+\triangle a_p-\varrho g v_z-D.$$

Da man nach Gleichung (33):

$$\varrho\frac{d\left(\frac{1}{2}(v^2+U^2)\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{dt}-\frac{1}{2}v^2\frac{d\varrho}{dt}+3\frac{d\eta^*}{dt}+3\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$
$$=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial t}+v_x\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial x}+v_y\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial y}+v_z\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)}{\partial z}$$
$$+\frac{1}{2}\varrho v^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$+3\frac{\partial\eta^*}{\partial t}+3\left(v_x\frac{\partial\eta^*}{\partial x}+v_y\frac{\partial\eta^*}{\partial y}+v_z\frac{\partial\eta^*}{\partial z}\right)+3\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

hat, so bekommt man:

$$\varrho\frac{d\left(\frac{1}{2}(v^2+U^2)\right)}{dt}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$
$$(34)\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial z}\right)\right]$$
$$-2\left(\frac{\partial(\eta^*v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\eta^*v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\eta^*v_z)}{\partial z}\right)-\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$
$$+\triangle a_p-\varrho g v_z-D.$$

IV. Bestimmung der Dissipation und der Arbeit der ungeordneten Druckkräfte.

11. Wenn man die Gleichungen (21) der Reihe nach mit ϱv_x, ϱv_y und ϱv_z multipliziert und dann addiert, so bekommt man:

$$\varrho\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt}=\left[v_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+v_z\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+v_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+v_z\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+v_x\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+v_y\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]$$
$$-2\left(v_x\frac{\partial\eta^*}{\partial x}+v_y\frac{\partial\eta^*}{\partial y}+v_z\frac{\partial\eta^*}{\partial z}\right)-\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\varrho g v_z,$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial z}\right)\right]$$

$$- 2\left(\frac{\partial(\eta^* v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta^* v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\eta^* v_z)}{\partial z}\right) - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\right) - \varrho g v_z$$

$$- \eta\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+ 2\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

oder nach Gleichung (27):

$$\varrho \frac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{dt} = -\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\right) - \varrho g v_z - T_a^*$$

$$- \eta\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+ 2\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

wo T_a^* die Ausströmung geordneter kinetischer Energie wegen des Austausches bedeutet. Es wird dann die Dissipation

(35) $$D = \eta\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2\right] + 2\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

In dieser Gleichung haben wir die Grössenordnungen:

$$\text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 = \text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 = 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7},$$

$$\text{Magn. } 2\eta^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8},$$

$$\text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 = \text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 = 10^{-12} \text{ bis } 10^{-11},$$

$$\text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 = \text{Magn. } \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 10^{-16} \text{ bis } 10^{-15}.$$

Man bekommt deshalb mit grosser Genauigkeit:

(35′) $$D = \eta\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2\right] - 2\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Für die Zunahme der geordneten kinetischen Energie bekommt man dann:

$$\varrho \frac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial z}\right)\right]$$

(36) $$- 2\left(\frac{\partial(\eta^* v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta^* v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\eta^* v_z)}{\partial z}\right) - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$- \varrho g v_z - D.$$

Wenn man diese Gleichung von Gleichung (34) subtrahiert, so erhält man:

$$\triangle\, a_p = \varrho\, \frac{d\left(\frac{1}{2}\left(v^2 + U^2\right)\right)}{d\, t} - \varrho\, \frac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{d\, t} = \varrho\, \frac{d\left(\frac{1}{2} U^2\right)}{d\, t}\,. \tag{37}$$

Der Unterschied $\triangle\, a_p$ zwischen der Arbeit der ungeordneten und der ausgeglichenen Druckkräfte ist also gleich der Zunahme mit der Zeit von dem Unterschied zwischen ungeordneter und geordneter kinetischer Energie.

Nach Gleichung (33) hat man weiter:

$$\triangle\, a_p = 3\, \frac{d\eta^*}{d\, t} + 3\, \eta^* \left(\frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right). \tag{38}$$

V. Einige Energiegleichungen.

12. *Die Änderung der ausgeglichenen kinetischen Energie mit der Zeit.* Wir werden Gleichung (36) etwas umformen:

$$\begin{aligned} \varrho\, \frac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{d\, t} = & \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, z}\right)\right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial\, y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\, \frac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial\, z}\right)\right] \\ & - 2\left(\frac{\partial\left(\eta^* v_x\right)}{\partial\, x} + \frac{\partial\left(\eta^* v_y\right)}{\partial\, y} + \frac{\partial\left(\eta^* v_z\right)}{\partial\, z}\right) - \left(v_x \frac{\partial\, p}{\partial\, x} + v_y \frac{\partial\, p}{\partial\, y} + v_z \frac{\partial\, p}{\partial\, z}\right) \\ & - \varrho\, g\, v_z - D\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Die Grössenordnungen der Glieder dieser Gleichung sind:

Magn. $v_z\, \dfrac{\partial\, p}{\partial\, z}$ = Magn. $\varrho\, v_z\, g = 10^{-4}$ bis 10^{-3},

Magn. $\varrho\, \dfrac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{d\, t}$ = Magn. $v_x \dfrac{\partial\, p}{\partial\, x}$ = Magn. $v_y\, \dfrac{\partial\, p}{\partial\, y} = 10^{-6}$ bis 10^{-5},

Magn. $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta\, \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, z}\right)$ = Magn. $2\, v_x\, \dfrac{\partial\, \eta^*}{\partial\, x}$ = Magn. $2\, v_y\, \dfrac{\partial\, \eta^*}{\partial\, y}$

= Magn. $2\, v_z\, \dfrac{\partial\, \eta^*}{\partial\, z} = 10^{-7}$ bis 10^{-6},

Magn. $D = 10^{-8}$ bis 10^{-7},

Magn. $2\, \eta^* \left(\dfrac{\partial\, v_x}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right) = 10^{-9}$ bis 10^{-8},

Magn. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, x}\right)$ = Magn. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta\, \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{\partial\, y}\right) = 10^{-12}$ bis 10^{-11},

Magn. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)}{\partial\, x}\right)$ = Magn. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta\, \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v_y^2\right)}{\partial\, y}\right)$ = Magn. $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\left(\frac{1}{2} v_z^2\right)}{\partial\, z}\right)$

$= 10^{-12}$ bis 10^{-11}.

Wenn man die kleinen Glieder ausser Betracht setzt, so bekommt man:

$$- v_z\, \frac{\partial\, p}{\partial\, z} - \varrho\, g\, v_z = 0\,,$$

oder:

$$\frac{\partial\, p}{\partial\, z} = - \varrho\, g\,.$$

Wir kommen also auf die statische Gleichung zurück, die wie bekannt mit grosser Annäherung erfüllt ist.

Aus den oben gegebenen Grössenordnungen der Glieder in Gleichung (39) kann man schliessen, dass:

$$\text{Magn.}\left(-\, v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\, g\, v_z\right) = \text{höchstens } 10^{-6} \text{ bis } 10^{-5}\,.$$

Mit Hilfe der dritten Bewegungsgleichung (21):

$$\frac{d\, v_z}{d\, t} = -\, g - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + \nu\, v_x + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) - 2\, \alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial z}$$

werden wir die Grössenordnung genauer bestimmen.

Wir multiplizieren mit $\varrho\, v_z$ und bekommen:

$$\varrho\, v_z \frac{d\, v_z}{d\, t} = -\, \varrho\, g\, v_z - v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \nu\, \varrho\, v_x\, v_z + v_z \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$
$$+\, v_z \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) - 2\, v_z \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\,.$$

Hier finden wir folgende Grössenordnungen:

$$\text{Magn. } v_z \frac{\partial p}{\partial z} = \text{Magn. } \varrho\, g\, v_z = 10^{-4} \text{ bis } 10^{-3},$$

$$\text{Magn. } v_z \frac{\partial \eta^*}{\partial z} = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6},$$

$$\text{Magn. } \nu\, \varrho\, v_x\, v_z = 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7},$$

$$\text{Magn. } \varrho\, v_z \frac{d\, v_z}{d\, t} = 10^{-10} \text{ bis } 10^{-9},$$

$$\text{Magn. } v_z \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \text{Magn. } v_z \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 10^{-14} \text{ bis } 10^{-13}.$$

Wir bekommen dann:

$$\text{Magn.}\left(-\, v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\, g\, v_z - 2\, v_z \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) = 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7},$$

indem diese Summe höchstens die Grössenordnung der Summe der anderen Glieder hat.

Wir schreiben jetzt Gleichung (39) in folgender Weise:

$$\varrho \frac{d\, (\frac{1}{2}\, v^2)}{d\, t} = -\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial z}\right) - D$$
$$-\, 2\left(v_x \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta^*}{\partial y}\right) - 2\, \eta^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$+\left(-\, v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\, g\, v_z - 2\, v_z \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. +\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v_x^2)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v_y^2)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\, (\frac{1}{2}\, v_z^2)}{\partial z}\right)\right],$$

und haben folgende Grössenordnungen:

$$\text{Magn. } \varrho \frac{d\, (\frac{1}{2}\, v^2)}{d\, t} = \text{Magn.}\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 10^{-6} \text{ bis } 10^{-5},$$

$$\text{Magn.}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{\partial z}\right) = \text{Magn.}\ 2\left(v_x\frac{\partial\,\eta^*}{\partial x} + v_y\frac{\partial\,\eta^*}{\partial y}\right) = 10^{-7}\ \text{bis}\ 10^{-6},$$

$$\text{Magn.}\ D = \text{Magn.}\left(-\,v_z\frac{\partial\,p}{\partial z} - \varrho\,g\,v_z - 2\,v_z\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,z}\right) = 10^{-8}\ \text{bis}\ 10^{-7},$$

$$\text{Magn.}\ 2\,\eta^*\left(\frac{\partial\,v_x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v_y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}\right) = 10^{-9}\ \text{bis}\ 10^{-8},$$

$$\text{Magn.}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{\partial\,x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{\partial\,y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_x^2)}{\partial\,x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_y^2)}{\partial\,y}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v_z^2)}{\partial\,z}\right)\right] = 10^{-12}\ \text{bis}\ 10^{-11}.$$

Wir können also mit guter Annäherung:

(39′)
$$\varrho\,\frac{d\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{d\,t} = -\left(v_x\frac{\partial\,p}{\partial\,x} + v_y\frac{\partial\,p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\,(\frac{1}{2}\,v^2)}{\partial\,z}\right)$$
$$- 2\left(v_x\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,x} + v_y\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,y}\right) - D$$

setzen. Aus dieser Gleichung und von der Gleichung:

$$-\,v_z\frac{\partial\,p}{\partial\,z} - \varrho\,g\,v_z = 0$$

geht folgendes Resultat hervor:

Die Änderung der kinetischen Energie mit der Zeit rührt in erster Linie von der Arbeit der horizontalen Druckkräfte her, während die Arbeit der vertikalen Druckkräfte sehr nahe von Änderungen in der potentiellen Energie kompensiert wird.

13. *Der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie für ausgeglichene Bewegungen.* Der Hauptsatz lautet:

$$I\,d\,Q' = I\,c_p\,d\,\vartheta' - \alpha'\,d\,p',$$

wo:

$$d\,Q' = \text{zugeführte Warmemenge}$$

ist. Man hat dann weiter:

$$I\,\frac{d\,Q'}{d\,t} = I\,\varepsilon' = I\,c_p\,\frac{d\,\vartheta'}{d\,t} - \alpha'\,\frac{d\,p'}{d\,t}.$$

Es ist dann ε' die Wärmemenge, die pro Sekunde der individuellen Masseneinheit zugeführt wird, während $\frac{d\,\vartheta'}{d\,t}$ und $\frac{dp'}{d\,t}$ die individuellen Ableitungen von ϑ' und p' nach der Zeit bedeuten.

Wir multiplizieren jetzt die Gleichung mit $\varrho'\,d\,\tau_{\mathrm{I}}$ und integrieren über das Volumen τ_{I}. Wir bekommen dann:

$$\int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}} I\,\varepsilon'\,\varrho'\,d\,\tau_{\mathrm{I}} = \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}} I\,c_p\,\varrho'\,\frac{d\,\vartheta'}{d\,t}\,d\,\tau_{\mathrm{I}} - \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}} \frac{d\,p'}{d\,t}\,d\,\tau_{\mathrm{I}}.$$

Indem wir hier:

(40)
$$\varrho\,\varepsilon = \int\limits_{\tau_{\mathrm{I}}} \varrho'\,\varepsilon'\,d\,\tau_{\mathrm{I}}$$

setzen, so bekommen wir:

$$\int_{\tau_{\mathrm{I}}} I\,\varepsilon'\,\varrho'\,d\tau_{\mathrm{I}} = I\,\varepsilon\,\varrho\,.$$

Wenn $f' = \vartheta$ und $\tau = \tau_{\mathrm{I}}$ gesetzt wird, gibt Gleichung (20):

$$I\,c_p \int_{\tau_{\mathrm{I}}} \varrho' \frac{d\vartheta'}{dt}\,d\tau_{\mathrm{I}} = I\,c_p \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau_{\mathrm{I}}} \varrho'\,\vartheta'\,d\tau_{\mathrm{I}} + I\,c_p \int_{\sigma_{\mathrm{I}}} \varrho'\,\vartheta'\,v_n'\,d\sigma_{\mathrm{I}}$$

$$= I\,c_p \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\,\vartheta) + W_a\,,$$

wo W_a durch Gleichung (18) gegeben ist.

Weiter erhalten wir:

$$-\int_{\tau_{\mathrm{I}}} \frac{dp'}{dt}\,d\tau_{\mathrm{I}} = -\int_{\tau_{\mathrm{I}}} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + v_x' \frac{\partial p'}{\partial x} + v_y' \frac{\partial p'}{\partial y} + v_z' \frac{\partial p'}{\partial z}\right) d\tau_{\mathrm{I}}$$

$$= -\frac{dp}{dt} + \triangle\,a_p\,.$$

Nach Gleichung (38) hat man dann weiter:

$$-\int_{\tau_{\mathrm{I}}} \frac{dp'}{dt}\,d\tau_{\mathrm{I}} = -\frac{dp}{dt} + 3\,\frac{d\eta^*}{dt} + 3\,\eta^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Nachdem wir somit die einzelnen Glieder bestimmt haben, finden wir für den ersten Hauptsatz:

$$I\,\varepsilon\,\varrho = I\,c_p \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\,\vartheta) + I\,c_p\left[\frac{\partial(\varrho\,\vartheta\,v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\,\vartheta\,v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\,\vartheta\,v_z)}{\partial z}\right]$$

$$- I\,c_p\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\eta\,(\gamma'-\gamma)\Big)\right]$$

$$-\frac{dp}{dt} + 3\,\frac{d\eta^*}{dt} + 3\,\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

oder:

$$I\,\varepsilon\,\varrho = I\,c_p\,\varrho\,\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dp}{dt} - I\,c_p\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\eta\,(\gamma'-\gamma)\Big)\right]$$
(41)
$$+ 3\,\frac{d\eta^*}{dt} + 3\,\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

oder, indem $\gamma' = \dfrac{g}{I\,c_p}$ gesetzt wird:

$$I\,\varepsilon\,\varrho = I\,c_p\,\varrho\,\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dp}{dt} - I\,c_p\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)\right]$$
(42)
$$-\,g\,\frac{\partial\eta}{\partial z} + 3\,\frac{d\eta^*}{dt} + 3\,\eta^*\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Wir haben hier die Grössenordnungen:

Magn. $I\,\varepsilon\,\varrho$ = Magn. $I\,c_p\,\varrho\,\dfrac{d\vartheta}{dt}$ = Magn. $\dfrac{dp}{dt} = 10^{-4}$ bis 10^{-3},

Magn. $I\,c_p\,\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\eta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)$ = Magn. $g\,\dfrac{\partial\eta}{\partial z} = 10^{-5}$ bis 10^{-4},

Magn. $3\,\dfrac{d\eta^*}{dt} = 10^{-7}$ bis 10^{-6},

$$\text{Magn. } 3\ \eta^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \text{Magn. } I\ c_p \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)$$

$$= \text{Magn.} I c_p \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) = 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}.$$

Wenn wir die kleinen Glieder ausser Betracht setzen, reduzieren sich die Gleichungen auf:

(41′)
$$I\ \varepsilon\ \varrho = I\ c_p\ \varrho \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dp}{dt} - I\ c_p \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\ (\gamma' - \gamma)\right),$$

oder nach Gleichung (19):

(42′)
$$I\ \varepsilon\ \varrho = I\ c_p\ \varrho \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\eta \frac{\partial}{\partial z}(I\ c_p\ \vartheta + g\ z)\right].$$

Die innere Energie, die der betrachteten Luftmasse wegen des molekylaren Austausches zugeführt wird, also die wegen der Wärmeleitung zugeführte innere Energie, darf in ε nicht mitgerechnet werden, weil wir schon in $(-\ W_a)$ den gesammten Zufuhr von Wärmemenge berechnet haben, ohne Voraussetzung über den Ursprung des Austausches und unabhängig davon, ob dieser in Form von einzelnen Molekylen geschieht oder in grösseren Massen.

14. *Eine kombinierte Energiegleichung.* Aus Gleichung (39) bekommt man:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \varrho \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} - \varrho\ g\ v_z + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\partial z}\right)\right] - 2\left(\frac{\partial(\eta^* v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta^* v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\eta^* v_z)}{\partial z}\right)$$

$$- D - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial z}\right)\right].$$

Wenn man diesen Ausdruck in Gleichung (42) einführt, so bekommt man:

$$I\ \varepsilon\ \varrho = I\ c_p\ \varrho \frac{d\vartheta}{dt} - I\ c_p \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)\right]$$

$$- g \frac{\partial \eta}{\partial z} + 3 \frac{d\eta^*}{dt} + 3\ \eta^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial t} + \varrho \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} + \varrho\ g\ v_z - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\partial z}\right)\right] + 2\left[\frac{\partial(\eta^* v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta^* v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\eta^* v_z)}{\partial z}\right]$$

$$+ D + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_y^2\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)}{\partial z}\right)\right].$$

Wenn wir hier:

(43) $$e = I\, c_p\, \vartheta + g\, z + \tfrac{1}{2}\, v^2$$

einführen, so reduziert sich die Gleichung auf:

(44)
$$\begin{aligned} I\, \varepsilon\, \varrho = & \left[\varrho \frac{d\,e}{d\,t} + 3\, \frac{d\,\eta^*}{d\,t} + 3\,\eta^* \left(\frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right)\right] + \frac{\partial\, p}{\partial\, t} + D \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\, e}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\, e}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\, e}{\partial z}\right)\right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_x^2)}{\partial\, x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_y^2)}{\partial\, y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_z^2)}{\partial z}\right)\right] \\ & + 2\left[\frac{\partial\,(\eta^*\, v_x)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_y)}{\partial\, y} + \frac{\partial\,(\eta^*\, v_z)}{\partial\, z}\right]. \end{aligned}$$

Es bedeutet hier die Glieder im ersten Klammern die individuelle Zunahme der ungeordneten Energie mit der Zeit (siehe Gleichung 33), und die drei letzten Glieder geben die Ausströmung ungeordneter Energie wegen des Austausches (siehe Gleichung 27).

Wir haben hier die Grössenordnungen:

$$\text{Magn. } I\, \varepsilon\, \varrho = \text{Magn. } \varrho \frac{d\,(I\, c_p\, \vartheta)}{d\,t} = \text{Magn. } \varrho \frac{d\,(g\, z)}{d\,t} = 10^{-4} \text{ bis } 10^{-3},$$

$$\text{Magn. } \frac{\partial\, p}{\partial\, t} = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial}{\partial z}\,(I\, c_p\, \vartheta)\right) = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial}{\partial z}(g\, z)\right) = 10^{-5} \text{ bis } 10^{-4},$$

$$\text{Magn. } \varrho \frac{d\,(\frac{1}{2}\, v^2)}{d\,t} = 10^{-6} \text{ bis } 10^{-5},$$

$$\begin{aligned} \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial\, z}\right) & = \text{Magn. } 3\, \frac{d\,\eta^*}{d\,t} = \text{Magn. } 2\, v_x\, \frac{\partial\,\eta^*}{\partial\, x} = \text{Magn. } 2\, v_y\, \frac{\partial\,\eta^*}{\partial\, y} \\ & = \text{Magn. } 2\, v_z\, \frac{\partial\,\eta^*}{\partial\, z} = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$\text{Magn. } D = 10^{-8} \text{ bis } 10^{-7},$$

$$\begin{aligned} \text{Magn. } 3\,\eta^* \left(\frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z}\right) & = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\,(I\, c_p\, \vartheta)}{\partial\, x}\right) \\ & = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\,(I\, c_p\, \vartheta)}{\partial\, y}\right) = 10^{-9} \text{ bis } 10^{-8}, \end{aligned}$$

$$\text{Magn. } \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial\, x}\right) = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v^2)}{\partial\, y}\right) = 10^{-12} \text{ bis } 10^{-11},$$

$$\begin{aligned} \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_x^2)}{\partial\, x}\right) & = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_y^2)}{\partial\, y}\right) = \text{Magn. } \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial\,(\frac{1}{2}\, v_z^2)}{\partial\, z}\right) \\ & = 10^{-12} \text{ bis } 10^{-11}. \end{aligned}$$

Wenn wir nur die sehr kleinen Glieder vernachlässigen, so bekommen wir:

$$(44') \qquad I\,\varepsilon\,\varrho = \left[\varrho\frac{d\,e}{d\,t} + 3\,\frac{d\,\eta^*}{d\,t}\right] + \frac{\partial\,p}{\partial\,t} + D$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\,z}\left(\eta\frac{\partial\,e}{\partial\,z}\right) - 2\left(v_x\,\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,x} + v_y\,\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,y} + v_z\,\frac{\partial\,\eta^*}{\partial\,z}\right)\right].$$

Die Änderungen der kinetischen Energie sind so klein, dass sie in erster Annäherung neben denjenigen der inneren Energie und der potentiellen Energie ausser Betracht gesetzt werden können.

Es sind nur kleine Differenzen, die zur Änderungen der kinetischen Energie gehen, und davon geht wieder ein merklicher Teil zur Änderung der Energie der Windunruhe.