

INTEGRATIONEN DER ATMOSPHERISCHEN STÖRUNGSGLEICHUNGEN

ERSTER TEIL

WELLENBEWEGUNGEN IN ROTIERENDEN, INKOMPRESSIBLEN
FLÜSSIGKEITSSCHICHTEN

VON

H. SOLBERG

(Manuskript am 25. Mai 1928 eingegangen)

Einleitung.

Wenn eine oder mehrere Flüssigkeitsschichten, unter dem Einfluß äußerer Kräfte, kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage oder um einen Zustand stationärer Bewegung ausführen, so lehrt uns die Hydrodynamik, daß Wellen auftreten können, die durch Schwingungen der freien Oberfläche und eventuell auch der inneren Grenzflächen sichtbar werden. Die Theorie dieser Wellen ist hauptsächlich für zwei Spezialfälle ausgearbeitet worden. Es sind dies:

Die reinen Gravitationswellen, wo die äußere Kraft durch die Schwere allein gegeben ist,

die elastischen Wellen, wo die Schwere außer Betracht gesetzt wird und die potentielle Energie ausschließlich von inneren elastischen Kräften herrührt.

In dieser Arbeit werden wir uns nur mit den Gravitationswellen beschäftigen. Unter denselben werden meistens wieder zwei verschiedene Arten von Bewegungen hervorgehoben, die Oberflächenwellen und die quasistatischen Wellen (auch Flutwellen und Lagrange'sche lange Wellen genannt).

Nach der Theorie der Oberflächenwellen, die von Lagrange und Stokes herrührt, werden die einzelnen Flüssigkeitsteilchen während einer Schwingungsperiode in einem vertikalen Kreise mit nach unten abnehmendem Durchmesser herumlaufen. Bei endlicher Schichtdicke wird jedoch eine nach unten zunehmende Abplattung der Bahn in vertikaler Richtung stattfinden, wodurch Ellipsen hervorgehen.

Sind zwei Flüssigkeitsschichten vorhanden, so ergibt sich die bekannte Wellenbewegung, die nach Helmholtz die Bildung von Wogenwolken an der Trennungsoberfläche zweier Luftschichten verursachen soll. Bei gewissen kritischen Grenzwerten der vorkommenden physikalischen Konstanten, wie z. B. Schichthöhen, Konvektionsströme und Dichten, fangen diese Wellen an, mit der Zeit exponentiell zu wachsen, was auf eine Instabilität der Grundströmung hindeutet.

Bei den anderen, quasistatischen Wellen wird die vertikale Beschleunigung vernachlässigt, wodurch die vertikale Druckverteilung rein hydrostatisch bedingt ist. Diese Vernachlässigung ist bloß in dem Falle berechtigt, wo die vertikale Bewegung der Flüssigkeitsteilchen gegenüber der horizontalen zurücktritt, was nur bei langen Wellen in seichten Schichten zutreffen wird. Entsprechend ergibt sich bei Wellen dieser Art annähernd horizontale, geradlinige Orbitalbewegung.

Die bisherige Theorie der Oberflächenwellen eines geschichteten Systems ist nur dann gültig, wenn keine wirbelerzeugende Kräfte vorhanden sind. Von den Gleitwirbeln an den Grenzflächen abgesehen, ist dann auch die Wellenbewegung wirbelfrei. Die Theorie der quasistatischen Wellen dagegen ist auch für den Fall von auftretenden Corioliskräften entwickelt worden (z. B. die Laplace'sche Gezeitentheorie), wobei die Orbitalbahnen horizontale Kreise werden. Wenn insbesondere die Einwirkung von Corioliskräften auf die Wellenbewegung in Flüssigkeitsschichten untersucht werden soll, könnte es deshalb am vorteilhaftesten erscheinen, die Theorie der quasistatischen Wellen heranzuziehen, wodurch einfacherweise die Laplace'sche Gezeitentheorie auf den Fall von mehreren Schichten auszudehnen wäre. Eine solche Theorie würde indessen nur Wellenbewegungen mit kleineren Orbitalperioden darstellen können (vgl. näheres § 20 dieser Arbeit, S. 75); wir wünschen aber Wellenbewegungen von allen möglichen Orbitalperioden, und insbesondere großen, berücksichtigen zu können. Es bleibt uns deshalb nur übrig, die Theorie der Oberflächenwellen auch auf den Fall von auftretenden Corioliskräften auszudehnen. Es wäre dann zu erwarten, daß die Flüssigkeitsteilchen, unter der rechtsdrehenden Einwirkung der Rotation, während einer Wellenperiode nicht mehr in vertikalen, sondern in schräggestellten Ellipsen herumlaufen werden, deren Neigung zu der Horizontalebene um so kleiner wird, je größer die Orbitalperiode ist. Die Wellenbewegung muß folglich in drei Dimensionen vor sich gehen, und natürlicherweise kann sie auch nicht mehr einen wirbelfreien Charakter besitzen.

Diese verallgemeinerte Theorie der Oberflächenwellen soll in dieser Arbeit zur Darstellung kommen. Wir werden dabei sogleich mehrere Flüssigkeitsschichten berücksichtigen, damit sich die an anderer Stelle zu gebende Anwendung der Theorie zu einer Erklärung gewisser hydro- und atmosphärischer Vorgänge nicht ohne weiteres als erfolglos herausstellen sollte.

Durch die Arbeiten von V. Bjerknes ist es nämlich klar geworden, daß die wichtigsten Prozesse sowohl in der Atmosphäre wie auch in der Hydrosphäre auf die heterogenen und baroklinen Eigenschaften der Flüssigkeiten zurückzuführen sind, wobei eine Flüssigkeit dann als baroklin bezeichnet wird, wenn die Flächen gleichen Druckes und die Flächen gleicher Dichte einander schneiden.

Um eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu erhalten, dürften wir also eigentlich die Wellenbewegung in einer baroklinen Flüssigkeit untersuchen, was aber mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist. Es kann aber durch einen Kunstgriff den Verhältnissen in einer solchen Flüssigkeit nahegekommen werden; denn durch eine Zerlegung der baroklinen Flüssigkeit in mehrere durch Gleitflächen voneinander getrennte, barotrope Schichten wird nämlich die Flüssigkeit, als Gesamtsystem betrachtet, immer noch barokline Eigenschaften aufweisen. Die Theorie der Wellenbewegung in einem solchen geschichteten System würde folglich die erste Näherung an eine Theorie der Wellenbewegung in durchaus baroklinen Flüssigkeiten darstellen können.

Die allgemeine Bewegung des Flüssigkeitssystems kann als die Summe von einer endlichen Grundströmung und einer unendlich kleinen Störungsbewegung dargestellt werden. Sowohl die allgemeine Bewegung wie auch die Grundströmung müssen für sich die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen befriedigen; als Differenz zwischen den für diese zwei endlichen Strömungen geltenden Bewegungsgleichungen ergeben sich dann die Gleichungen der Störung, die wegen der unendlichen Kleinheit der Bewegung auch auf lineare Form gebracht werden können.

Diese Arbeit soll nun den Integrationen der so erhaltenen »atmosphärischen Störungsgleichungen« gewidmet werden. Die im Kapitel I gegebene Entwicklung dieser Gleichungen schließt sich im wesentlichen der von V. Bjerknes ursprünglich gegebenen an; durch

Einführung von Vektoren und neue, einfachere Formulierung der Grenzflächenbedingungen an freien Grenzflächen ist es aber möglich gewesen, ein beträchtliches Zusammenziehen der Formeln zu erzielen.

In dem vorliegenden, ersten Teil unserer Arbeit sind nur diejenigen Integrationen aufgenommen worden, die mit relativ einfachen, z. T. rein primitiven, mathematischen Hilfsmitteln durchgeführt werden können. Es sollen dabei nur zwei inkompressible Flüssigkeiten vorhanden sein, die sich mit konstanten, geradlinigen und parallelen Grundströmen auf einer ebenen Unterlage bewegen. Um die Resultate auf die Atmosphäre anwenden zu können, muß dann der betreffende Teil der Erdoberfläche als eben angesehen werden. Die Flüssigkeiten sind unbegrenzt in Richtung der Grundströme, können aber senkrecht dazu eine Begrenzung haben. Je nach der Lage dieser Begrenzungsflächen relativ zu der Trennungsfläche beider Schichten sind mehrere Spezialfälle zu unterscheiden, die in den Kapiteln II—V gesondert untersucht werden.

Die Trennungsfläche und die Begrenzungsflächen, von welchen die obere auch eine freie Oberfläche darstellen kann, sind horizontale Ebenen (Kapitel II). Auf einer rotierenden Erde wäre diese Lage nur am Äquator realisierbar. Die Störungsbewegung verläuft dann in der Vertikalebene; jeder gegebenen Wellenlänge entsprechen zwei in Richtung des Grundstromes mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich fortpflanzenden Wellen, und die allgemeine Störung ist aus diesen zusammengesetzt. Je nachdem die zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten reell und verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, ergeben sich drei verschiedene Wellentypen. Die entsprechenden Orbitalbahnen sind (bei unendlicher Tiefe) aus zwei Kreisen — und stellt folglich eine Epizykloide dar —, aus einem Kreis und einer archimedischen Spirale und aus zwei logarithmischen Spiralen zusammengesetzt. Nur der erste Fall, der bei kleinem Windsprung und langen Wellen vorkommt, wird einer stabilen Grundströmung entsprechen.

Vertikale Trennungsfläche mit vertikalen Begrenzungswänden, die auch im Unendlichen rücken können (Kapitel III). Um horizontal sich fortpflanzende Wellen zu erhalten, müssen dann beide Schichten dieselbe Dichte haben. Da außerdem ein vertikaler Rotationsvektor vorliegen muß, ist dieser Fall nur an den Polen einer rotierenden Erde realisierbar. Die Gleichgewichtslage ist immer labil; die kleinste Störung wird mit der Zeit unbegrenzt anwachsen und ein Aufrollen der Diskontinuitätsfläche zur Folge haben. Bei verschwindendem Windsprung ergibt sich die Rayleigh'sche Theorie des Flatterns von Flaggen und Wimpeln.

Geneigte Trennungsfläche mit dazu parallelen Begrenzungswänden (Kapitel IV). Der Rotationsvektor soll eine beliebige Richtung haben, wodurch die Wellenbewegung dreidimensional werden muß, mit geneigter Orbitalbahn. Es ergibt sich hier eine kritische Orbitalperiode, für welche die eigentliche Wellenfortpflanzung aufhört. Bei vertikalem Rotationsvektor fällt diese Periode mit der Trägheitsperiode zusammen; die Teilchen laufen dann in horizontalen Kreisen herum, ohne Beeinflussung seitens der Gravitation. Jeder gegebenen Wellenlänge entsprechen im allgemeinen sechs mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich fortpflanzenden Wellen, von welchen mindestens vier, z. T. auch alle sechs, in der einen Schicht eine größere Orbitalperiode als den kritischen Wert aufweisen. Diese würden nach der quasistatischen Methode nicht zu erhalten sein. Auch hier wird sich die Grundströmung kleinen Wellen gegenüber instabil verhalten können, wenn nur der Windsprung groß genug ist.

Die Trennungsfläche schneidet die horizontale Unterlage (Kapitel V). In den vorläufigen Ansätzen zu einer Theorie der Wellenbewegung in keilförmigen Schichten spielt die Bessel'sche Funktion dieselbe Rolle wie die Exponentialfunktion in den früheren Fällen. Die Integrale sind in zweierlei Weise erhalten worden, erstens durch Reihenentwicklung und nachfolgende Summation der unendlichen Reihen, zweitens mehr direkt

durch Abbildung der keilförmigen Querprofile auf Rechtecke und entsprechende Transformation der Störungsgleichungen. Auf eine nähere Diskussion dieser Integrale, die u. a. eine theoretische Erklärung der wichtigsten atmosphärischen Erscheinungen (Wellenbewegungen an dem polaren Luftkeil) geben dürfen, wird hier nicht eingegangen.

Erst in dem geplanten zweiten Teil unserer Arbeit soll diese Theorie, die in vielen Beziehungen an die von Boussinesq und Rayleigh entwickelte Theorie der Einzelwelle erinnert, in aller Ausführlichkeit entwickelt und erörtert werden. Dort soll auch die Integration der atmosphärischen Störungsgleichungen für allgemeinere Fälle durchgeführt werden, indem wir uns von einigen der Vereinfachungen in der vorliegenden Arbeit freimachen können. Es wird z. B. die Wellenbewegung in mehreren Flüssigkeitsschichten auf einer kugelförmigen und auf einer ellipsoidenförmigen Erde zur Darstellung kommen, woraus wieder durch einfache Verallgemeinerung eine Theorie der Gezeiten-schwingungen geschichteten Wassers sich ausbilden läßt. Es soll ferner die Kompressibilität der Flüssigkeitsschichten mit berücksichtigt werden. Durch Übertragung und Erweiterung der von Levi-Civita mit so großem Erfolg verwendeten Methode zu einer exakten Bestimmung der einfachsten hydrodynamischen Wellenbewegungen soll es schließlich versucht werden, die bedenklichste Vereinfachung, die Voraussetzung einer unendlichen Kleinheit der Störungsbewegung, auch zu beseitigen.

Es ist mir zuletzt eine angenehme Pflicht, Herrn Professor V. Bjerknes meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Unterstützung, die er mir während der Ausführung dieser Untersuchung gewährt hat, für das rege Interesse, das er jederzeit meiner Arbeit entgegengebracht und für die wertvollen Ratschläge, durch die er das Fortschreiten derselben gefördert hat. Auch den Herren cand. mag. J. Eggvin und cand. mag. J. Holmboe, die mir durch Hilfe bei Berechnung und Zeichnung der Figuren und bei Fertigung des Manuskripts unterstützt haben, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

KAPITEL I.

Atmosphärische Störungsgleichungen.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen eines rotierenden Flüssigkeitssystems.

Wir betrachten n verschiedene Flüssigkeitsschichten, von unten nach oben seien sie mit den römischen Zahlen

$$I, II, \dots, I, J, \dots, N \quad (1)$$

bezeichnet¹. Die entsprechenden Trennungsf lächen bezeichnen wir, ebenfalls von unten nach oben gerechnet, mit

$$1, 2, 3, \dots, i, j, k, \dots, n, n+1. \quad (2)$$

Die untere Fläche 1 soll starr sein; sie kann z. B. mit der Erde oder mit einer rotierenden Scheibe identifiziert werden. Es sei j eine beliebige, innere Grenzfläche zwischen den zwei Schichten I und J , und es sei schließlich $n+1$ die obere Grenzfläche, die z. B. eine freie Oberfläche darstellen kann. Jede Schicht erhält folglich dieselbe Bezeichnungszahl wie ihre untere Grenzfläche.

Das ganze, geschichtete Flüssigkeitssystem soll eine konstante Rotation um eine feste Achse haben. Wir wollen die Bewegung auf ein System beziehen, das die Rotation um diese feste Achse mitmacht, z. B. auf die untere, starre Grenzfläche. Indem die Differentiationen in bezug auf dieses rotierende System mit d und diejenigen in bezug auf ein festes System, das die Rotation nicht mitmacht, mit D bezeichnet werden, so ergibt sich für die Geschwindigkeit eines beliebigen Flüssigkeitsteilchens im rotierenden Bezugssystem — die relative Geschwindigkeit — der Wert $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$, während die absolute Geschwindigkeit durch $\frac{D\mathbf{q}}{Dt}$ dargestellt ist. Hier bedeutet \mathbf{q} den Radiusvektor des Punktes, von einem beliebig gewählten Nullpunkt auf der Rotationsachse aus gerechnet. Wird die als konstant zu betrachtende Rotationsgeschwindigkeit mit Ω bezeichnet, so ist die Drehgeschwindigkeit des Punktes durch das Vektorprodukt $\Omega \times \mathbf{q}$ gegeben, wo \times das Gibbs'sche Symbol der vektoriellen Multiplikation bedeutet.

Es bestehe dann offenbar die Gleichung

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \Omega \times \mathbf{q} = \left(\frac{d}{dt} + \Omega \times \right) \mathbf{q}. \quad (3)$$

¹ Es liegt hier eine Abweichung von den früher gegebenen Darstellungen dieser Störungstheorie vor, s. V. Bjerknes Die atmosphärischen Störungsgleichungen, Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosphäre, 13, S. 1—14, Leipzig 1926. Zs. für ang. Math. u. Mech., 7, S. 17—26, Berlin 1927. Bei Bjerknes werden die Schichten von oben nach unten numeriert. Es hat sich aber gezeigt, daß die Ausführung der Integration der Bewegungsgleichungen am einfachsten erfolgt, wenn die Randbedingung an der untersten, festen Grenzfläche zuerst berücksichtigt wird. Denn diese ist von einem anderen Charakter als die übrigen, und zwar bei weitem die einfachste. Da infolgedessen auch die Integration für die unterste Schicht zuerst ausgeführt werden muß, wird es vorteilhaft sein, für dieselbe die Bezeichnung I zu verwenden.

Der Differentialoperator $\frac{D}{Dt}$ ist also mit dem Operator $\left(\frac{d}{dt} + \Omega \times\right)$ äquivalent. Hieraus folgt dann sofort für die absolute Beschleunigung des Punktes:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{D\mathbf{q}}{Dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} + \Omega \times\right)\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \Omega \times \mathbf{q}\right) = \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + 2\Omega \times \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{q}),$$

oder indem wir für die Geschwindigkeit $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ die Newton'sche Bezeichnung $\dot{\mathbf{q}}$ einführen:

$$\frac{D^2\mathbf{q}}{Dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + 2\Omega \times \dot{\mathbf{q}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{q}). \quad (4)$$

Die absolute Beschleunigung setzt sich folglich aus den folgenden drei Teil-Beschleunigungen zusammen:

- (1) Die relative Beschleunigung $\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}$,
- (2) die Coriolis-Beschleunigung $2\Omega \times \dot{\mathbf{q}}$,
- (3) die Zentripetalbeschleunigung $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{q})$, die senkrecht auf die Rotationsachse in der Ebene von Ω und \mathbf{q} liegt, und vom Betrage $\Omega^2 q \sin \theta$ ist, wo θ den Winkel zwischen Ω und \mathbf{q} bedeutet¹.

Für eine ideale Flüssigkeit gilt nach Euler die folgende, in vektoranalytischer Form geschriebene Bewegungsgleichung:

$$\frac{D^2\mathbf{q}}{Dt^2} = -\sigma \nabla \pi + \mathbf{K}, \quad (5)$$

wo σ das spezifische Volumen und π den Druck der Flüssigkeit bedeutet, ∇ ist der Hamilton'sche Operator und \mathbf{K} bezeichnet die von der äußeren Kraft erteilte Beschleunigung.

Mit dem Ausdruck (4) für die absolute Beschleunigung folgt dann hieraus, indem noch die Euler'sche Zerlegung der relativen Beschleunigung in eine lokale Komponente $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t}$ und eine stationäre Komponente $\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{q}}$ Anwendung findet:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{q}} + 2\Omega \times \dot{\mathbf{q}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{q}) = -\sigma \nabla \pi + \mathbf{K}. \quad (5')$$

Das Glied $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{q})$ wird im allgemeinen auf der rechten Seite geführt und dann als Zentrifugalbeschleunigung bezeichnet.

Unter allen Beschleunigungen in dieser Gleichung wird nur die Zentrifugalbeschleunigung von der Lage der Rotationsachse abhängen. Da wir speziell die von der Coriolis-Beschleunigung hervorgerufene Bewegung studieren wollen, so kommt für uns in erster Annäherung der Zentrifugalbeschleunigung nur eine modifizierende Rolle zu; sie kann deshalb ohne weiteres zu der äußeren Kraft gerechnet werden. Die Resultante dieser zwei Beschleunigungen soll mit \mathbf{g} bezeichnet werden; in den uns interessierenden Fällen stellt \mathbf{g} die auf der Erde beobachtete Schwerebeschleunigung dar.

¹ Aus der meteorologischen Literatur ist mir keine einfache Herleitung der »ableitenden Kraft« bekannt. Die Tatsache, daß der immer wieder auftauchende Zweifel an dem berechtigten Vorhandensein des Zahlenfaktors 2 in dem Ausdruck für die Coriolis-Beschleunigung nicht einmal aus der Welt zu schaffen ist, zeigt zur Genüge, daß die bisher verwendeten Methoden nicht gerade überzeugend wirken können. Dazu sind sie noch kompliziert und erfordern einen erheblichen Rechnungsaufwand, während die hier gegebene vektorielle Herleitung wohl kaum an Einfachheit übertroffen werden kann. Möge sie auch zur Verbreitung der vektoranalytischen Methoden unter den Meteorologen beitragen!

Die Euler'sche Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{q}} + 2 \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{q}} = -\sigma \nabla \pi + \mathbf{g}, \quad (6)$$

wo die Variablen $\dot{\mathbf{q}}, \sigma, \pi$ der Reihe nach mit den hoch angebrachten Indizes (1) zu versehen sind.

In dieser vektoriellen Gleichung sind 5 skalare, unabhängige Variablen enthalten, nämlich der dreifach skalare Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}}$ und die einfach skalaren Größen σ und π . Zur vollständigen Bestimmung dieser unbekanntenen Funktionen müssen dann noch zwei skalare Gleichungen zwischen denselben Größen hinzukommen.

Es ist dies erstens die kinematische Kontinuitätsgleichung, die das Prinzip von der Erhaltung der Materie zum Ausdruck bringt und folgendermaßen lautet:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \sigma - \sigma \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (7)$$

und zweitens diejenige Gleichung, die auf die bis jetzt noch nicht betrachteten physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit Rücksicht nimmt. Diese sagt bekanntlich aus, daß für jede Flüssigkeit eine Relation zwischen Druck, spezifischen Volumen, Temperatur ϑ und, wenn erforderlich, noch mehreren Veränderlichen von der Form

$$\Phi(\pi, \sigma, \vartheta, \dots) = 0$$

besteht, oder nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \Psi(\pi, \vartheta, \dots) \quad (8)$$

(barokline Bedingung).

Für die Variation der Temperatur, \dots , müssen wir dann noch die Gesetze der Thermodynamik berücksichtigen, um über ebensoviele Gleichungen wie unabhängige Variablen verfügen zu können.

Ein wichtiger Grenzfall der baroklinen Bedingungsgleichung (8) tritt ein, wenn die Temperatur, \dots , in der Gleichung nicht explizite vorkommt. Die sich dann ergebende barotrope Bedingung lautet folglich:

$$\sigma = \Psi(\pi). \quad (9)$$

Spezialfällen von Barotropie begegnen wir z. B. bei vollkommener Inkompressibilität: $\sigma = \text{const.}$ und bei adiabatischer Zustandsänderung eines einatomigen Gases:

$$\sigma = \text{const.} \pi^{\frac{1}{1-\kappa}}, \quad (\kappa = 0,2884).$$

Wenn die Geschwindigkeit \mathbf{q} eines Teilchens durch Integrationsprozesse aus diesen Gleichungen als Funktion von \mathbf{q} und t bestimmt worden ist, so ergibt sich der Radiusvektor \mathbf{q} des Teilchens als Funktion von t und seinen Anfangskoordinaten durch Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t). \quad (10)$$

§ 2. Randbedingungen.

Aus den Gleichungen (6), (7) und (9) des vorigen Paragraphen lassen sich nun für eine beliebige Schicht die fünf skalaren Veränderlichen durch Integrationsprozesse als Funktionen der Raumkoordinaten und der Zeit bestimmen. In diesen Integralen kommen noch verschiedene willkürliche Konstanten oder sogar willkürliche Funktionen vor, durch deren Variation eine unendliche Anzahl von Lösungen erhalten werden können. Um eine bestimmte, eindeutige Lösung zu erhalten, was ja bei einem vorgegebenen Problem immer

erwünscht wird, müssen deshalb neben den angeführten Gleichungen noch gewisse Nebenbedingungen vorgeschrieben sein, die von solcher Art sind, daß bei ihrer Erfüllung nur eine einzige von den unendlich vielen Lösungen in Betracht kommen kann.

Diese Nebenbedingungen sind nun zweierlei Art. Sie können entweder *Anfangsbedingungen* sein, wodurch die Lage und der physikalische Zustand der einzelnen Molekeln, sowie ihre Geschwindigkeiten, zu einer bestimmten Anfangszeit t_0 , von der an die Bewegung studiert werden soll, gegeben sind; oder sie können *Randbedingungen* sein, wodurch die Verhältnisse an den Begrenzungsflächen der Flüssigkeit zu jeder Zeit festgelegt sind.

Die gewöhnlichen Randbedingungen drücken die bekannte Tatsache aus, daß die Begrenzungsfläche einer Flüssigkeit immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen bestehen muß.

Es sei die Gleichung einer Begrenzungsfläche durch

$$\varphi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1)$$

gegeben, wo der Radiusvektor \mathbf{q} eines willkürlichen Flächenpunktes von einem beliebigen gewählten Nullpunkt aus gerechnet wird. Zu einer anderen, infinitesimal verschiedenen Zeit $t + dt$ sei dann der Radiusvektor $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$; da der betrachtete Punkt, infolge der Randbedingung, immer in der Fläche bleiben muß, so folgt sofort, daß auch

$$\varphi(\mathbf{q} + d\mathbf{q}, t + dt) = 0 \quad (2)$$

ist. Durch Entwicklung nach Taylor ergibt sich hieraus unter Beschränkung auf unendlich kleine Glieder erster Ordnung:

$$\varphi(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + d\mathbf{q} \cdot \nabla \varphi + \dots = 0.$$

Das erste Glied ist aber nach (1) gleich Null; nach Division mit dt ergibt sich deshalb

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (3)$$

als kinematische Grenzflächenbedingung an starren Begrenzungswänden oder an einer freien Oberfläche. $\dot{\mathbf{q}}$ bedeutet die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen an der Fläche.

Ist die Begrenzungsfläche Teil eines unbeweglichen, starren Körpers, wie es z. B. nach Voraussetzung mit unserer Fläche 1 der Fall ist, so verschwindet der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, und die kinematische Grenzflächenbedingung lautet dann, indem wir anstatt $\nabla \varphi$ die äußere Normale \mathbf{n} zur Fläche schreiben und den Grenzflächenindex (1, 2)¹ hinzufügen:

$$\dot{\mathbf{q}}_1^I \cdot \mathbf{n}_1 = 0; \quad (4)$$

sie sagt folglich aus, daß die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche verschwinden muß.

Wenn die Begrenzungsfläche eine Diskontinuitätsfläche j zwischen den zwei Flüssigkeitsschichten I und J darstellt, deren in der Fläche liegenden Teilchen die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_j^I$ und $\dot{\mathbf{q}}_j^J$ haben, so muß natürlich die kinematische Grenzflächenbedingung (3) für beide Seiten der Fläche gelten, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}_j^I \cdot \nabla \varphi_j &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}_j^J \cdot \nabla \varphi_j &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch Subtraktion ergibt sich hieraus:

$$(\dot{\mathbf{q}}_j^I - \dot{\mathbf{q}}_j^J) \cdot \nabla \varphi_j = 0;$$

¹ (1, 2) bedeutet: Formel 2 von § 1.

an einer Diskontinuitätsfläche muß folglich in beiden Flüssigkeiten die Normalkomponente der Geschwindigkeit denselben Wert haben.

An einer Diskontinuitätsfläche von der Gleichung (1) muß ferner Druckgleichheit an beiden Seiten herrschen; ihre Gleichung ist deshalb auch durch

$$\pi_j^I - \pi_j^J = 0 \tag{6}$$

gegeben. Wir können folglich in den kinematischen Grenzflächenbedingungen (5) φ_j durch $\pi_j^I - \pi_j^J$ ersetzen, und erhalten dadurch die Randbedingungen an einer Diskontinuitätsfläche j in der Form:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}_j^I \cdot \nabla\right)(\pi_j^I - \pi_j^J) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}_j^J \cdot \nabla\right)(\pi_j^I - \pi_j^J) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

In entsprechender Weise ist die Gleichung der freien Oberfläche $n+1$ durch

$$\pi_{n+1}^N + \text{const.} = 0 \tag{8}$$

gegeben; wird auch hier in der kinematischen Grenzflächenbedingung φ durch $\pi_{n+1}^N + \text{const.}$ ersetzt, so erhalten wir die Randbedingung an der freien Oberfläche:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^N \cdot \nabla\right)\pi_{n+1}^N = 0. \tag{9}$$

§ 3. Die Gleichungen der Grundströmung.

Wir betrachten eine Grundströmung, wobei ein willkürliches Flüssigkeitsteilchen vom Radiusvektor \mathbf{R} in einer beliebigen der n Flüssigkeitsschichten die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}$, den Druck P und das spezifische Volumen S habe. Diese Grundströmung kann z. B. stationär sein oder auch andere, einschränkende Bedingungen erfüllen, sie kann aber auch ganz beliebig sein. In diesem Falle ergeben sich die Bewegungsgleichungen der Grundströmung aus den entsprechenden Gleichungen (6), (7), (9) des § 1 durch einfaches Umtauschen der dort verwendeten kleinen griechischen Buchstaben mit den entsprechenden großen lateinischen. Sie lauten folglich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= -S \nabla P + \mathbf{g} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla S - S \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ S &= \Psi(P). \end{aligned} \tag{1}$$

Der Reihe nach sind noch die Indizes I, II, \dots , N hoch anzubringen.

Die Randbedingungen des vorigen Paragraphen ergeben entsprechend:

(1) an der unteren, starren Grenzfläche 1:

$$\mathbf{V}_1^I \cdot \mathbf{n}_1 = 0; \tag{2}$$

(2) an einer Diskontinuitätsfläche j zwischen den zwei Flüssigkeitsschichten I und J , deren Gleichung

(a) durch
$$P_j^I - P_j^J = 0 \tag{3}$$

gegeben ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^I \cdot \nabla\right)(P_j^I - P_j^J) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^J \cdot \nabla\right)(P_j^I - P_j^J) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

(b) bzw. durch

$$F_j = 0 \quad (3')$$

gegeben ist:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^I \cdot \nabla\right) F_j = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^J \cdot \nabla\right) F_j = 0;$$

(3), an der freien Oberfläche $n+1$ von der Gleichung:

$$P_{n+1}^N + \text{const.} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_{n+1}^N \cdot \nabla\right) P_{n+1}^N = 0. \quad (6)$$

Schließlich ergibt sich der Radiusvektor \mathbf{R} eines Teilchens als Funktion von t und seinen Anfangskoordinaten aus:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{R}, t). \quad (7)$$

§ 4. Die Störungsgleichungen.

Nach dem Prinzip der kleinen Schwingungen werden nun der im vorigen Paragraphen definierten Grundströmung unendlich kleine Störungen superponiert und deren zeitlicher Verlauf untersucht. In den allgemeinen Gleichungen der §§ 1 und 2 setzen wir dementsprechend:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} + \mathbf{r}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} + \mathbf{v}; \quad \pi = P + p; \quad \sigma = S + s; \quad \varphi = F + f, \quad (1)$$

wo $\mathbf{R}, \mathbf{V}, P, S, F$ die Grundströmung von § 3 definieren, während $\mathbf{r}, \mathbf{v}, p, s, f$ die unendlich kleine Störung bedeuten¹. Aus den Bewegungsgleichungen ergeben sich dann:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V} + \mathbf{v}) + (\mathbf{V} + \mathbf{v}) \cdot \nabla(\mathbf{V} + \mathbf{v}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}) = -(S + s) \nabla(P + p) + \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S + s) + (\mathbf{V} + \mathbf{v}) \cdot \nabla(S + s) - (S + s) \text{div}(\mathbf{V} + \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$S + s = \Psi(P + p).$$

Wir betrachten nun die Störungsfunktionen als unendlich kleine Größen von der ersten Ordnung, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können. In der letzten Gleichung (2) darf dann die Funktion der rechten Seite nach Taylor entwickelt werden, wodurch wir erhalten:

$$S + s = \Psi(P) + \Psi'(P)p + \dots;$$

unter Berücksichtigung der letzten Gleichung (3, 1) folgt dann hieraus:

$$s = S'p. \quad (3)$$

Mittels dieser Relation und der Bewegungsgleichungen (3, 1) erhalten wir ferner aus den zwei ersten Gleichungen (2):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla(Sp), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S'p) + \mathbf{V} \cdot \nabla(S'p) + \mathbf{v} \cdot \nabla S - S \text{div} \mathbf{v} - S'p \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (5)$$

¹ Das Prinzip der Ableitung der Störungsgleichungen ist von V. Bjerknes in den in der Note von S. 7 zitierten Abhandlungen angegeben worden.

Ferner folgt aus den Randbedingungen:

(1) an der unteren, starren Grenzfläche 1:

$$\mathbf{v}_1^I \cdot \mathbf{n}_1 = 0; \tag{6}$$

(2) an einer Diskontinuitätsfläche j zwischen den zwei Flüssigkeitsschichten I und J , deren Gleichung

(a) durch

$$P_j^I - P_j^J + p_j^I - p_j^J = 0 \tag{7}$$

gegeben ist:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^I \cdot \nabla\right)(p_j^I - p_j^J) + \mathbf{v}_j^I \cdot \nabla(P_j^I - P_j^J) = 0 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^J \cdot \nabla\right)(p_j^I - p_j^J) + \mathbf{v}_j^J \cdot \nabla(P_j^I - P_j^J) = 0,$$

(b) bzw. durch

$$F_j + f_j = 0 \tag{7'}$$

gegeben ist:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^I \cdot \nabla\right)f_j + \mathbf{v}_j^I \cdot \nabla F_j = 0 \tag{8'}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j^J \cdot \nabla\right)f_j + \mathbf{v}_j^J \cdot \nabla F_j = 0;$$

(3) an der freien Oberfläche $n+1$ von der Gleichung:

$$P_{n+1}^N + p_{n+1}^N + \text{const.} = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_{n+1}^N \cdot \nabla\right)p_{n+1}^N + \mathbf{v}_{n+1}^N \cdot \nabla P_{n+1}^N = 0. \tag{10}$$

In den Randbedingungen an den Grenzflächen j , ($j=2, 3, \dots, n+1$), dürfen für die unabhängigen Variablen eigentlich diejenigen Werte eingeführt werden, die sich aus der Gleichung der Grenzflächen im gestörten Zustande (7), bzw. (7') ergeben. Der Einfachheit halber werden wir aber die Voraussetzung machen, daß es in erster Annäherung genügen wird, die Koordinaten der ungestörten Flächen (3, 3) einzuführen.

Wenn die Störungsgeschwindigkeit \mathbf{v} eines Teilchens aus diesen Gleichungen bestimmt worden ist, erhalten wir schließlich den entsprechenden Radiusvektor \mathbf{r} des Teilchens als Funktion der Zeit und seiner Anfangskoordinaten aus der Gleichung:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, t). \tag{11}$$

Die Ableitung der Störungsgleichungen fußt auf den Euler'schen Gleichungen und den Annahmen (1).

Es bestehen aber plausible Gründe dafür, daß die Herleitung einer generellen Störungstheorie bewegter Flüssigkeiten wahrscheinlicher Weise nicht von den Euler'schen Bewegungsgleichungen aus gegeben werden darf. Wie es bei der Störung von einer Zentralbewegung oder von einem bewegten materiellen Punkte der Fall ist, so muß auch hier die Aufmerksamkeit auf die einzelnen Flüssigkeitsteilchen gelenkt werden, deren Bahn während der allgemeinen Bewegung und während der Grundströmung genau zu verfolgen ist, um die Störung derselben bestimmen zu können. Dazu werden aber die Euler'schen Bewegungsgleichungen nicht zweckmäßig sein, und es müssen vielmehr die Gleichungen in der Lagrange'schen Form zu Hilfe genommen werden. Wenn auch den Euler'schen Gleichungen in Allgemeingültigkeit überlegen, sind dieselben doch bisher

in nur sehr beschränktem Maße verwendet worden. Da die Euler'schen Gleichungen eben für die folgenden, speziellen Anwendungen bequem sind, werden wir aber nicht an dieser Stelle auf die generelle Ableitung der Störungsgleichungen von den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen aus eingehen können.

Es sollen noch zum Schluß einige Worte über die Integration der allgemeinen Störungsgleichungen gesagt werden.

Die Ermittlung einer Lösung der Gleichungen (4) und (5), die gleichzeitig auch die Randbedingungen (6—10) erfüllt, kann auf die Lösung eines gewöhnlichen Randwertproblems zurückgeführt werden. Allerdings ist dasselbe von einem weitaus viel komplizierteren Typus als diejenigen, die bis jetzt der mathematischen Analysis zugänglich geworden sind. Die Durchführung einer vollständigen Integration der allgemeinen Störungsgleichungen, wenigstens unter Anwendung rein analytischer Hilfsmittel, muß wohl deshalb als zurzeit wenig aussichtsreich bezeichnet werden. Wir verzichten auch auf einen Versuch in dieser Richtung. Um trotzdem mit der Aufgabe fortschreiten zu können, werden wir fortan das allgemeine Integrationsproblem verlassen und uns ausschließlich der Untersuchung geeigneter Spezialfälle zuwenden. Es besteht dadurch die Möglichkeit, eine Übersicht über die wichtigsten Schwingungen in rotierenden Flüssigkeitsschichten zu bekommen, wobei sich auch Anhaltspunkte für das Studium des Schwingungsverlaufes im allgemeinen Falle ergeben mögen.

Die folgenden Kapitel sollen deshalb der Untersuchung derartiger Spezialfälle gewidmet werden. Unter den vielen möglichen Annahmen, die eine Spezialisierung der allgemeinen Störungsgleichungen herbeiführen, haben wir die zwei folgenden gewählt:

- (1) es soll das spezifische Volumen σ für jede Schicht eine konstante Größe sein,
- (2) es soll der Grundstrom \mathbf{V} in jeder Schicht sowohl räumlich als auch zeitlich konstant sein.

Diese zwei Größen können aber von Schicht zu Schicht variieren, indem sie in ihrer räumlichen Verteilung sprunghafte Änderungen an den Diskontinuitätsflächen aufweisen.

KAPITEL II.

Integration der Störungsgleichungen für zwei horizontale Schichten.

§ 5. Der stationäre Zustand.

Wir werden in diesem Kapitel mit dem einfachsten Falle anfangen, wo das geschichtete System aus bloß zwei Flüssigkeiten I und II besteht, die durch eine horizontale Diskontinuitätsfläche voneinander getrennt sind. Dem Grundstrom und dem spezifischen Volumen sollen die, am Schluß des vorigen Kapitels angegebenen, einschränkenden Annahmen auferlegt werden.

Um die Rechnungen möglichst weit zu vereinfachen, sehen wir vorläufig von jeder Begrenzung der Schichten ab, die Flüssigkeit I erfülle den ganzen unteren Halbraum und die Flüssigkeit II den ganzen oberen Halbraum. Die Gleichungen der Grundströmung (3, 1) reduzieren sich dann auf die Form:

$$2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = - \frac{1}{\varepsilon} \nabla P + \mathbf{g}, \quad (1)$$

indem wir von jetzt ab die konstante Dichte ε anstatt des spezifischen Volumens verwenden werden.

Wir führen nun ein kartesisches Koordinatensystem ein, indem wir die horizontale Diskontinuitätsfläche zur xy -Ebene wählen und die Schwerebeschleunigung in Richtung der negativen z -Achse wirken lassen. Wird dann die x -Achse in Richtung des Grundstromes gelegt, der infolgedessen den Skalarwert U habe, so ist die Richtung der y -Achse dadurch eindeutig festgelegt, daß die x, y, z in der angeführten Reihenfolge ein rechtwinkliges Rechtssystem bilden sollen.

Werden die Komponenten des Rotationsvektors Ω längs den drei Achsen mit $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ und diejenigen der Erdbeschleunigung \mathbf{g} mit g_x, g_y, g_z bezeichnet, wobei $g_x = g_y = 0$ und $g_z = -g$ zu setzen sind, so lauten die Komponentengleichungen von (1):

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial x} \\ 2\Omega_z U &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial y} \\ g - 2\Omega_y U &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration die Gleichung der Isobarenflächen:

$$P = -2\Omega_z \varepsilon U y - (g - 2\Omega_y U) \varepsilon z + P_0, \tag{2}$$

die sowohl für die Schicht I als auch für die Schicht II Gültigkeit besitzt. Die Isobarenflächen sind also parallele Ebenen, deren Neigung χ mit der xy -Ebene durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{2\Omega_z U}{g - 2\Omega_y U}$$

gegeben ist.

Für die Diskontinuitätsfläche ergibt sich aus (3, 3), unter Berücksichtigung von (2), die folgende Gleichung:

$$P^I - P^{II} = -2\Omega_z (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II}) y - [g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2\Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] z = 0. \tag{3}$$

In dem gewählten Koordinatensystem soll aber diese Fläche mit der xy -Ebene: $z=0$, zusammenfallen. Es muß also

$$2\Omega_z (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II}) = 0 \tag{4}$$

sein. Aus (3) folgt dann:

$$P^I - P^{II} = -[g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2\Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] z = 0, \tag{5}$$

oder auch:

$$F = z = 0. \tag{5'}$$

Aus (3) erhalten wir übrigens die von V. Bjerknes erweiterte Margules'sche Formel wieder; wird die Neigung der Diskontinuitätsfläche gegen die Horizontalebene mit Θ bezeichnet, so ergibt sich nämlich:

$$\operatorname{tg} \Theta = -\frac{2\Omega_z (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})}{g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2\Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})}. \tag{6}$$

In unserem Spezialfalle ist Θ natürlich gleich Null. Das kann in zweierlei Weise zustandekommen, indem nach (4) entweder $\Omega_z = 0$ oder $\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II} = 0$ sein muß. Im ersteren Falle liegt der Rotationsvektor in der Diskontinuitätsfläche; wenn dann außerdem $\Omega_x = 0$, der Rotationsvektor folglich der y -Achse parallel ist, so erfolgt die Integration der Störungsgleichungen, wozu wir im nächsten Paragraphen übergehen werden, besonders einfach. Wir setzen dabei $\Omega_x = \Omega_z = 0$ voraus. Nach (2) werden in diesem Falle die Isobarenflächen horizontale Ebenen sein.

Den Fall $\Omega_z = 0, \Omega_x \neq 0$ und den eben angeführten Fall: $\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II} = 0$ werden wir in Kapitel IV näher betrachten.

§ 6. Die speziellen Störungsgleichungen bei zweidimensionaler Bewegung.

Aus den allgemeinen Störungsgleichungen (4, 4—5) ergeben sich bei Inkompressibilität und konstanter Grundströmung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla p, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

und zwar gelten diese Gleichungen für beide Flüssigkeiten, was durch Hinzufügung der Indizes I und II zum Ausdruck gebracht werden kann.

Aus diesen Gleichungen ersieht man sofort, weshalb die einschränkenden Bedingungen $\Omega_x = \Omega_z = 0$ so vereinfachend auf die Rechnung wirken können. Denn bei Störungen, die von der y -Koordinate unabhängig sind, kann dann die Bewegung in zwei Dimensionen, in Ebenen senkrecht zum Rotationsvektor, vor sich gehen, indem die y -Komponente verschwindet. In diesem Falle lauten nämlich die Komponentengleichungen von (1) und (2), indem die Komponenten von \mathbf{v} mit u, v, w bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) u + 2 \Omega_y w &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) w - 2 \Omega_y u &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

wo noch die Indizes I und II hinzuzufügen sind.

Für die Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche ergibt sich aus (4, 7):

$$P^I - P^{II} + p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II} = 0, \quad (4)$$

indem, den Bemerkungen von S. 13 gemäß, die Koordinaten der ungestörten Grenzfläche: $z=0$, in dem Störungsgliede eingeführt worden sind.

Ferner bestehen nach (4, 8) die folgenden Grenzflächenbedingungen an der Diskontinuitätsfläche:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^I \frac{\partial}{\partial x}\right) (p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II}) + w_{z=0}^I \frac{\partial}{\partial z} (P^I - P^{II}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial}{\partial x}\right) (p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II}) + w_{z=0}^{II} \frac{\partial}{\partial z} (P^I - P^{II}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Wenn schließlich die Gleichung der Diskontinuitätsfläche in der Form (4, 7')

$$F + f_{z=0} = 0 \quad (4')$$

gegeben ist, so bestehen nach (4, 8') die Grenzflächenbedingungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^I \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{z=0} + w_{z=0}^I \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{z=0} + w_{z=0}^{II} \frac{\partial F}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5')$$

§ 7. Integration der speziellen Störungsgleichungen.

Unter der Annahme, daß die Störung periodisch in der x -Richtung verlaufen soll, versuchen wir, die speziellen Störungsgleichungen des vorigen Paragraphen durch den formellen Ansatz:

$$\begin{aligned} u &= A e^{i(ax - \beta t) + \delta z} \\ w &= C e^{i(ax - \beta t) + \delta z} \\ p &= \varepsilon D e^{i(ax - \beta t) + \delta z} \end{aligned} \tag{1}$$

zu befriedigen, wo i die imaginäre Einheit und $A, C, D, \alpha, \beta, \delta$ nachträglich zu bestimmende Konstanten bedeuten.

In (6, 3) substituiert, erhalten wir dann, nach Weglassung des Exponentialgliedes, ein System von drei linearen Gleichungen zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten:

$$\begin{aligned} -i(\beta - \alpha U)A + 2\Omega_y C &= -i\alpha D \\ -2\Omega_y A - i(\beta - \alpha U)C &= -\delta D \\ i\alpha A + \delta C &= 0. \end{aligned}$$

Bei nichtverschwindenden Werten von A, C, D muß dann die aus den Koeffizienten gebildete Determinante identisch gleich Null sein, woraus folgt:

$$\begin{vmatrix} -i(\beta - \alpha U) & 2\Omega_y & -i\alpha \\ -2\Omega_y & -i(\beta - \alpha U) & -\delta \\ i\alpha & \delta & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Die Ausrechnung dieser Determinante ergibt nun:

$$(\delta^2 - \alpha^2)(\beta - \alpha U) = 0, \tag{2}$$

deren Wurzeln:

$$1. \delta = \alpha, \quad 2. \delta = -\alpha, \quad 3. \beta = \alpha U$$

sind. Der Fall 3 läßt δ willkürlich; wir können dann auch $e^{\delta z}$ durch $\psi(z)$, eine beliebige Funktion von z , ersetzen.

Ferner können wir eine der Konstanten A, C, D willkürlich annehmen, und die zwei anderen durch diese ausdrücken. Es wird sich zeigen, daß es am vorteilhaftesten ist, C als willkürliche Konstante zu behalten. Es ergibt sich dann in den drei verschiedenen Fällen, indem die Konstanten mit A, C, D , bzw. A', C', D' und A'', C'', D'' bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} 1. \text{ für } \delta = \alpha: \quad A &= iC, \quad D = \frac{i}{\alpha}(\beta - \alpha U + 2\Omega_y)C, \\ 2. \text{ für } \delta = -\alpha: \quad A' &= -iC', \quad D' = -\frac{i}{\alpha}(\beta - \alpha U - 2\Omega_y)C', \\ 3. \text{ für } \beta = \alpha U: \quad A'' &= \frac{i\delta}{\alpha}C'', \quad D'' = \frac{i}{\alpha}2\Omega_y C''. \end{aligned} \tag{3}$$

Diesen drei Systemen von Konstanten entsprechend gibt es drei verschiedene Integrale der Form (1), die die Differentialgleichungen befriedigen. Wegen der Superpositionseigenschaft der Lösungen linearer Differentialgleichungssysteme wird dann die Summe dieser drei partikulären Integrale wieder eine Lösung der Differentialgleichungen sein, und zwar eine von größerer Allgemeinheit. Wir erhalten folglich, indem im Falle 3 $e^{\delta z}$ und $\delta e^{\delta z}$ durch $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} u &= i(Ce^{\alpha z} - C'e^{-\alpha z})e^{i(ax - \beta t)} + \frac{i}{\alpha}C''\psi'(z)e^{i\alpha(x - Ut)} \\ w &= (Ce^{\alpha z} + C'e^{-\alpha z})e^{i(ax - \beta t)} + C''\psi(z)e^{i\alpha(x - Ut)} \\ p &= \frac{\varepsilon i}{\alpha}[(\beta - \alpha U + 2\Omega_y)Ce^{\alpha z} - (\beta - \alpha U - 2\Omega_y)C'e^{-\alpha z}]e^{i(ax - \beta t)} + \frac{\varepsilon i}{\alpha}2\Omega_y C''\psi(z)e^{i\alpha(x - Ut)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ist die Flüssigkeit in der positiven und der negativen x -Richtung unbegrenzt, so kann α in diesen Integralen nur reelle Werte annehmen, denn komplexe Werte würden unendliche Störungsbewegungen hervorrufen. Auch wird es genügen, α positiv, reell anzunehmen. Die Integrale im Falle 1 werden dann nur für $z = -\infty$ und diejenigen im Falle 2 für $z = +\infty$ verschwinden. Da ferner die z -Koordinate nur negative Werte in der Schicht I und nur positive Werte in der Schicht II annimmt, so können folglich nur die Integrale des Falles 1 für die Schicht I und diejenigen des Falles 2 für die Schicht II verwendet werden.

Die Integrale des Falles 3 werden keine reine Wellenbewegung, sondern bloß die Eigenschwingungen der Schicht darstellen. Der ganzen Flüssigkeitsschicht, die sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit U fortbewegt, werden dadurch kleine Störungen aufgelagert, die sich in der x -Richtung nach dem Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha}$ periodisch wiederholen. Die willkürliche Funktion $\psi(z)$ und ihre erste Derivierte $\psi'(z)$ müssen dabei im Unendlichen entweder verschwinden oder jedenfalls endlich bleiben. Hat $\psi(z)$ keine Nullstelle im Innern der Schicht, werden die Integrale die Grundschwingung der Flüssigkeitsschicht darstellen; hat sie dagegen eine, zwei, . . . Nullstellen, ergibt sich hierdurch die erste, zweite, . . . Oberschwingung.

Eine vollständige Diskussion dieser Eigenbewegungen kann an dieser Stelle nicht ausgeführt werden (vgl. näheres § 19); da wir im Folgenden nur die reine Wellenbewegung betrachten werden, setzen wir deshalb sogleich $C'' = 0$ in den Integralen (4). Es ergibt sich dann für die Schicht I:

$$\begin{aligned} u^I &= i C^I e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^I &= C^I e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^I &= \frac{\varepsilon^I i}{\alpha} (\beta - \alpha U^I + 2\Omega_y) C^I e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)}, \end{aligned} \quad (5)$$

und für die Schicht II:

$$\begin{aligned} u^{II} &= -i C^{II} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^{II} &= C^{II} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^{II} &= -\frac{\varepsilon^{II} i}{\alpha} (\beta - \alpha U^{II} - 2\Omega_y) C^{II} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned} \quad (5')$$

Wenn diese Integrale in die Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche (6, 4) substituiert werden, wo der Wert von $P^I - P^{II}$ durch (5, 5) gegeben ist, so erhalten wir die folgende Gleichung der Diskontinuitätsfläche in gestörtem Zustand:

$$\begin{aligned} & - [g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2\Omega_y(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] z + \\ & + \frac{i}{\alpha} [(\beta - \alpha U^I + 2\Omega_y) \varepsilon^I C^I + (\beta - \alpha U^{II} - 2\Omega_y) \varepsilon^{II} C^{II}] e^{i(\alpha x - \beta t)} = 0. \end{aligned}$$

Wenn hier zur Abkürzung die Amplitude Z der schwingenden Fläche eingeführt wird, wo

$$Z = \frac{i(\beta - \alpha U^I + 2\Omega_y) \varepsilon^I C^I + (\beta - \alpha U^{II} - 2\Omega_y) \varepsilon^{II} C^{II}}{g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2\Omega_y(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})} \quad (6)$$

ist, so wird die Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche die Form

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (7)$$

erhalten.

Aus der Grenzflächenbedingung (6, 5) an der Diskontinuitätsfläche ergibt sich ferner nach Ausscheidung des Faktors $e^{i(\alpha x - \beta t)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha U^I}{\alpha} [(\beta - \alpha U^I + 2 \Omega_y) \varepsilon^I C^I + (\beta - \alpha U^{II} - 2 \Omega_y) \varepsilon^{II} C^{II}] - \\ - C^I [g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] = 0, \\ \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} [(\beta - \alpha U^I + 2 \Omega_y) \varepsilon^I C^I + (\beta - \alpha U^{II} - 2 \Omega_y) \varepsilon^{II} C^{II}] - \\ - C^{II} [g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, wegen (6), da nach (5, 6)

$$g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II}) \neq 0$$

sein muß:

$$C^I = -i(\beta - \alpha U^I) Z, \quad C^{II} = -i(\beta - \alpha U^{II}) Z. \tag{8}$$

Diese Gleichungen folgen übrigens unmittelbar aus den Grenzflächenbedingungen in der Form (6, 5'), wenn wir uns erinnern, daß die Gleichung der Grenzfläche (7) mit (6, 4') identisch ist und noch (5, 5') berücksichtigt wird. Zukünftig werden wir deshalb im allgemeinen diese Form der Grenzflächenbedingung verwenden, da sie bei einfacheren Problemen schneller zum Ziele führt, wenn es auch gelegentlich bei schwierigeren Problemen (z. B. in Kapitel V) notwendig wird, unsere Zuflucht zu den generelleren Gleichungen (6, 4—5) nehmen zu müssen.

Durch Einsetzen der Werte (8) von C^I und C^{II} in (6) ergibt sich dann, indem Z von Null verschieden vorausgesetzt werden kann und folglich aus der Gleichung wegfällt:

$$\varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 - (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) (\alpha g - 2 \Omega_y \beta) = 0. \tag{9}$$

Diese wichtige Relation zwischen den zwei bis jetzt noch willkürlich gebliebenen Konstanten α und β werden wir im nächsten Paragraphen einer genauen Diskussion unterziehen.

Zuerst müssen aber einige ergänzende Mitteilungen, die Integrale (5) betreffend, gegeben werden.

In diesen Ausdrücken sind die maximalen Amplituden der Vertikalgeschwindigkeiten als willkürliche Konstanten verwendet worden. In mehreren Fällen wird es aber vorteilhafter sein, die Amplitude Z der schwingenden Diskontinuitätsfläche als neue willkürliche Konstante zu wählen, was unter Berücksichtigung der Gleichung (8) leicht auszuführen ist.

Die Integrale (5) und (5') sind im allgemeinen komplex. Da die Variablen u, w, p als physikalische Größen natürlich keine imaginäre Werte annehmen dürfen, muß von den komplexen Ausdrücken entweder der Realteil oder der Imaginärteil oder schließlich auch eine lineare Kombination dieser beiden mit willkürlichen, reellen Konstanten als Integrale gewählt werden. Daß wir hierzu berechtigt sind, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von (5) für sich eine Lösung der Differentialgleichungen und der Randbedingungen darstellt, wie leicht festzustellen ist.

Der Bequemlichkeit wegen werden wir auch künftig die Integrale in dieser kürzeren, komplexen Schreibweise behalten, wenn es auch gelegentlich notwendig wird, zur reellen Form überzugehen.

In den obigen Integralen haben wir bisher α positiv, reell vorausgesetzt. Wir werden jetzt untersuchen, wie sich diese Integrale verhalten, wenn $\alpha = 0$ gesetzt wird.

Die Determinantengleichung (2) hat dann eine Doppelwurzel, $\delta=0$, wodurch die Integrale der Fälle 1 und 2, bis auf einen konstanten Faktor, identisch werden. Die Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme lehrt uns dann, wie ein zweites, linear unabhängiges Integral gefunden werden kann. Wir können aber darauf nicht näher eingehen und müssen uns damit genügen, das eine Integral der Form (5) hinzuschreiben.

Aus dem Ausdruck für den Druck folgt nun, daß die Faktoren $\beta - \alpha U^I + 2 \Omega_y$ in (5) und $\beta - \alpha U^{II} - 2 \Omega_y$ in (5') gleichzeitig mit α gegen Null gehen müssen, falls der Druck bei nichtverschwindenden Werten von C^I und C^{II} endlich bleiben soll. Der Koeffizient in dem Ausdruck für p erhält dadurch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ und kann folglich ganz willkürlich, von C unabhängig, gewählt werden. Dies ist übrigens auch unmittelbar aus den Differentialgleichungen zu ersehen, denn für $\alpha=0$ werden ja die obigen Integrale von den Koordinaten unabhängig, wodurch die Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ verschwinden müssen. Der Druck kann dann nicht mehr eine direkte regulierende Einwirkung auf die Bewegung ausüben, nur durch die vorhandenen Diskontinuitätsflächen kann er noch indirekt eingreifen. Bei Abwesenheit von Diskontinuitätsflächen kann deshalb der Störungsdruck überall gleich Null gesetzt werden.

Die von den Koordinaten unabhängigen, singulären Integrale bestimmen sich aus den Störungsgleichungen (6, 3), die sich in diesem Falle auf die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \Omega_y w = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 2 \Omega_y u = 0$$

reduzieren. Es wird folglich:

$$\begin{aligned} u^I &= i C^I e^{2 \Omega_y i t} - i C'^I e^{-2 \Omega_y i t} & u^{II} &= i C^{II} e^{2 \Omega_y i t} - i C'^{II} e^{-2 \Omega_y i t} \\ w^I &= C^I e^{2 \Omega_y i t} + C'^I e^{-2 \Omega_y i t}, & w^{II} &= C^{II} e^{2 \Omega_y i t} + C'^{II} e^{-2 \Omega_y i t}. \end{aligned}$$

Für den Druck wählen wir entsprechend:

$$p^I = D^I e^{2 \Omega_y i t} + D'^I e^{-2 \Omega_y i t}, \quad p^{II} = D^{II} e^{2 \Omega_y i t} + D'^{II} e^{-2 \Omega_y i t}.$$

In die Gleichungen (6, 4) und (6, 5) eingeführt, ergibt sich dann als Gleichung der gestörten Grenzfläche:

$$z = -\frac{i C^I}{2 \Omega_y} e^{2 \Omega_y i t} + \frac{i C'^I}{2 \Omega_y} e^{-2 \Omega_y i t};$$

die Fläche oszilliert also um ihre Gleichgewichtslage, indem sie dabei immer horizontal bleibt. Der Abstand zwischen ihrer höchsten und tiefsten Lage ist durch $\left| \frac{C^I}{\Omega_y} \right| + \left| \frac{C'^I}{\Omega_y} \right|$ gegeben.

Zwischen den Konstanten bestehen die leicht zu bestätigenden Relationen:

$$C^I = C^{II}, \quad C'^I = C'^{II},$$

$$D^I - D^{II} = -i C^I \left[\frac{g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{2 \Omega_y} - \varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II} \right],$$

$$D'^I - D'^{II} = i C'^I \left[\frac{g(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{2 \Omega_y} - \varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II} \right].$$

Wir können nun die Zeit von dem Augenblick an rechnen, wo die Grenzfläche ihre Gleichgewichtslage: $z=0$, besitzt. Aus der obigen Gleichung der Grenzfläche folgt dann, indem $C^I=C^{II}=C$ gesetzt werden muß:

$$z = \frac{C}{\Omega_y} \sin 2 \Omega_y t.$$

Es kann hier C positiv vorausgesetzt werden. Für die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich dann entsprechend:

$$u^I = u^{II} = u = -2 C \sin 2 \Omega_y t, \quad w^I = w^{II} = w = 2 C \cos 2 \Omega_y t;$$

wenn hier noch $u = \frac{dx}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ gesetzt werden, so folgen durch Integration als Bahnkomponenten eines Teilchens:

$$x - x_0 = \frac{C}{\Omega_y} \cos 2 \Omega_y t, \quad z - z_0 = \frac{C}{\Omega_y} \sin 2 \Omega_y t.$$

Das Teilchen beschreibt also einen vertikalen Kreis vom Radius $\frac{C}{|\Omega_y|}$ um den Punkt (x_0, z_0) ; die Geschwindigkeit ist dabei konstant, gleich $2 C$. Die Umlaufsrichtung ist positiv (von der x - zu der z -Achse) oder negativ, je nachdem $\Omega_y \gtrless 0$ ist. Die Bewegung ist eine Trägheitsbewegung, die nur in unendlichen Schichten aufkommen kann, da sie mit der Grenzbedingung an einer horizontalen Grenzfläche nicht vereinbar ist. Das Vorkommen eines Störungsdruckes rührt von der Existenz zweier Schichten her; setzen wir $\varepsilon^I = \varepsilon^{II}$ und $U^I = U^{II}$, so würden die Konstanten D von C unabhängig werden, und könnten beliebige Werte, z. B. auch den Wert Null, annehmen.

§ 8. Diskussion der Frequenzgleichung.

In diesem Paragraphen werden wir die quadratische Relation (9) des vorigen Paragraphen zwischen den noch unbestimmten Parametern der Wellenbewegung α und β studieren.

Wir werden zuerst für einen Augenblick die physikalische Bedeutung der Konstanten α und β erläutern. Wie bekannt, wird für β die Bezeichnung der »Frequenz« der Schwingung verwendet; für α ist aber leider keine einfache Benennung in der Literatur zu finden. Es bestehen aber die folgenden Relationen:

$$\alpha = \frac{2\pi}{L} = 2\pi m, \quad \beta = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n, \tag{1}$$

wo L die Wellenlänge und T die Schwingungsdauer der kleinen Störung darstellen. Da T die Zeit angibt, innerhalb deren sich das Bild des periodischen Vorganges wiederholt, so wird auch T häufig die Periode genannt.

Die Wellenzahl m und die Schwingungszahl n geben die Anzahl der Wellen pro Längeneinheit (m), bzw. die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (sec). α wird deshalb die Anzahl der Wellen auf $2\pi m$ und β die Anzahl der Schwingungen in 2π sec darstellen.

Die quadratische Relation (7, 9) zwischen α und β soll die *Frequenzgleichung* genannt werden, da sich hieraus der Wert von β , d. h. der Frequenz, bei gegebenem α ergibt. Natürlicherweise kann auch umgekehrt der Wert von α bei gegebenem β daraus gefunden werden.

Das Verhältnis

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{L}{T} = c \quad (2)$$

stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle dar, wobei ein positiver Wert von c , oder allgemeiner, ein positiver Realteil von c , Fortpflanzung längs der positiven x -Richtung ergibt.

Bei komplexen Werten der Parameter können wir die reellen und die imaginären Teile trennen, indem wir schreiben:

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad c = c_1 + ic_2. \quad (3)$$

Es ist dann c_1 die Phasengeschwindigkeit und c_2 die Anfachungskonstante der Schwingung.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung der Wellen von einfach harmonischem Profil, die eine von x unabhängige Amplitude besitzen. α muß dann eine reelle Konstante sein, die wir außerdem positiv annehmen wollen. Jedem gegebenen Wert von α entsprechen dann zwei Werte von β , die mit β und β' bezeichnet werden sollen, und die durch Auflösung der Frequenzgleichung (7, 9) nach β in der Form:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \\ \beta' \end{array} \right\} = \frac{\alpha (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) - \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} \pm \frac{1}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} \sqrt{-\alpha^2 \varepsilon^I \varepsilon^{II} (U^I - U^{II})^2 + \alpha (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) [\varepsilon^I (g - 2\Omega_y U^I) + \varepsilon^{II} (g - 2\Omega_y U^{II})] + \Omega_y^2 (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})^2} \quad (4)$$

geschrieben werden können. Hier soll β dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel und β' dem negativen Vorzeichen entsprechen.

Wenn nur eine einzige Schicht vorhanden wäre, wobei $\varepsilon^{II} = 0$ zu setzen ist, ergibt sich aus (4):

$$\left. \begin{array}{l} \beta \\ \beta' \end{array} \right\} = \alpha U^I - \Omega_y \pm \sqrt{\alpha (g - 2\Omega_y U^I) + \Omega_y^2};$$

im Spezialfalle $U^I = \Omega_y = 0$ reduziert sich diese Gleichung auf die bekannte Stokes'sche Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen auf unendlicher Tiefe.

Im Falle zweier unendlicher Schichten werden die charakteristischen Züge der entsprechenden Wellenbewegung sich vollständig mit dem Vorzeichen des Ausdrucks unter der Wurzel ändern:

(a) Wenn dieser Ausdruck positiv ist, erhalten wir nämlich für jedes α zwei verschiedene reelle Werte, β und β' , die gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem $\alpha \gtrless \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I U^{I^2} + \varepsilon^{II} U^{II^2}} g$ ist. Dementsprechend wird es zwei mögliche Wellen der Form (7,5) geben, die sich mit gleicher Wellenlänge, aber verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Die zugehörigen Amplituden, die wir mit Z und Z' bezeichnen werden, und die natürlich verschiedene Werte annehmen können, erleiden keine Änderung während der Fortpflanzung. Die Wellen sind also in diesem Falle ungedämpft.

(b) Wenn der Ausdruck gleich Null ist, erhalten wir nur einen einzigen Wert:

$$\beta = \beta' = \frac{\alpha (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) - \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}.$$

Dementsprechend gibt es nur eine einzige Wellenbewegung der Form (7, 5), die in ähnlicher Weise wie die Integrale im Falle (a) ungedämpft verlaufen wird.

Wir werden in § 10 sehen, wie ein anderes Integral der Differentialgleichungen in diesem Falle zu bestimmen ist.

(c) Wenn schließlich der Ausdruck negativ ist, erhalten wir zwei konjugiert komplexe Werte von β in der Form $\beta_1 + i\beta_2$ und $\beta_1 - i\beta_2$. Die zwei entsprechenden Integrale der Form (7, 5) werden folglich den reellen Faktor $e^{\beta_2 t}$, bzw. $e^{-\beta_2 t}$ enthalten, wodurch die Amplitude der Wellenbewegung mit unbegrenzt wachsendem t gegen Unendlich, bzw. gegen Null geht. Bei der ersten Welle wird also Anfachung, bei der zweiten dagegen Dämpfung der Schwingung stattfinden. Das allgemeine Integral, das als eine lineare Kombination dieser beiden Wellen mit willkürlichen, nicht verschwindenden Konstanten dargestellt werden kann, wird dann auch eine mit t gegen Unendlich wachsende Amplitude haben.

Der Gleichgewichtszustand, der durch die Gleichungen des § 5 charakterisiert ist, wird folglich in diesem Falle labil sein. Die kleinste Störung wird genügen, um ein unbegrenztes Anwachsen der um die Gleichgewichtslage einsetzenden Schwingung zu bewirken.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c_1 = \frac{\beta_1}{\alpha}$ wird für beide Wellen dieselbe sein; sie ist durch

$$c_1 = \frac{\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} - \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} \frac{\Omega_y}{\alpha}$$

gegeben. Das erste Glied rechts stellt eine gewisse, mittlere, konvektive Geschwindigkeit der zwei Schichten dar. Wegen der Rotation wird also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen etwas größer oder kleiner als die mittlere Konvektion ausfallen. Da meistens $\varepsilon^I - \varepsilon^{II} > 0$ ist, so wird ein positiver Ω_y die Geschwindigkeit vermindern. —

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Frequenz in ihrer Abhängigkeit von den auftretenden Parametern.

Es wird dann vorteilhaft sein, die zwei Glieder auf der rechten Seite von (4) gesondert zu untersuchen, wie es schon von V. Bjerknes¹ für den Fall einer ähnlichen Gleichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die aus (4) durch Division mit α hervorgehen würde, gemacht worden ist. Er bezeichnet das erste, konvektive Glied, das im wesentlichen von der *Summe* der Schichtgeschwindigkeiten abhängt, als die äußere, kinematische Fortpflanzungsgeschwindigkeit, während das zweite Glied, das besonders von der *Differenz* der Schichtgeschwindigkeiten abhängt, die innere, dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit genannt wird. In ähnlicher Weise können wir, wenn es sich um die Frequenz (4) handelt, ein kinematisches oder konvektives Glied und ein dynamisches Glied unterscheiden.

Es wird nun besonders wichtig sein, festzustellen, für welche Werte der Parameter das dynamische Glied in der Frequenzgleichung (4) aufhört, reell zu sein.

Zuerst folgt aus (4), daß $\varepsilon^I = \varepsilon^{II}$ immer eine imaginäre dynamische Frequenz bedingt. Die einzige mögliche Ausnahme, wobei $U^I = U^{II}$ sein muß, kann ja ausgeschlossen werden; denn in diesem Falle würden nicht mehr zwei, sondern nur eine einzige Flüssigkeit vorhanden sein.

Für $\varepsilon^I < \varepsilon^{II}$ kann unter Umständen sowohl Stabilität als auch Labilität der Gleichgewichtslage vorkommen. Für $\Omega_y = 0$ herrscht immer Labilität; wir haben dann einen schon von Rayleigh und Helmholtz behandelten Fall vor uns. Dasselbe wird auch für kleinere Werte von Ω_y der Fall sein. Für sehr große Werte von Ω_y dagegen, können wir in den Stabilitätsbereich gelangen. So wird z. B. für $U^I = U^{II} = 0$ Stabilität für

¹ V. Bjerknes: On Quasi Static Wave Motion in Barotropic Fluid Strata. Geofys. Publ. Vol. III. No. 3. Oslo 1923.

$$\Omega_y^2 > a g \frac{\varepsilon^{\text{II}} + \varepsilon^{\text{I}}}{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{I}}}$$

auftreten, während $U^{\text{I}} = U^{\text{II}} = U$:

$$\Omega_y^2 + 2 a U \Omega_y \frac{\varepsilon^{\text{II}} + \varepsilon^{\text{I}}}{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{I}}} > a g \frac{\varepsilon^{\text{II}} + \varepsilon^{\text{I}}}{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{I}}}$$

als Grenze ergibt. Wenn eine Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den zwei Schichten vorhanden ist, wird die Stabilitätsgrenze noch höher liegen. So ergibt sich z. B. für $U^{\text{I}} = -U^{\text{II}}$:

$$\Omega_y^2 + 2 a U^{\text{II}} \Omega_y > a g \frac{\varepsilon^{\text{II}} + \varepsilon^{\text{I}}}{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{I}}} + 4 a^2 U^{\text{II}^2} \frac{\varepsilon^{\text{I}} \varepsilon^{\text{II}}}{(\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{I}})^2}.$$

In allen Fällen muß Ω_y mit g vergleichbar sein. Für die Anwendungen auf dem Gebiete der Meteorologie spielt deshalb diese Stabilitätsmöglichkeit keine Rolle.

Die Tatsache, daß eine stabile Schichtung auch in dem Falle, wo eine schwerere Flüssigkeit auf eine leichtere lagert, vorhanden sein kann, rührt daher, daß für $\Omega_y \neq 0$ die scheinbare Schwerkraft, der ein Teilchen während seiner Bewegung ausgesetzt ist, mit der Bewegungsrichtung desselben variieren wird.

Wie schon erwähnt, soll in (4) der Parameter a nur positive, reelle Werte annehmen. Bei festgehaltenen Werten der übrigen Parameter g , Ω_y , ε , U lassen wir nun a alle Werte von 0 bis $+\infty$ durchlaufen. Es fragt sich dann, ob dabei der reelle Teil von β alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen wird.

Wenn wir zuerst $a=0$ in der Gleichung (4) einsetzen, so erhalten wir:

$$\beta = 0, \quad \beta' = - \frac{\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}}{\varepsilon^{\text{I}} + \varepsilon^{\text{II}}} 2 \Omega_y.$$

Um die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu bestimmen, können wir zuerst $\beta = \alpha c$ in die Frequenzgleichung (7, 9) einführen und in der erhaltenen Gleichung α gegen Null gehen lassen. Es ergibt sich dann:

$$c = \frac{g}{2 \Omega_y}, \quad c' = \infty.$$

Aus den Integralen (7, 5) ersehen wir, daß für $a=0$, $c = \frac{g}{2 \Omega_y}$ die Geschwindigkeitskomponenten verschwinden werden, während die gestörte Grenzfläche durch $z=Z$ und die Störungsdrucke durch $p^{\text{I}} = \varepsilon^{\text{I}} (g - 2 \Omega_y U^{\text{I}}) Z$, $p^{\text{II}} = \varepsilon^{\text{II}} (g - 2 \Omega_y U^{\text{II}}) Z$ gegeben sind. Durch Hinzufügung einer additiven Konstante zu z kann dann die gestörte Grenzfläche als neue x -Ebene genommen werden, wodurch $Z=0$ zu setzen ist. Wir sind aber dadurch auf die Gleichgewichtslage geführt worden.

Für $a=0$, $\beta' = - \frac{\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}}{\varepsilon^{\text{I}} + \varepsilon^{\text{II}}} 2 \Omega_y$ ergibt sich ferner

$$z = Z e^{i \frac{\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}}{\varepsilon^{\text{I}} + \varepsilon^{\text{II}}} 2 \Omega_y t}$$

als Gleichung der Grenzfläche. Um unendliche Druckstörungen zu vermeiden, muß auch hier die Amplitude $Z=0$ sein.

In beiden Fällen verschwindet also die Störungsbewegung, wenn $a \rightarrow 0$ geht.

Wie wir am Schluß des vorigen Paragraphen gesehen haben, gibt es aber auch für $a=0$ nicht identisch verschwindende Integrale in der Form einer reinen Trägheitsbewegung der Flüssigkeitsteilchen. Die Störungsbewegung (7, 5) reduziert sich aber nicht auf diese singuläre Lösung, wenn $a \rightarrow 0$ geht.

Wir gehen nun zu der Diskussion des Verhaltens von β für $\alpha > 0$ über. Um diese Untersuchung bequemer ausführen zu können, schreiben wir die Frequenzgleichung in der folgenden Form:

$$(\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) \beta^2 - 2(\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) \alpha \beta + (\varepsilon^I U^{I^2} + \varepsilon^{II} U^{II^2}) \alpha^2 + 2 \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \beta - g (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \alpha = 0. \tag{5}$$

Für reelle Werte von β stellt diese quadratische Relation zwischen den als kartesischen Koordinaten zu betrachtenden Größen α und β die Gleichung einer Kegelschnittschar dar, die durch Origo hindurchgeht. Je nachdem

$$(\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) (\varepsilon^I U^{I^2} + \varepsilon^{II} U^{II^2}) \geq (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II})^2$$

ist, d. h. je nachdem

$$|U^I - U^{II}| \geq 0$$

ist, wird die Kegelschnittschar Ellipsen oder Parabeln darstellen.

Im Falle einer Parabel wird nun, wenn α zwischen 0 und $+\infty$ variiert, β von 0 bis $2 \Omega_y \cdot \infty$ und β' von $-\frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} 2 \Omega_y$ bis $-2 \Omega_y \cdot \infty$ gehen. Die β -Werte zwischen 0 und $-\frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} 2 \Omega_y$ können folglich nicht für $\alpha \geq 0$ vorkommen; sonst sind aber alle positive und negative Frequenzen möglich.

Es ist hier vorausgesetzt worden, daß das dynamische Glied der Frequenz in (4) reell ist, was für $U^I - U^{II} = 0$ wohl immer zutreffen wird.

Wenn die Kegelschnittschar Ellipsen darstellt, wobei $|U^I - U^{II}| > 0$ sein muß, können auch komplexe Werte von β vorkommen. Der maximale (und minimale) Wert von α für reelles β ergibt sich, wenn das dynamische Glied in (4) verschwindet. Für die Koordinaten dieser Extremwerte erhalten wir:

$$\alpha = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \varepsilon^I \varepsilon^{II} (U^I - U^{II})^2} \left\{ g (\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) \pm \sqrt{(\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) [\varepsilon^I (g - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})^2]} \right\} \tag{6}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \varepsilon^I \varepsilon^{II} (U^I - U^{II})^2} \left\{ g (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^{I^2} + \varepsilon^{II} U^{II^2}) \pm (\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}) \sqrt{\frac{\varepsilon^I (g - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})^2}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}} \right\}.$$

Die zwei Punkte liegen auf verschiedener Seite der β -Achse, wie es auch sein muß, da die Ellipse durch Origo hindurchgehen soll. Da wir aber bloß positive Werte von α berücksichtigen, brauchen wir nur das obere Vorzeichen vor der Wurzel (falls $\varepsilon^I - \varepsilon^{II} > 0$ ist) zu behalten. (6) gibt dann die zur Doppelwurzel der Frequenzgleichung gehörigen Werte von α und β , wobei α der Maximalwert für reelles β darstellt.

Für noch größere Werte von α werden β und β' konjugiert komplex. Aus (4) folgt dann, daß sowohl β_1 als auch β_2 mit α gegen Unendlich geht. β_1 geht gegen $\pm \infty$, je nachdem $\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II} \gtrless 0$ ist. Dementsprechend geht c_1 gegen die mittlere, konvektive Fortpflanzungsgeschwindigkeit: $\frac{\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}$.

Zuletzt werden wir noch einige numerische Angaben zu der Frequenzgleichung (4) mitteilen. Indem wir uns die meteorologische Anwendbarkeit der Formel vor Augen

halten, beschränken wir uns bei der numerischen Berechnung auf den meteorologisch interessanten Fall, wo der Dichteunterschied $\varepsilon^I - \varepsilon^{II}$ eine sehr kleine Größe ist. Wir setzen dann:

$$\varepsilon^I = \bar{\varepsilon}(1 + \eta), \quad \varepsilon^{II} = \bar{\varepsilon}(1 - \eta), \quad (7)$$

wo $\bar{\varepsilon}$ die mittlere Dichte der Schichten und η eine kleine positive Größe ist, und erhalten aus (4) nach Division mit α :

$$\left. \begin{aligned} c \\ c' \end{aligned} \right\} = \frac{U^I + U^{II}}{2} + \eta \left(\frac{U^I - U^{II}}{2} - \frac{\Omega_y}{\alpha} \right) \pm \sqrt{-\left(\frac{U^I - U^{II}}{2}\right)^2 + \frac{\eta}{\alpha} \left[g - \Omega_y(U^I + U^{II}) \right] + \eta^2 \left[\left(\frac{U^I - U^{II}}{2}\right)^2 - \frac{\Omega_y}{\alpha} \right]^2}. \quad (8)$$

Aus (7) folgt nun:

$$\eta = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} = \frac{\vartheta^{II} - \vartheta^I}{\vartheta^{II} + \vartheta^I},$$

indem die absolute Temperatur ϑ eingeführt wird. Wenn wir für den Temperatursprung $\Delta\vartheta$ und für die mittlere Temperatur der Schichten $\bar{\vartheta}$ schreiben, wo dann

$$\vartheta^{II} - \vartheta^I = \Delta\vartheta, \quad \vartheta^{II} + \vartheta^I = 2\bar{\vartheta} \quad (9)$$

ist, so folgt auch:

$$\eta = \frac{\Delta\vartheta}{2\bar{\vartheta}}. \quad (10)$$

Wird die mittlere Temperatur der Schichten zu rund 300° gewählt, so ergibt sich z. B. bei einer Temperaturdifferenz von 1° : $\eta = \frac{1}{600}$. Bei langen Wellen, d. h. kleinen Werten von α , kann folglich das letzte Glied unter der Wurzel von (8) gegen das zweite vernachlässigt werden.

In diesem zweiten Gliede kann übrigens auch $\Omega_y(U^I + U^{II})$ gegen g vernachlässigt werden, denn für irdische Verhältnisse (am Äquator) ist $\Omega_y = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$, und selbst bei einer Geschwindigkeit von 100m sec^{-1} würde $g = 9,78 \text{m sec}^{-2}$ gänzlich überwiegen.

Wenn wir noch, der Gleichung (9) entsprechend,

$$U^{II} - U^I = \Delta U, \quad U^{II} + U^I = 2\bar{U} \quad (11)$$

schreiben, so folgt aus (8), indem auch die Wellenlänge $L = \frac{2\pi}{\alpha}$ eingeführt wird:

$$\left. \begin{aligned} c \\ c' \end{aligned} \right\} = \bar{U} - \frac{1}{4} \frac{\Delta\vartheta}{\bar{\vartheta}} \left(\Delta U + \frac{\Omega_y}{\pi} L \right) \pm \sqrt{-\left(\frac{\Delta U}{2}\right)^2 + \frac{g}{4\pi} \frac{\Delta\vartheta}{\bar{\vartheta}} L}. \quad (12)$$

Um von der Größenordnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen Eindruck zu bekommen, setzen wir zuerst die Grundströme gleich Null. Mit $\bar{\vartheta} = 300^\circ$ ergeben sich dann die folgenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten als Funktion der Wellenlänge und des Temperatursprunges:

$$\left. \begin{aligned} c \\ c' \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta\vartheta}{300} \frac{0,729}{3,14} 10^{-4} L \pm \sqrt{\frac{9,78}{12,566} \frac{\Delta\vartheta}{300} L} = -2 \cdot 10^{-8} \Delta\vartheta L \pm 0,0509 \sqrt{\Delta\vartheta L}.$$

Sie sind also annähernd der Wurzel von $\Delta\vartheta L$ proportional. Nur für sehr große Temperatursprünge und lange Wellen braucht das erste Glied rechts mit berücksichtigt zu werden.

Als Beispiel wählen wir $\Delta\vartheta=1^\circ$; für $L=1, 10, 10^2, 10^3, 10^4$ km ergeben sich dann der Reihe nach die folgenden Werte:

$$\left. \begin{matrix} c \\ c' \end{matrix} \right\} = \pm 1,6, \pm 5,1, \pm 16,1, \pm 50,9, -0,2 \pm 161 \text{ m sec}^{-1}.$$

Das Glied mit Ω_y wird also bedeutungslos bei den in der Atmosphäre vorkommenden Werten von c . Die Wellen in einer horizontalen Diskontinuitätsfläche zwischen zwei unendlichen Schichten pflanzen sich also am Äquator annähernd nach demselben Gesetz fort, gleichgültig, ob die Erde rotiere oder stillstehe. Nur nahe am Labilitätspunkt wird Ω_y eine Rolle spielen können, denn es ist dann nicht mehr erlaubt, die Glieder von kleinerer Größenordnung unter der Wurzel zu vernachlässigen.

Bei nichtverschwindenden Grundströmen werden die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten etwas modifiziert. Wenn die zwei Grundströme von demselben Betrag, aber entgegengesetzt sind, mit $U^{\text{II}}=U, U^{\text{I}}=-U$, also $\Delta U=2U, \bar{U}=0$, so ergibt sich z. B. aus (12) durch Division mit U :

$$\frac{c/U}{c'/U} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta\vartheta}{300} \left(2 + \frac{0,729}{3,14} 10^{-4} \frac{L}{U} \right) \pm \sqrt{-1 + \frac{9,78}{12,566} \frac{\Delta\vartheta}{300} \frac{L}{U^2}}.$$

Die sich hieraus ergebenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind für verschiedene Werte von $\Delta\vartheta$ und $\frac{L}{U^2}$ in der Tabelle I zusammengestellt. Für kleine Werte von $\Delta\vartheta \frac{L}{U^2}$ ergeben sich also komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Ist $\Delta\vartheta=5^\circ$ und $U=10 \text{ m sec}^{-1}$, der Windsprung also 20 m sec^{-1} , so würde eine Welle von der Länge 1000 km die Fortpflanzungsgeschwindigkeit 113 m sec^{-1} haben.

Tabelle I.

$\frac{L}{U^2}$	$\Delta\vartheta$		
	1	5	10
1	$-2.10^{-3} \pm i$	$-8.10^{-3} \pm 0,99 i$	$-17.10^{-3} \pm 0,99 i$
10	$-2.10^{-3} \pm 0,99 i$	$-8.10^{-3} \pm 0,93 i$	$-17.10^{-3} \pm 0,86 i$
10^2	$-2.10^{-3} \pm 0,86 i$	$-8.10^{-3} \pm 0,55 i$	$\pm 1,3$
10^3	$\pm 1,3$	$\pm 3,5 - 10^{-4} U$	$\pm 5,0 - 2.10^{-4} U$
10^4	$\pm 5,0 - 2.10^{-4} U$	$\pm 11,3 - 10^{-3} U$	$\pm 16,1 - 2.10^{-3} U$

$$\left. \begin{matrix} c/U \\ c'/U \end{matrix} \right\} \text{ als Funktion von } \Delta\vartheta \text{ und } \frac{L}{U^2}.$$

§ 9. Die Wellenbewegung bei reellen Wurzeln der Frequenzgleichung.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die Frequenz der Schwingung in ihrer Abhängigkeit von α und den übrigen Parametern untersucht haben, können wir jetzt zur Aufstellung der vollständigen Integrale der Differentialgleichungen übergehen.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen müssen dann drei verschiedene Fälle unterschieden werden, je nachdem die zwei Wurzeln der Frequenzgleichung verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind. Die vollständige Diskussion der Integrale in diesen drei Fällen soll in diesem und den zwei folgenden Paragraphen ausgeführt werden, indem wir zuerst mit dem Falle reeller Wurzeln anfangen.

Es ist schon früher (S. 22) erwähnt worden, daß es dann zwei verschiedene Integrale der Form (7, 5) geben wird, indem wir einmal die Wurzel β und die Amplitude Z , ein anderes Mal β' und Z' verwenden können. Eine allgemeinere Lösung ist dann durch die Summe dieser partikulären Lösungen gegeben.

In dieser Weise erhalten wir aus (7, 7) die folgende Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche, indem wir nur den reellen Teil des komplexen Ausdruckes behalten:

$$z = Z \cos(\alpha x - \beta t) + Z' \cos(\alpha x - \beta' t). \quad (1)$$

Die zwei Partialwellen haben hier dieselbe Phase im Anfangsmomente $t=0$. Wir können aber auch eine willkürliche Konstante zu x addieren, und zwar kann dieselbe einen verschiedenen Betrag in den zwei Summanden haben, ohne daß (1) dadurch aufgehört wird, die Gleichung der Diskontinuitätsfläche darzustellen. In dieser Weise kann dann, wenn erforderlich, ein Phasenunterschied zwischen den zwei Partialwellen auch für $t=0$ zustandekommen. Der Einfachheit halber ziehen wir es aber vor, das Koordinatensystem derartig festzulegen, daß der Phasenunterschied für $t=0$ verschwindet.

Die zwei Partialwellen haben verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, wodurch das Profil der Grenzfläche (1), das durch Interferenz aus zwei einfach harmonischen Wellen hervorgeht, einen mit der Zeit ziemlich komplizierten Verlauf aufweisen kann.

Sehr einfach gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn eine der Amplituden Z oder Z' gleich Null ist. Es bleibt dann nur ein rein sinusförmiges Profil übrig, das sich mit unveränderter Amplitude der x -Achse entlang fortpflanzt.

Sehr wichtig und interessant sind ferner die Fälle, wo die zwei Amplituden entweder gleiche oder entgegengesetzte Werte annehmen. Es sei z. B. zuerst:

$$Z = Z'. \quad (2)$$

Aus (1) folgt dann:

$$z = Z [\cos(\alpha x - \beta t) + \cos(\alpha x - \beta' t)] = 2Z \cos \frac{\beta - \beta'}{2} t \cos \left(\alpha x - \frac{\beta + \beta'}{2} t \right). \quad (3)$$

Diese Welle pflanzt sich in der positiven x -Richtung mit einer Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(c + c')$ fort, d. h. mit der rein konvektiven Geschwindigkeit. Die »Amplitude« $2Z \cos \frac{\beta - \beta'}{2} t$ variiert zwischen den Grenzen $\pm 2Z$; die Periode dieser Variation ist ausschließlich von dem dynamischen Glied der Frequenz abhängig. Wenn das konvektive Glied klein gegen das dynamische ist, wird die Änderung des Profils mit der Zeit an die Schwebungserscheinungen der Akustik erinnern.

Wenn wir in (3) $t=0$ setzen, so erhalten wir für die Anfangslage der Diskontinuitätsfläche:

$$z_{t=0} = 2Z \cos \alpha x.$$

Es sei nun ferner:

$$Z = -Z', \quad (4)$$

wodurch aus (1)

$$z = Z [\cos(\alpha x - \beta t) - \cos(\alpha x - \beta' t)] = 2Z \sin \frac{\beta - \beta'}{2} t \sin \left(\alpha x - \frac{\beta + \beta'}{2} t \right) \quad (5)$$

erhalten wird. Durch Hinzufügung von geeigneten additiven Konstanten zu x und t kann diese Gleichung auf die Form (3) zurückgeführt werden. Daß dieser Fall trotzdem Erwähnung verdient, rührt daher, daß sich für $t=0$ die Anfangslage $z_{t=0}=0$ ergibt. Der Anfangszustand der schwingenden Diskontinuitätsfläche fällt also in diesem Falle mit ihrer Gleichgewichtslage zusammen.

Im folgenden werden wir wieder Z und Z' als zwei voneinander unabhängige Konstanten betrachten. Aus (7, 5) erhalten wir dann die zu (1) entsprechenden, allgemeinen

Integrale der Differentialgleichungen in der folgenden, reellen Form, indem noch mittels (7, 8) die Amplitude Z anstatt C als willkürliche Konstante eingeführt wird:

$$\begin{aligned}
 u^I &= (\beta - a U^I) Z e^{az} \cos(ax - \beta t) + (\beta' - a U^I) Z' e^{az} \cos(ax - \beta' t) \\
 w^I &= (\beta - a U^I) Z e^{az} \sin(ax - \beta t) + (\beta' - a U^I) Z' e^{az} \sin(ax - \beta' t) \\
 p^I &= \varepsilon^I (c - U^I) (\beta - a U^I + 2 \Omega_y) Z e^{az} \cos(ax - \beta t) + \\
 &\quad + \varepsilon^I (c' - U^I) (\beta' - a U^I + 2 \Omega_y) Z' e^{az} \cos(ax - \beta' t), \quad (6) \\
 u^{II} &= -(\beta - a U^{II}) Z e^{-az} \cos(ax - \beta t) - (\beta' - a U^{II}) Z' e^{-az} \cos(ax - \beta' t) \\
 w^{II} &= (\beta - a U^{II}) Z e^{-az} \sin(ax - \beta t) + (\beta' - a U^{II}) Z' e^{-az} \sin(ax - \beta' t) \\
 p^{II} &= -\varepsilon^{II} (c - U^{II}) (\beta - a U^{II} - 2 \Omega_y) Z e^{-az} \cos(ax - \beta t) - \\
 &\quad - \varepsilon^{II} (c' - U^{II}) (\beta' - a U^{II} - 2 \Omega_y) Z' e^{-az} \cos(ax - \beta' t).
 \end{aligned}$$

Die durch diese Ausdrücke definierte Bewegung ist wirbelfrei.

Um die Einzelheiten bei dieser Wellenbewegung besser klarlegen zu können, bestimmen wir zuerst die Stromlinien. Die Gleichung derselben ist durch

$$u dz - w dx = 0$$

gegeben. Durch Einsetzen der Ausdrücke (6) und Integration folgt hieraus für eine beliebige Zeit t :

$$\begin{aligned}
 [(c - U^I) Z \cos(ax - \beta t) + (c' - U^I) Z' \cos(ax - \beta' t)] e^{az} &= \Psi^I, \\
 [(c - U^{II}) Z \cos(ax - \beta t) + (c' - U^{II}) Z' \cos(ax - \beta' t)] e^{-az} &= \Psi^{II}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Es ist hier Ψ die Stromfunktion, die durch

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

gegeben ist. Längs einer Stromlinie ist Ψ konstant. Das Aufzeichnen des Stromlinienfeldes erfolgt am einfachsten durch graphische Addition der zwei Partialfelder:

$$(c - U) Z \cos(ax - \beta t) e^{\pm az} \quad \text{und} \quad (c' - U) Z' \cos(ax - \beta' t) e^{\pm az},$$

worin sich (7) zerlegen läßt. Die Äquiskalarkurven dieser Felder haben die vertikalen Geraden

$$ax = (k + \frac{1}{2})\pi + \beta t, \quad \text{bzw.} \quad ax = (k + \frac{1}{2})\pi + \beta' t \quad (k \text{ ganze Zahl})$$

als Asymptoten. Sie erreichen dieselben für $z = \infty$ (Schicht I), bzw. $z = -\infty$ (Schicht II) und haben ihren tiefsten, bzw. höchsten Punkt an der Mittellinie zwischen zwei aneinandergrenzenden Asymptoten. Sie haben sämtliche dieselbe Form; durch Verschiebung längs der z -Achse werden sie deshalb ineinander übergehen können.

Ferner kann aus (6) die Bahn bestimmt werden, die ein Teilchen während der Wellenbewegung beschreibt.

Aus der Gleichung der Bahn (4, 11) erhalten wir für die zwei Massen, indem wir die Komponentengleichungen verwenden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x^I}{\partial t} + U^I \frac{\partial x^I}{\partial x} = u^I & \quad \frac{\partial x^{II}}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial x^{II}}{\partial x} = u^{II} \\
 \frac{\partial z^I}{\partial t} + U^I \frac{\partial z^I}{\partial x} = w^I, & \quad \frac{\partial z^{II}}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial z^{II}}{\partial x} = w^{II}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Durch Integration dieser partiellen, inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben sich Ausdrücke für $x^I - x_0^I$, $z^I - z_0^I$ usw., wo x_0^I , z_0^I, \dots die Koordinaten des Teilchens in seiner ungestörten Lage bedeuten.

Mit den Geschwindigkeitskomponenten (6) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} x^I - x_0^I &= -Z e^{\alpha z} \sin(\alpha x - \beta t) - Z' e^{\alpha z} \sin(\alpha x - \beta' t) \\ z^I - z_0^I &= Z e^{\alpha z} \cos(\alpha x - \beta t) + Z' e^{\alpha z} \cos(\alpha x - \beta' t), \\ x^{II} - x_0^{II} &= Z e^{-\alpha z} \sin(\alpha x - \beta t) + Z' e^{-\alpha z} \sin(\alpha x - \beta' t) \\ z^{II} - z_0^{II} &= Z e^{-\alpha z} \cos(\alpha x - \beta t) + Z' e^{-\alpha z} \cos(\alpha x - \beta' t). \end{aligned} \quad (9)$$

Hier führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned} x^I - x_0^I &= r^I \cos \varphi^I & x^{II} - x_0^{II} &= r^{II} \cos \varphi^{II} \\ z^I - z_0^I &= r^I \sin \varphi^I, & z^{II} - z_0^{II} &= r^{II} \sin \varphi^{II}. \end{aligned} \quad (10)$$

Durch Elimination von φ^I , bzw. φ^{II} aus den Gleichungen (9) ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} r^{I2} &= e^{2\alpha z} [Z^2 + Z'^2 + 2ZZ' \cos(\beta - \beta') t] \\ r^{II2} &= e^{-2\alpha z} [Z^2 + Z'^2 + 2ZZ' \cos(\beta - \beta') t]. \end{aligned} \quad (11)$$

Der Radiusvektor variiert also zwischen den Werten:

$$e^{\pm \alpha z} |Z + Z'| \quad \text{und} \quad e^{\pm \alpha z} |Z - Z'|,$$

wodurch die Orbitalbahn eines Teilchens in einem ringförmigen Gebiete verlaufen muß; die eben angegebenen Werte von r stellen die Radien der begrenzenden Kreise des Gebietes dar. Diese werden mit der Entfernung von der Diskontinuitätsfläche exponentiell abnehmen. Die Zeit zwischen zwei nachfolgenden Berührungen der Bahn mit einem begrenzenden Kreise ist durch $t = \frac{2\pi}{\beta - \beta'}$ gegeben.

Durch Elimination von r^I , bzw. r^{II} aus den Gleichungen (9) erhalten wir ferner:

$$\cotg \varphi^I = -\cotg \varphi^{II} = -\frac{Z \sin(\alpha x - \beta t) + Z' \sin(\alpha x - \beta' t)}{Z \cos(\alpha x - \beta t) + Z' \cos(\alpha x - \beta' t)}. \quad (12)$$

Aus (11) und (12) kann die Gleichung der Orbitalbahn, in Polarkoordinaten r und φ ausgedrückt, durch Elimination von t erhalten werden. Da das Resultat ziemlich kompliziert erscheint, ziehen wir es aber vor, die Gleichung in der obigen Form, mit t als Parameter, zu behalten. Selbst in dieser Form wird aber die Bestimmung der möglichen Bahnformen in ihrer Abhängigkeit von den auftretenden Parametern ziemlich mühsam werden.

Es gibt aber auch einen anderen Weg zur Durchführung dieser Diskussion, wobei wir direkt von den Gleichungen (9) ausgehen können ohne den Umweg um die Gleichungen (11) und (12) zu machen. Zu dem Zweck führen wir zuerst ein neues Koordinatensystem ein, das die Bewegung des Grundstromes mitmacht, und bestimmen nun die Orbitalbahn der Teilchen relativ zu diesem Koordinatensystem. Auf der rechten Seite von (9) müssen wir dann x durch $x^I + U^I t$, bzw. $x^{II} + U^{II} t$ ersetzen, wo x^I , bzw. x^{II} die neue Koordinate darstellt. Aus (9) folgt ferner, daß bis auf kleine Größen zweiter Ordnung x^I , z^I und x^{II} , z^{II} durch die Koordinaten x_0^I , z_0^I und x_0^{II} , z_0^{II} der Teilchen in ihrer Gleichgewichtslage ersetzt werden können.

In Fig. 1 stellt xOz das feststehende und $x^I O^I z^I$ das vom Grundstrom U^I mitgeführte Koordinatensystem dar, wobei $O O^I = U^I t$ ist. Ein Teilchen befindet sich während der Störungsbewegung in $A(x^I, z^I)$, seine Gleichgewichtslage ist $A_0(x_0^I, z_0^I)$. Die durch (10) definierten Polarkoordinaten sind dann: $r^I = A_0 A$, $\varphi^I =$ Winkel zwischen $O^I x^I$ und $A_0 A$.

Durch Einführung der Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1^I &= r_1^I e^{i\varphi_1^I} = Z e^{i\left(\alpha x_0^I + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha z_0^I - i(\beta - \alpha U^I) t} \\
 \mathbf{r}_2^I &= r_2^I e^{i\varphi_2^I} = Z' e^{i\left(\alpha x_0^I + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha z_0^I - i(\beta' - \alpha U^I) t} \\
 \mathbf{r}_1^{II} &= r_1^{II} e^{i\varphi_1^{II}} = Z e^{-i\left(\alpha x_0^{II} - \frac{\pi}{2}\right) - \alpha z_0^{II} + i(\beta - \alpha U^{II}) t} \\
 \mathbf{r}_2^{II} &= r_2^{II} e^{i\varphi_2^{II}} = Z' e^{-i\left(\alpha x_0^{II} - \frac{\pi}{2}\right) - \alpha z_0^{II} + i(\beta' - \alpha U^{II}) t}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

lassen sich dann die Gleichungen (9) in der folgenden Vektorform zusammenfassen:

$$\mathbf{r}^I = \mathbf{r}_1^I + \mathbf{r}_2^I, \quad \mathbf{r}^{II} = \mathbf{r}_1^{II} + \mathbf{r}_2^{II}.
 \tag{14}$$

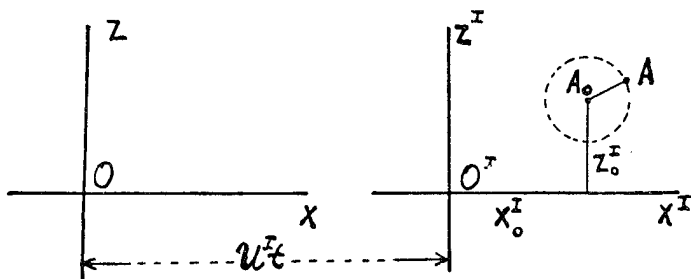


Fig. 1.

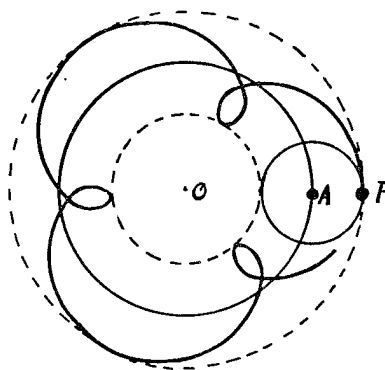


Fig. 2.

Die Gleichungen (13) stellen nun, wenn wir z. B. die Masse I betrachten, zwei Kreisbewegungen dar. Die Radien dieser Kreise sind durch $r_1 = |Z| e^{\alpha z_0^I}$ und $r_2 = |Z'| e^{\alpha z_0^I}$ und die Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungen durch $-(\beta - \alpha U^I)$ und $-(\beta' - \alpha U^I)$ gegeben. Die Interpretation der Gleichungen (14) wird dann sehr einfach erscheinen. Das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem Kreise herum, dessen Zentrum wiederum eine gleichförmige Kreisbewegung um den Punkt (x_0^I, z_0^I) ausführt, wobei die Radien der Kreise gleich r_1^I und r_2^I sind. Der Abstand \mathbf{r}^I des Teilchens vom Punkte (x_0^I, z_0^I) wird dann immer durch $\mathbf{r}_1^I + \mathbf{r}_2^I$ gegeben sein, wie es nach (14) gefordert ist.

Wie es aus der ebenen Geometrie bekannt ist, wird dann das Teilchen eine *Epizykloide* beschreiben. Wie schon angegeben, wird diese Kurve natürlich zwischen den zwei Kreisen vom Radius $e^{\alpha z_0} |Z + Z'|$ und $e^{\alpha z_0} |Z - Z'|$ verlaufen müssen.

Auch für die Masse II ergeben sich analoge Resultate; bemerkenswert ist es aber, daß die zwei Winkelgeschwindigkeiten hier durch $\beta - \alpha U^{II}$ und $\beta' - \alpha U^{II}$ gegeben sind.

Fig. 2. zeigt eine solche schleifenförmige Epizykloide, die von dem Punkte P beschrieben wird, wenn sich derselbe in dem voll ausgezogenen Kreise um A bewegt, während A gleichzeitig eine Bewegung in dem anderen voll ausgezogenen Kreise um O ausführt. Als Verhältnis der Radien und der Winkelgeschwindigkeiten bei diesen Partialbewegungen sind die Werte 2 : 5 und 4 : 1 gewählt worden. Die Radien in den, die Epizykloide berührenden, gestrichelten Kreise sind durch die Summe und die Differenz der Radien der voll ausgezogenen Kreise gegeben. Der Radiusvektor des Teilchens ändert sich periodisch; mit der getroffenen Wahl der Konstanten ist die Periode mit einer Umdrehung des Radiusvektors von 125° verbunden. Die Bewegung in den zwei Partialkreisen hat hier dieselbe Umlaufsrichtung, was aber nicht immer zutreffen wird, da $\beta - \alpha U$ und

$\beta' - \alpha U$ sehr wohl von entgegengesetztem Vorzeichen sein können. Es würden dann andere Formen der Epizykloide aufkommen. So könnten z. B. durch geeignete Wahl der Konstanten wellenförmige, anstatt schleifenförmige Kurven erhalten werden.

Es ist beachtenswert, daß die Frequenz in den letzten Formeln nur in der Relation $\beta - \alpha U$ auftritt, die wir die *Orbitalfrequenz* nennen werden. Entsprechend wird nicht die Wellenperiode $T = \frac{2\pi}{\beta}$, sondern die *Orbitalperiode* $T' = \frac{2\pi}{\beta - \alpha U}$ die fundamentale Größe sein, deren Wert als Charakteristikum der vorkommenden Bahnkurve dienen kann. Wir werden weiter unten öfters die Gelegenheit haben, diese Tatsache konstatieren zu können.

Die Umlaufsrichtung eines Teilchens in seiner Orbitalbahn kann aus der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ des Teilchens bestimmt werden. Diese ergibt sich durch einfache Rechnung aus (12), indem wir uns erinnern, daß die individuelle Zeitdifferentiation $\frac{d}{dt}$ durch $\frac{\partial}{\partial t} + U^I \frac{\partial}{\partial x}$, bzw. $\frac{\partial}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt werden muß. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^I}{dt} &= -\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \alpha U^I\right) - \frac{\beta - \beta'}{2} \frac{(Z + Z')(Z - Z')}{Z^2 + Z'^2 + 2ZZ' \cos(\beta - \beta')t} \\ \frac{d\varphi^{II}}{dt} &= \left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \alpha U^{II}\right) + \frac{\beta - \beta'}{2} \frac{(Z + Z')(Z - Z')}{Z^2 + Z'^2 + 2ZZ' \cos(\beta - \beta')t} \end{aligned} \quad (15)$$

Das erste Glied rechts in diesen Ausdrücken stellt die rein konvektive Orbitalfrequenz dar, während die dynamische Frequenz im zweiten Gliede vorkommt. Nur für die wellenförmigen Bahnkurven ist die Umlaufsrichtung durch das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{dt}$ eindeutig gegeben. Für die schleifenförmigen Kurven wird die Bestimmung der Umlaufsrichtung etwas komplizierter; wir können aber darauf nicht näher eingehen.

Bemerkenswert ist die große Vereinfachung, die die Gleichungen (15) für $Z = Z'$ oder $Z = -Z'$ aufweisen, in welchem letzterem Falle die Anfangslage der Fläche für $t=0$ durch die Gleichgewichtslage gegeben war.

Auch der Fall, wo eine der Amplituden Z oder Z' verschwindet, verdient nähere Beachtung. Von den zwei Teilbewegungen in (14) bleibt dann nur die eine übrig, die Bahn eines Teilchens wird also *kreisförmig*. Seine Winkelgeschwindigkeit ist durch $-(\beta - \alpha U^I)$ oder $-(\beta' - \alpha U^I)$, bzw. $\beta - \alpha U^{II}$ oder $\beta' - \alpha U^{II}$ gegeben, d. h. durch die Orbitalfrequenz eindeutig festgelegt.

§ 10. Die Wellenbewegung bei Doppelwurzel der Frequenzgleichung.

Wir haben schon S. 22 gesehen, daß im Falle einer Doppelwurzel der Frequenzgleichung nur ein einziges Integral der Form (7, 5) erhalten werden kann. Die Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme lehrt uns dann, wie ein zweites, linear unabhängiges Integral gefunden werden kann.

Setzen wir für einen Augenblick voraus, daß die zwei Wurzeln nicht vollständig zusammenfallend sind, indem sie z. B. durch $\beta + \eta$ und $\beta - \eta$ gegeben seien, wo η eine kleine Größe ist, und lassen wir dann nachträglich η gegen Null konvergieren, so erhalten wir eine Doppelwurzel β der Frequenzgleichung.

Mit diesen Werten der Wurzeln ergibt sich nun für die gestörte Diskontinuitätsfläche, indem wir vorläufig die komplexe Schreibweise verwenden:

$$z = (Z e^{-i\eta t} + Z' e^{i\eta t}) e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

Durch Entwicklung des Ausdruckes in der Klammer nach steigenden Potenzen von η ergibt sich hieraus:

$$z = [(Z + Z') - i\eta(Z - Z')t + \dots] e^{i(\alpha x - \beta t)},$$

wo die angedeuteten Glieder Quadrate und höhere Potenzen von η enthalten. Schreiben wir nun:

$$\begin{aligned} Z + Z' &= \bar{Z} \\ -i\eta(Z - Z') &= W, \end{aligned}$$

wo \bar{Z} und W die neuen, willkürlichen Konstanten darstellen, und lassen wir η gegen Null gehen, so folgt:

$$z = (\bar{Z} + Wt) e^{i(\alpha x - \beta t)}.$$

Diese Gleichung der Diskontinuitätsfläche erscheint also als Summe von zwei linear unabhängigen Integralen mit zwei willkürlichen Konstanten, und stellt folglich das allgemeine Integral dar.

In derselben Weise ergeben sich für die Koeffizienten von $e^{\pm \alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)}$ in den Gleichungen (7, 5) und (7, 5'), wo mittels (7, 8) C durch Z ersetzt worden ist:

$$\begin{aligned} &(\beta + \eta - \alpha U) Z e^{-i\eta t} + (\beta - \eta - \alpha U) Z' e^{i\eta t} \rightarrow (\beta - \alpha U) (\bar{Z} + Wt) + iW, \\ &(\beta + \eta - \alpha U) (\beta + \eta - \alpha U \pm 2\Omega_y) Z e^{-i\eta t} + (\beta - \eta - \alpha U) (\beta - \eta - \alpha U \pm 2\Omega_y) Z' e^{i\eta t} \rightarrow \\ &\rightarrow (\beta - \alpha U) (\beta - \alpha U \pm 2\Omega_y) (\bar{Z} + Wt) + 2(\beta - \alpha U \pm \Omega_y) iW. \end{aligned}$$

Indem nun das Zeichen »Überstrichen« über Z weggelassen wird, erhalten wir die folgenden Gleichungen:

für die gestörte Grenzfläche:

$$z = (Z + Wt) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (1)$$

für die Wellenbewegung in den zwei Schichten:

$$\begin{aligned} u^I &= [(\beta - \alpha U^I) (Z + Wt) + iW] e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^I &= -i [(\beta - \alpha U^I) (Z + Wt) + iW] e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^I &= \varepsilon^I [(c - U^I) (\beta - \alpha U^I + 2\Omega_y) (Z + Wt) + 2(c - U^I + \frac{\Omega_y}{\alpha}) iW] e^{\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u^{II} &= - [(\beta - \alpha U^{II}) (Z + Wt) + iW] e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^{II} &= -i [(\beta - \alpha U^{II}) (Z + Wt) + iW] e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^{II} &= -\varepsilon^{II} [(c - U^{II}) (\beta - \alpha U^{II} - 2\Omega_y) (Z + Wt) + 2(c - U^{II} - \frac{\Omega_y}{\alpha}) iW] e^{-\alpha z} e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned}$$

Das partikuläre Integral mit der Amplitude Z stellt eine ungedämpfte Wellenbewegung dar, die sich genau so wie die in dem vorigen Paragraphen behandelte Bewegung verhält. Das andere partikuläre Integral hat dagegen eine mit der Zeit unbegrenzt anwachsende Amplitude. Im Falle einer Doppelwurzel der Frequenzgleichung wird sich folglich die betrachtete Grundströmung in Labilität befinden.

Beide Partikularwellen pflanzen sich mit derselben, rein konvektiven Geschwindigkeit fort, die folglich auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der interferierenden Welle wird.

Die zwei willkürlichen Konstanten sind voneinander unabhängig. Um die Bedeutung derselben klarzumachen, setzen wir zuerst in (1) $t=0$. Es ergibt sich dann:

$$z_{t=0} = Z e^{i\alpha x}. \quad (3)$$

Z ist also die Amplitude im Anfangsmomente $t=0$. Soll zu dieser Zeit die stationäre Grundströmung vorliegen, so muß $Z=0$ gewählt werden. Damit die Bewegung nicht für alle Zeiten gleich Null sein soll, muß dann die Konstante W in (1) von Null verschieden sein. Diese Konstante W wird die im Anfangsmomente $t=0$ herrschende Änderungsgeschwindigkeit der maximalen Erhebung der Fläche über ihrer Gleichgewichtslage

darstellen, wenn diese Änderungsgeschwindigkeit relativ zu der bewegten Fläche gerechnet wird. Wird diese Geschwindigkeit mit $\frac{dz}{dt}$ bezeichnet, so ist nämlich:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (4)$$

Aus (1) folgt dann:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = W e^{i\alpha x}. \quad (5)$$

Ist $W=0$, hat die Diskontinuitätsfläche ein einfaches, sinusförmiges Profil, das auch für alle Zeiten bestehen bleibt.

Wir wollen auch die Integrale (1) und (2) in reeller Form aufschreiben; sie lauten:

$$\begin{aligned} z &= (Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t), \\ u^I &= [(\beta - \alpha U^I)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t)] e^{\alpha z} \\ w^I &= [(\beta - \alpha U^I)(Z + Wt) \sin(\alpha x - \beta t) + W \cos(\alpha x - \beta t)] e^{\alpha z} \\ p^I &= \varepsilon^I [(c - U^I)(\beta - \alpha U^I + 2\Omega_y)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - \\ &\quad - 2\left(c - U^I + \frac{\Omega_y}{\alpha}\right) W \sin(\alpha x - \beta t)] e^{\alpha z}, \quad (6) \\ u^{II} &= - [(\beta - \alpha U^{II})(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t)] e^{-\alpha z} \\ w^{II} &= - [(\beta - \alpha U^{II})(Z + Wt) \sin(\alpha x - \beta t) + W \cos(\alpha x - \beta t)] e^{-\alpha z} \\ p^{II} &= - \varepsilon^{II} [(c - U^{II})(\beta - \alpha U^{II} - 2\Omega_y)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - \\ &\quad - 2\left(c - U^{II} - \frac{\Omega_y}{\alpha}\right) W \sin(\alpha x - \beta t)] e^{-\alpha z}. \end{aligned}$$

Für die Gleichung der Stromlinien ergibt sich hieraus (s. S. 29):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left[(\beta - \alpha U^I)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t) \right] e^{\alpha z} &= \Psi^I, \\ \frac{1}{\alpha} \left[(\beta - \alpha U^{II})(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t) \right] e^{-\alpha z} &= \Psi^{II}, \end{aligned} \quad (7)$$

die Stromfunktionen können hier in zwei ähnliche Partialfelder, deren Phasenunterschied gleich 90° ist, zerlegt werden.

Die Orbitalbahn bestimmt sich aus den Geschwindigkeitskomponenten (6) nach der in dem vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode. Indem wieder die Polarkoordinaten (9, 10) eingeführt werden, ergibt sich:

$$\begin{aligned} r^I \cos \varphi^I &= -(Z + Wt) e^{\alpha z} \sin(\alpha x - \beta t) \\ r^I \sin \varphi^I &= (Z + Wt) e^{\alpha z} \cos(\alpha x - \beta t), \\ r^{II} \cos \varphi^{II} &= (Z + Wt) e^{-\alpha z} \sin(\alpha x - \beta t) \\ r^{II} \sin \varphi^{II} &= (Z + Wt) e^{-\alpha z} \cos(\alpha x - \beta t). \end{aligned} \quad (8)$$

Wenn auch hier, wie im letzten Paragraphen, x durch $x_0^I + U^I t$, bzw. $x_0^{II} + U^{II} t$ und z durch z_0^I , bzw. z_0^{II} ersetzt werden, so folgt aus diesen Gleichungen, indem Z und W positiv vorausgesetzt werden:

$$r^I = (Z + Wt) e^{\alpha z_0^I} \quad r^{II} = (Z + Wt) e^{-\alpha z_0^{II}}, \quad (9)$$

$$\varphi^I = \alpha x_0^I + \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha U^I) t \quad \varphi^{II} = -\alpha x_0^{II} + \frac{\pi}{2} + (\beta - \alpha U^{II}) t. \quad (10)$$

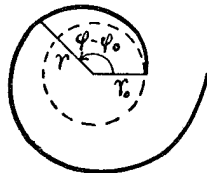


Fig. 3.

Aus den Gleichungen (9) ist das unbegrenzte Anwachsen des Radiusvektors mit der Zeit zu ersehen; die Bahnkurve wird folglich eine Spirale, in Ausnahmefällen eine Gerade sein. Durch Elimination der Zeit aus den Gleichungen (9) und (10) kann die Gleichung dieser Spirale in Polarkoordinaten ausgedrückt werden, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 r^I - r_0^I &= -\frac{W e^{\alpha z_0^I}}{\beta - \alpha U^I} (\varphi^I - \varphi_0^I), \\
 r^{II} - r_0^{II} &= \frac{W e^{-\alpha z_0^{II}}}{\beta - \alpha U^{II}} (\varphi^{II} - \varphi_0^{II}).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

r_0, φ_0 sind dabei die Anfangskoordinaten des Teilchens für $t=0$.

Für $r_0=0$, d. h. $Z=0$, wird die Kurve eine *archimedische Spirale*; die Anfangslage ist dann durch die stationäre Grundströmung gegeben. Für $Z \neq 0$ windet sich die Spirale um den Kreis vom Radius $r_0 = Z e^{\pm \alpha z_0}$. Siehe Fig. 3, wo $\frac{W e^{\pm \alpha z_0}}{|\mp (\beta - \alpha U)|} = \frac{1}{5}$ gewählt ist.

Die Umlaufsrichtung in der Spirale ist durch das Vorzeichen von $-(\beta - \alpha U^I)$, bzw. $\beta - \alpha U^{II}$ gegeben. Aus den Werten (8, 6) von α und β bei Doppelwurzel der Frequenzgleichung berechnen sich nun leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 -(\beta - \alpha U^I) &= \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \varepsilon^I (U^I - U^{II})} \left\{ g - 2 \Omega_y U^{II} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^I (g - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})^2}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}} \right\}, \\
 \beta - \alpha U^{II} &= \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \varepsilon^{II} (U^I - U^{II})} \left\{ g - 2 \Omega_y U^I \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^I (g - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})^2}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Wenn wir bloß positive Werte von α berücksichtigen, soll hier allein das positive Vorzeichen vor der Wurzel verwendet werden.

In der Atmosphäre, wo $g \gg 2 \Omega_y U$ ist, ergibt sich folglich dieselbe Umlaufsrichtung in beiden Massen. Sie ist durch das Vorzeichen von $U^I - U^{II}$ gegeben, da $\varepsilon^I - \varepsilon^{II} > 0$ vorausgesetzt werden kann.

§ 11. Die Wellenbewegung bei konjugiert komplexen Wurzeln der Frequenzgleichung.

Es seien
$$\beta = \beta_1 + i \beta_2, \quad \beta' = \beta_1 - i \beta_2 \tag{1}$$

die zwei konjugiert komplexen Wurzeln, wo β_2 immer positiv vorausgesetzt werden kann. Die Gleichung der gestörten Grenzfläche wird dann durch die Summe von zwei Gliedern der Form (7, 7) gegeben, indem einmal β und Z , ein anderes Mal β' und Z' als Konstanten gewählt werden:

$$z = (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{i(\alpha x - \beta_1 t)}. \tag{2}$$

Die Anfangslage dieser Grenzfläche zur Zeit $t=0$ ist bei vorgegebenen Werten der zwei Größen

$$z_{t=0} \text{ und } \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = \left[\frac{\partial z}{\partial t} + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} \right]_{t=0}$$

(s. S. 34) eindeutig festgelegt. Denn aus (2) folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
 z_{t=0} &= (Z + Z') e^{i \alpha x} \\
 \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} &= \beta_2 (Z - Z') e^{i \alpha x},
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

und wenn die Größen links bekannt sind, ergeben sich hieraus die Werte der willkürlichen Konstanten Z und Z' .

So erhalten wir z. B., wenn $z_{t=0}=0$ sein soll, d. h. wenn im Anfangsmomente eine ungestörte Grenzfläche vorliegen soll:

$$Z + Z' = 0;$$

(3) gibt dann:

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = 2 \beta_2 Z e^{i \alpha x},$$

während sich die Gleichung der gestörten Grenzfläche auf

$$z = 2 Z \sinh \beta_2 t e^{i(\alpha x - \beta_1 t)} \tag{4}$$

reduziert. Die Amplitude der schwingenden Fläche wächst folglich in diesem Falle unbegrenzt mit t .

Wenn andererseits $z_{t=0} \neq 0$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0$ sein soll, so folgt aus (3):

$$Z - Z' = 0,$$

wodurch (2) ergibt:

$$z = 2 Z \cosh \beta_2 t e^{i(ax - \beta_1 t)}, \quad (5)$$

also wieder Anfachung der Schwingung.

Dämpfung wird nur für $Z=0$ vorkommen können. In diesem Falle wird nämlich:

$$z = Z' e^{-\beta_2 t} e^{i(ax - \beta_1 t)},$$

und dieser Ausdruck geht mit unbegrenzt wachsendem t gegen Null, da $\beta_2 > 0$ vorausgesetzt worden ist.

In diesem Falle ergibt sich aus (3):

$$z_{t=0} = Z' e^{i a x}, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = -\beta_2 Z' e^{i a x},$$

woraus

$$\beta_2 z_{t=0} + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

erhalten wird. Nur wenn diese spezielle Relation zwischen den zwei Parametern $z_{t=0}$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}$ erfüllt ist, wird eine gedämpfte Wellenbewegung aufkommen können. Jede andere Relation zwischen den zwei Parametern muß dagegen zu Anfachung Anlaß geben.

In reeller Form lautet die Gleichung der gestörten Grenzfläche (2):

$$z = (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t). \quad (6)$$

Die entsprechenden Integrale der Form (7, 5) lauten:

$$\begin{aligned} u^I &= [(\beta_1 - a U^I)(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t)] e^{\alpha z} \\ w^I &= [(\beta_1 - a U^I)(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t) + \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t)] e^{\alpha z} \\ p^I &= \varepsilon^I [(c_1 - U^I)(\beta_1 - a U^I + 2 \Omega_y) - c_2 \beta_2] (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) e^{\alpha z} - \\ &\quad - \varepsilon^I 2 c_2 (\beta_1 - a U^I + \Omega_y) (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t) e^{\alpha z}, \\ u^{II} &= -[(\beta_1 - a U^{II})(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t)] e^{-\alpha z} \\ w^{II} &= [(\beta_1 - a U^{II})(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t) + \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t)] e^{-\alpha z} \\ p^{II} &= -\varepsilon^{II} [(c_1 - U^{II})(\beta_1 - a U^{II} - 2 \Omega_y) - c_2 \beta_2] (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) e^{-\alpha z} + \\ &\quad + \varepsilon^{II} 2 c_2 (\beta_1 - a U^{II} - \Omega_y) (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t) e^{-\alpha z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus diesen Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich die folgenden Gleichungen der Stromfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} [(\beta_1 - a U^I)(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t)] e^{\alpha z} &= \Psi^I, \\ \frac{1}{\alpha} [(\beta_1 - a U^{II})(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(ax - \beta_1 t) - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(ax - \beta_1 t)] e^{-\alpha z} &= \Psi^{II}. \end{aligned} \quad (8)$$

Wie im vorigen Paragraphen, ist auch hier der Phasenunterschied der zwei ähnlichen Partialfelder links gleich 90° . Die Stromlinien konstruieren sich dann leicht durch graphische Addition.

Ferner kann die Orbitalbewegung nach der üblichen Methode aus (7) bestimmt werden. Durch Anwendung der in § 9 eingeführten Polarkoordinaten und des von dem Grundstrom mitgeführten Koordinatensystems $x^I O^I z^I$ (s. Fig. 1, S. 31) lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} r^I \cos \varphi^I &= -(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{\alpha z_0^I} \sin [\alpha x_0^I - (\beta_1 - \alpha U^I) t] \\ r^I \sin \varphi^I &= (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{\alpha z_0^I} \cos [\alpha x_0^I - (\beta_1 - \alpha U^I) t], \\ r^{II} \cos \varphi^{II} &= (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{-\alpha z_0^{II}} \sin [\alpha x_0^{II} - (\beta_1 - \alpha U^{II}) t] \\ r^{II} \sin \varphi^{II} &= (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{-\alpha z_0^{II}} \cos [\alpha x_0^{II} - (\beta_1 - \alpha U^{II}) t]. \end{aligned} \tag{9}$$

Unter der Voraussetzung, daß $Z + Z' \geq 0$ ist, folgt hieraus:

$$r^I = (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{\alpha z_0^I} \quad r^{II} = (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) e^{-\alpha z_0^{II}}, \tag{10}$$

$$\varphi^I = \alpha x_0^I + \frac{\pi}{2} - (\beta_1 - \alpha U^I) t \quad \varphi^{II} = -\alpha x_0^{II} + \frac{\pi}{2} + (\beta_1 - \alpha U^{II}) t. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) geben uns das Gesetz, nach welchem der Radiusvektor eines Teilchens mit t gegen Unendlich geht (für $Z \neq 0$); sie zeigen außerdem, daß der Radiusvektor, wie früher, mit der Entfernung von der Diskontinuitätsfläche exponentiell abnimmt. Elimination von t aus (10) und (11) gibt uns die Gleichung der Bahn, in Polarkoordinaten ausgedrückt. Sie lautet:

$$\begin{aligned} r^I &= \left[Z e^{-\frac{\beta_2 (\varphi^I - \varphi_0^I)}{\beta_1 - \alpha U^I}} + Z' e^{\frac{\beta_2 (\varphi^I - \varphi_0^I)}{\beta_1 - \alpha U^I}} \right] e^{\alpha z_0^I}, \\ r^{II} &= \left[Z e^{\frac{\beta_2 (\varphi^{II} - \varphi_0^{II})}{\beta_1 - \alpha U^{II}}} + Z' e^{-\frac{\beta_2 (\varphi^{II} - \varphi_0^{II})}{\beta_1 - \alpha U^{II}}} \right] e^{-\alpha z_0^{II}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Der Radiusvektor eines Teilchens kann folglich als die Summe von zwei Größen betrachtet werden; jede von diesen ist Radiusvektor in einer logarithmischen Spirale. Mit wachsenden Werten von φ nimmt die eine Größe zu, die andere ab.

Fig. 4 zeigt eine solche spiralförmige Bahnkurve, aus zwei logarithmischen Spiralen zusammengesetzt, die im Anfangsmomente durch die Punkte A und A' hindurchgehen. Als Verhältnis der Radien derselben ist im Anfangsmomente

2 : 5 gewählt worden, mit $\frac{\beta_2}{|\mp (\beta_1 - \alpha U)|} = \frac{1}{4}$.

Ist die eine Amplitude Z oder Z' gleich Null, wird die Bahn des Teilchens eine *logarithmische Spirale*.

Für $Z = -Z'$, wobei der Anfangszustand die ungestörte Grundströmung ist, erhalten wir aus (12):

$$\begin{aligned} r^I &= 2 Z \sinh \left[\frac{\beta_2 (\varphi^I - \varphi_0^I)}{-(\beta_1 - \alpha U^I)} \right] e^{\alpha z_0^I}, \\ r^{II} &= 2 Z \sinh \left[\frac{\beta_2 (\varphi^{II} - \varphi_0^{II})}{\beta_1 - \alpha U^{II}} \right] e^{-\alpha z_0^{II}}, \end{aligned}$$

also wieder eine spiralförmige Bahn.

Die Gleichungen (11) sind mit (10, 10) identisch. Wie dort, ist auch hier die Umlaufrichtung des Teilchens in seiner Orbitalbahn durch das Vorzeichen von $-(\beta_1 - \alpha U^I)$, bzw. $\beta_1 - \alpha U^{II}$ gegeben.

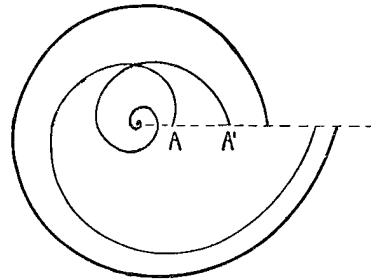


Fig. 4.

Bei zwei konjugiert komplexen Wurzeln der Frequenzgleichung ergeben sich nun nach (8, 4):

$$-(\beta_1 - a U^I) = \frac{\alpha \varepsilon^{II} (U^I - U^{II}) + \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}}$$

und

$$\beta_1 - a U^{II} = \frac{\alpha \varepsilon^I (U^I - U^{II}) - \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}},$$

während für den Radikand von (8, 4) die Ungleichung

$$-\alpha^2 \varepsilon^I \varepsilon^{II} (U^I - U^{II})^2 + \alpha (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) [\varepsilon^I (g - 2 \Omega_y U^I) + \varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})] + \Omega_y^2 (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})^2 < 0$$

bestehen muß. Wegen der zwei obigen Gleichungen kann nun diese Ungleichung in der Form:

$$-(\beta_1 - a U^I) (\beta_2 - a U^{II}) > \alpha \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} [g - \Omega_y (U^I + U^{II})]$$

geschrieben werden. Da die rechte Seite für atmosphärische Verhältnisse positiv ist, (für $\alpha > 0$), ergibt sich folglich immer dieselbe Umlaufrichtung in beiden Massen. Das Vorzeichen derselben ist durch dasjenige von $U^I - U^{II}$ gegeben.

§ 12. Endliche Schichtdicken.

Die Resultate der letzten Paragraphen lassen sich mit geringer Modifikation auf den Fall ausdehnen, wo die zwei Schichten nicht mehr den ganzen Raum erfüllen, sondern von zwei starren, horizontalen Ebenen im Abstände h^I und h^{II} von der Diskontinuitätsfläche begrenzt sind. Wie früher, sollen die Schichten unendliche Ausdehnung in der x -Richtung besitzen. In der y -Richtung können sie entweder unbegrenzt oder auch von zwei vertikalen Ebenen begrenzt sein. Die Bewegung erleidet nämlich keine Änderung durch die Einführung dieser vertikalen Grenzflächen, denn sie findet nur in der xz -Ebene statt, wodurch die Grenzbedingung an einer vertikalen Fläche immer erfüllt ist. Die Flüssigkeitsmassen sind also in einem unendlich langen, rechteckigen Kanal von beliebiger Breite und von der Höhe $h^I + h^{II} = H$ eingeschlossen.

Die Grundströmung soll dieselbe wie in den vorigen Paragraphen sein. Die Störungsgleichungen (6, 3) behalten auch ihre Gültigkeit; dasselbe muß dann auch mit der allgemeinen Lösung derselben (7, 4) der Fall sein.

Zu den Grenzbedingungen an der Diskontinuitätsfläche kommen hier noch die Grenzflächenbedingungen an den starren Flächen $z = -h^I$ und $z = h^{II}$ hinzu. Nach der Gleichung (4, 6) muß nun an einer horizontalen Fläche $z = h$ die Vertikalgeschwindigkeit verschwinden. Aus dem Integrale (7, 4) ergibt sich aber, wenn $C'' = 0$ gesetzt wird:

$$w_{z=h} = (C e^{\alpha h} + C' e^{-\alpha h}) e^{i(\alpha x - \beta t)};$$

wegen des Verschwindens dieses Ausdruckes folgt dann, indem wir zur Abkürzung die neue Konstante

$$\bar{C} = 2 C e^{\alpha h} = -2 C' e^{-\alpha h}$$

einführen und zukünftig wieder C anstatt \bar{C} schreiben:

$$\begin{aligned} u &= i C \cosh \alpha (z - h) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w &= C \sinh \alpha (z - h) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p &= \frac{\varepsilon i C}{\alpha} [(\beta - \alpha U) \cosh \alpha (z - h) + 2 \Omega_y \sinh \alpha (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Für die Konstanten C , h sollen in der Schicht I die Werte C^I , $-h^I$ und in der Schicht II die Werte C^{II} , h^{II} genommen werden.

Mit diesen Integralen ergibt sich für die Gleichung der gestörten Grenzfläche, vgl. (6, 4):

$$- [g(\epsilon^I - \epsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\epsilon^I U^I - \epsilon^{II} U^{II})] z + \frac{i}{\alpha} \{ \epsilon^I C^I [(\beta - \alpha U^I) \cosh \alpha h^I + 2 \Omega_y \sinh \alpha h^I] - \epsilon^{II} C^{II} [(\beta - \alpha U^{II}) \cosh \alpha h^{II} - 2 \Omega_y \sinh \alpha h^{II}] \} \epsilon^{i(\alpha x - \beta t)} = 0, \quad (2)$$

oder, durch Einführung der Amplitude der schwingenden Fläche:

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (3)$$

Aus (3) und den Grenzflächenbedingungen an der Diskontinuitätsfläche (6, 5') ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned} C^I \sinh \alpha h^I &= -i(\beta - \alpha U^I) Z, \\ C^{II} \sinh \alpha h^{II} &= i(\beta - \alpha U^{II}) Z. \end{aligned} \quad (4)$$

Werden diese Werte von C^I und C^{II} in (2) eingesetzt, so folgt, unter Berücksichtigung von (3):

$$\epsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 \operatorname{cotgh} \alpha h^I + \epsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 \operatorname{cotgh} \alpha h^{II} - (\epsilon^I - \epsilon^{II}) (\alpha g - 2 \Omega_y \beta) = 0. \quad (5)$$

Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung der Frequenzgleichung (7, 9). Lassen wir nämlich in (5) h^I und h^{II} gegen Unendlich gehen, so wird sich der hyperbolische Kotangens dem Werte 1 nähern, wodurch wir auf die Gleichung (7, 9) geführt werden.

Nach β aufgelöst, ergeben sich aus (5) wieder zwei Werte:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \beta \\ \beta' \end{aligned} \right\} &= \frac{\alpha (\epsilon^I a^I U^I + \epsilon^{II} a^{II} U^{II}) - \Omega_y (\epsilon^I - \epsilon^{II})}{\epsilon^I a^I + \epsilon^{II} a^{II}} \pm \\ &\pm \frac{1}{\epsilon^I a^I + \epsilon^{II} a^{II}} \sqrt{-\alpha^2 \epsilon^I \epsilon^{II} a^I a^{II} (U^I - U^{II})^2 + \alpha (\epsilon^I - \epsilon^{II}) [\epsilon^I a^I (g - 2 \Omega_y U^I) + \epsilon^{II} a^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II})] + \Omega_y^2 (\epsilon^I - \epsilon^{II})^2}, \end{aligned}$$

wo wir zur Abkürzung:

$$\operatorname{cotgh} \alpha h^I = a^I, \quad \operatorname{cotgh} \alpha h^{II} = a^{II},$$

gesetzt haben. Je nachdem der Ausdruck unter der Wurzel größer, gleich oder kleiner als Null ist, hat (5) zwei verschiedene reelle, zwei zusammenfallende oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln.

Wie es in § 8 für den Fall von unendlichen Schichtdicken ausgeführt worden ist, könnte auch hier das Vorkommen dieser drei Fälle in ihrer Abhängigkeit von den Werten der auftretenden Parameter untersucht werden. Wir müssen uns aber auf die Behandlung eines Spezialfalles beschränken, wobei die Frequenzgleichung eine große Vereinfachung erleidet.

Es ist dies der Fall von sehr dünnen Schichten. Dann kann nämlich der hyperbolische Kotangens in (5) nach Potenzen des Argumentes entwickelt werden, indem

$$\operatorname{cotgh} \alpha h = \frac{1}{\alpha h} \left[1 - \frac{(\alpha h)^2}{3} + \dots \right]$$

ist. Für sehr kleine Werte von h können wir uns auf das erste Glied in dieser Reihenentwicklung beschränken und erhalten dann aus (5), indem $\beta = \alpha c$ eingeführt wird:

$$\frac{\epsilon^I}{h^I} (c - U^I)^2 + \frac{\epsilon^{II}}{h^{II}} (c - U^{II})^2 - (\epsilon^I - \epsilon^{II}) (g - 2 \Omega_y c) = 0. \quad (5')$$

Da α hier nicht mehr vorhanden ist, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in seichten Schichten von der Wellenlänge unabhängig sein.

Durch Auflösung der Gleichung (5') nach c ergibt sich ferner:

$$\left. \frac{c}{c'} \right\} = \frac{\frac{\varepsilon^I U^I}{h^I} + \frac{\varepsilon^{II} U^{II}}{h^{II}} - \Omega_y (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})}{\frac{\varepsilon^I}{h^I} + \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}}} \pm$$

$$\pm \frac{1}{\frac{\varepsilon^I}{h^I} + \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}}} \sqrt{-\frac{\varepsilon^I \varepsilon^{II}}{h^I h^{II}} (U^I - U^{II})^2 + (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \left[\frac{\varepsilon^I}{h^I} (g - 2 \Omega_y U^I) + \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}} (g - 2 \Omega_y U^{II}) \right] + \Omega_y^2 (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})^2}.$$

Für den Fall von einer einzigen dünnen Schicht, d. h. $\varepsilon^{II} = 0$, reduziert sich dieser Ausdruck auf:

$$\left. \frac{c}{c'} \right\} = U^I - \Omega_y h^I \pm \sqrt{(g - 2 \Omega_y U^I) h^I + \Omega_y^2 h^{I2}}.$$

Für $U^I = \Omega_y = 0$ ergibt sich hieraus die Lagrange'sche Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen auf seichtem Wasser.

Wenn zwei Schichten vorhanden sind, werden wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur in dem meteorologisch interessanten Fall eines kleinen Dichteunterschiedes an der Diskontinuitätsfläche näher untersuchen.

Bei einem kleinen Temperatursprung $\Delta \vartheta$ können wir nun

$$\varepsilon^I = \bar{\varepsilon} \left(1 + \frac{\Delta \vartheta}{2 \vartheta} \right), \quad \varepsilon^{II} = \bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{\Delta \vartheta}{2 \vartheta} \right)$$

setzen (s. § 8, Formel (7) und (10)) und erhalten dann, wenn noch die kleinen Glieder mit Ω_y unter der Wurzel vernachlässigt werden:

$$\left. \frac{c}{c'} \right\} = \frac{U^I h^{II} + U^{II} h^I}{h^I + h^{II}} + \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} \frac{h^I h^{II}}{h^I + h^{II}} \left(\frac{U^I - U^{II}}{h^I + h^{II}} - \Omega_y \right) \pm$$

$$\pm \left(1 + \frac{\Delta \vartheta}{2 \vartheta} \frac{h^I - h^{II}}{h^I + h^{II}} \right) \sqrt{\frac{h^I h^{II}}{h^I + h^{II}} \left[-\frac{(U^I - U^{II})^2}{h^I + h^{II}} + \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} g \right]}.$$

Aus dieser Formel werden wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für den Fall von entgegengesetzten Grundströmen vom selben Betrag ausrechnen. Es sei $-U^I = U^{II} = U$, $\Delta \vartheta = 5^0$, $\bar{\vartheta} = 300^0$, $g = 9,78 \text{ m sec}^{-2}$ und $\Omega_y = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Es sei ferner $h^I + h^{II} = H$ und $h^I = \frac{n}{10} H$. Aus der Formel folgt dann:

$$\left. \frac{c/U}{c'/U} \right\} = -\left(1 - \frac{n}{5} \right) - \frac{1}{60} \frac{n}{10} \left(1 - \frac{n}{10} \right) \left(2 + \Omega_y \frac{H}{U} \right) \pm$$

$$\pm \left(1 - \frac{1 - \frac{n}{5}}{120} \right) \sqrt{-2 \frac{n}{5} \left(1 - \frac{n}{10} \right) + \frac{9,78}{60} \frac{n}{10} \left(1 - \frac{n}{10} \right) \frac{H}{U^2}}.$$

Die Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für verschiedene n ergeben sich aus Fig. 5, wo c/U durch eine voll ausgezogene und c'/U durch eine gestrichelte Kurve dargestellt ist. Dabei ist $\frac{H}{U^2} = 100$ gesetzt worden. Das Glied mit Ω_y trägt nur mit einem Werte von der Größenordnung $10^{-5} U$ bei, was für gewöhnliche Geschwindigkeiten nur Bruchteile eines Millimeters ergibt, und es kann deshalb vernachlässigt werden.

Die Konstante n kann alle Werte zwischen 0 und 10 annehmen. Die Extremwerte 0 und 10 sind aber auszuschließen; denn in diesen Fällen wird nur eine einzige Schicht zwischen zwei starren Grenzflächen vorhanden sein, und eine Wellenbewegung kann dann nicht aufkommen.

Aus der Figur ersieht man sofort, daß die größte Fortpflanzungsgeschwindigkeit — vom doppelten Betrag des Grundstromes — dann auftritt, wenn das Verhältnis der Schichtdicken etwa 1:3 ist. Bemerkenswert ist es auch, daß von den zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c und c' die größte immer die Richtung des Grundstromes in der dünnsten Schicht besitzt.

Um von den Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bei anderen Temperatursprüngen auch einen Eindruck bekommen zu können, haben wir für den Fall von gleichen Schichtdicken ($h^I = h^{II} = h$) und gleichen, aber entgegengesetzten Grundströmen die Formel:

$$\left. \begin{matrix} c/U \\ c'/U \end{matrix} \right\} = -\frac{\Delta\vartheta}{600} \left(1 + \Omega_y \frac{h}{U} \right) \pm \sqrt{-1 + \frac{\Delta\vartheta}{600} g \frac{h}{U^2}}$$

für verschiedene Werte des Temperatursprunges $\Delta\vartheta$ und des Parameters $\frac{h}{U^2}$ berechnet (s. Tabelle II). Es ergeben sich wachsende Geschwindigkeiten bei zunehmenden Werten dieser Parameter. Für $\Delta\vartheta = 5^\circ$, $U = 10 \text{ m sec}^{-1}$ und $h = 5000 \text{ m}$ wird z. B. c gleich 17 m sec^{-1} oder 61 km/St.

Bei unendlicher Tiefe der Flüssigkeitsschichten haben wir mit demselben Temperatur- und Windsprünge wesentlich größere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten erhalten, jedenfalls bei langen Wellen. So hat sich für eine Welle von der Länge von 1000 km die Fortpflanzungsgeschwindigkeit 113 m sec^{-1} ergeben (s. S. 27).

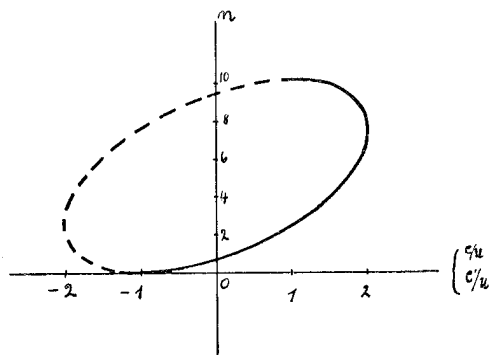


Fig. 5.

Tabelle II.

$\frac{h}{U^2}$	$\Delta\vartheta$			
	1	2	5	10
1	$-2.10^{-3} \pm 0,99 i$	$-3.10^{-3} \pm 0,98 i$	$-8.10^{-3} \pm 0,96 i$	$-16.10^{-3} \pm 0,92 i$
10	$-2.10^{-3} \pm 0,91 i$	$-3.10^{-3} \pm 0,91 i$	$-8.10^{-3} \pm 0,43 i$	$-16.10^{-3} \pm 0,79$
20	$-2.10^{-3} \pm 0,82 i$	$-3.10^{-3} \pm 0,59 i$	$-8.10^{-3} \pm 0,79$	$-16.10^{-3} \pm 1,5$
50	$-2.10^{-3} \pm 0,43 i$	$-3.10^{-3} - 10^{-5} U \pm 0,79$	$-8.10^{-3} - 3.10^{-5} U \pm 1,7$	$-16.10^{-3} - 6.10^{-5} U \pm 2,7$
100	$-2.10^{-3} \pm 0,79$	$-3.10^{-3} - 2.10^{-5} U \pm 1,5$	$-8.10^{-3} - 6.10^{-5} U \pm 2,7$	$-16.10^{-3} - 12.10^{-5} U \pm 3,9$

$$\left. \begin{matrix} c/U \\ c'/U \end{matrix} \right\} \text{ als Funktion von } \Delta\vartheta \text{ und } \frac{h}{U^2}.$$

Wir begnügen uns mit diesen numerischen Angaben zu der Frequenzgleichung und gehen jetzt zur Aufstellung der Integrale über.

Wegen des Vorhandenseins von zwei Wurzeln, β und β' , der Frequenzgleichung wird nun

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)} + Z' e^{i(\alpha x - \beta' t)} \tag{6}$$

eine allgemeinere Gleichung als (3) für die gestörte Grenzfläche sein. Die entsprechenden Integrale der Form (1), wenn nach (4) C durch Z ersetzt wird, lauten dann:

$$\begin{aligned}
u &= -[(\beta - \alpha U) Z e^{i(\alpha x - \beta t)} + (\beta' - \alpha U) Z' e^{i(\alpha x - \beta' t)}] \frac{\cosh \alpha(z-h)}{\sinh \alpha h} \\
w &= i[(\beta - \alpha U) Z e^{i(\alpha x - \beta t)} + (\beta' - \alpha U) Z' e^{i(\alpha x - \beta' t)}] \frac{\sinh \alpha(z-h)}{\sinh \alpha h} \\
p &= -\varepsilon \alpha [(c-U)^2 Z e^{i(\alpha x - \beta t)} + (c'-U)^2 Z' e^{i(\alpha x - \beta' t)}] \frac{\cosh \alpha(z-h)}{\sinh \alpha h} \\
&\quad - \varepsilon 2 \Omega_y [(c-U) Z e^{i(\alpha x - \beta t)} + (c'-U) Z' e^{i(\alpha x - \beta' t)}] \frac{\sinh \alpha(z-h)}{\sinh \alpha h}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Für die Schicht I sollen hier $\varepsilon = \varepsilon^I$, $U = U^I$, $h = -h^I$, und für die Schicht II sollen $\varepsilon = \varepsilon^{II}$, $U = U^{II}$, $h = h^{II}$ gesetzt werden.

(a) Wenn β und β' reell und verschieden sind, brauchen wir nur die Exponentialglieder in (7) durch die entsprechenden Kosinusausdrücke zu ersetzen, um die reellen Integrale zu erhalten. Wir finden es deshalb nicht notwendig, dieselben in reeller Form hinzuschreiben.

Aus diesen reellen Geschwindigkeitskomponenten erhalten wir für die Gleichung der Stromfunktion:

$$-[(\beta - \alpha U) Z \cos(\alpha x - \beta t) + (\beta' - \alpha U) Z' \cos(\alpha x - \beta' t)] \frac{\sinh \alpha(z-h)}{\alpha \sinh \alpha h} = \Psi, \tag{8}$$

wodurch auch die Stromlinien gegeben sind. Dieselben werden hier nicht mehr einander ähnlich sein, sondern es wird eine Abplattung derselben gegen die Wände zu stattfinden.

Für die Orbitalbahn ergibt sich nach der üblichen Methode:

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \{Z \sin[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t] + Z' \sin[\alpha x_0 - (\beta' - \alpha U)t]\} \frac{\cosh \alpha(z_0 - h)}{\sinh \alpha h} \\
z - z_0 &= -\{Z \cos[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t] + Z' \cos[\alpha x_0 - (\beta' - \alpha U)t]\} \frac{\sinh \alpha(z_0 - h)}{\sinh \alpha h}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Hieraus folgt erstens:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\cosh^2 \alpha(z_0 - h)} + \frac{(z - z_0)^2}{\sinh^2 \alpha(z_0 - h)} = \frac{Z^2 + Z'^2 + 2ZZ' \cos(\beta - \beta')t}{\sinh^2 \alpha h}. \tag{10}$$

Wie es bei unendlichen Schichten der Fall war, wird auch hier die Bahn in einem ringförmigen Gebiet verlaufen müssen; die begrenzenden Kurven dieses Gebietes sind aber nicht mehr Kreise, sondern Ellipsen mit der kleinen Achse in der z -Richtung. Die Zeit zwischen zwei Berührungen der Bahn mit einer begrenzenden Ellipse ist durch $\frac{2\pi}{\beta - \beta'}$ gegeben.

Für Z oder $Z' = 0$ wird die Bahn rein elliptisch mit der großen Achse längs dem Grundstrom. Die Ausschläge in der x -Richtung sind mit $\cosh \alpha(z-h)$, diejenigen in der z -Richtung mit $\sinh \alpha(z-h)$ proportional. Die letzteren gehen folglich gegen Null, wenn wir uns der Grenzfläche $z=h$ nähern.

In Analogie zu § 9 kann auch hier die wirkliche Bewegung eines Teilchens als die Summe von zwei elliptischen Partialbewegungen interpretiert werden. Das Teilchen bewegt sich in einer, in der z -Richtung abgeplatteten Ellipse herum, deren Zentrum gleichzeitig eine ebenfalls in der z -Richtung abgeplattete Ellipse um (x_0, z_0) beschreibt.

Aus (9) kann auch die Umlaufsrichtung der Teilchen in ihrer Orbitalbahn bestimmt werden; es zeigt sich, daß sich das Resultat für endliche Schichten mit dem früher angegebenen Resultate für unendliche Schichten völlig deckt. Das Vorhandensein der horizontalen Grenzwände bewirkt deshalb nur eine Abplattung der epizykloidalen Orbitalbahnen in der vertikalen Richtung.

Wir beschränken uns auf diese Andeutungen und gehen gleich zu dem Falle mit Doppelwurzel der Frequenzgleichung (5) über.

(b) Ein Vergleich zwischen den Integralen (7) und den entsprechenden für unendliche Schichten (§ 9) zeigt, daß der einzige Unterschied zwischen den zwei Reihen von Integralen darin besteht, daß die z -Koordinate auf verschiedene Weise eingeht. Derselbe Unterschied muß dann auch bei Doppelwurzel der Frequenzgleichung zwischen den Integralen des § 10 für unendliche Schichten und den sich aus (7) ergebenden bestehen. Aus (10, 6) folgen in dieser Weise die allgemeineren Gleichungen für endliche Schichten:

$$\begin{aligned} z &= (Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) \\ u &= -[(\beta - \alpha U)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t)] \frac{\cosh \alpha(z - h)}{\sinh \alpha h} \\ w &= -[(\beta - \alpha U)(Z + Wt) \sin(\alpha x - \beta t) + W \cos(\alpha x - \beta t)] \frac{\sinh \alpha(z - h)}{\sinh \alpha h} \\ p &= -\varepsilon(c - U)[(\beta - \alpha U)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - 2W \sin(\alpha x - \beta t)] \frac{\cosh \alpha(z - h)}{\sinh \alpha h} - \\ &\quad - \varepsilon 2 \Omega_y [(c - U)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - \frac{1}{\alpha} W \sin(\alpha x - \beta t)] \frac{\sinh \alpha(z - h)}{\sinh \alpha h}, \end{aligned} \tag{11}$$

wo, wie früher, $\varepsilon^I, U^I, -h^I$, bzw. $\varepsilon^{II}, U^{II}, h^{II}$ für ε, U, h einzusetzen sind.

Die Stromlinien ergeben sich aus der Gleichung der Stromfunktion:

$$-[(\beta - \alpha U)(Z + Wt) \cos(\alpha x - \beta t) - W \sin(\alpha x - \beta t)] \frac{\sinh \alpha(z - h)}{\alpha \sinh \alpha h} = \Psi, \tag{12}$$

während die Orbitalbahn aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (Z + Wt) \sin[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t] \frac{\cosh \alpha(z_0 - h)}{\sinh \alpha h} \\ z - z_0 &= -(Z + Wt) \cos[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t] \frac{\sinh \alpha(z_0 - h)}{\sinh \alpha h} \end{aligned} \tag{13}$$

bestimmt werden kann.

Aus (13) erhalten wir nun:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\cosh^2 \alpha(z_0 - h)} + \frac{(z - z_0)^2}{\sinh^2 \alpha(z_0 - h)} = \frac{(Z + Wt)^2}{\sinh^2 \alpha h}. \tag{14}$$

Für $W=0$ stellt diese Gleichung eine Ellipse dar, mit der großen Achse in der x -Richtung. Die Exzentrizität nimmt mit abnehmender Entfernung von der Wand zu. Für $W \neq 0$ geht die Ellipse in eine Spirale über; das Teilchen entfernt sich immer mehr von seiner stationären Lage.

Wenn auch hier das früher betrachtete Azimuth φ des Teilchens eingeführt wird, so folgt aus (13):

$$\cotg \varphi = -\operatorname{tg}[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t] \operatorname{cotgh} \alpha(z_0 - h), \tag{15}$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\beta - \alpha U}{2} \frac{\sinh 2\alpha(z_0 - h)}{\sinh^2 \alpha(z_0 - h) + \sin^2[\alpha x_0 - (\beta - \alpha U)t]}.$$

Da der letzte Faktor das Vorzeichen von $-h$ hat, wird also die Umlaufsrichtung in diesem Falle, wie es auch bei unendlichen Schichten der Fall war, durch das Vorzeichen von $-(\beta - \alpha U^I)$, bzw. $\beta - \alpha U^{II}$ gegeben sein.

(c) Wenn schließlich zwei konjugiert komplexe Wurzeln der Frequenzgleichung vorliegen, erhalten wir die Integrale der Störungsgleichungen, indem wir $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\beta' = \beta_1 - i\beta_2$ in (6) und (7) einführen und die komplexen Teile wegwerfen. Es ergibt sich dann:

für die gestörte Grenzfläche:

$$z = (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t),$$

für die Wellenbewegung:

$$\begin{aligned} u = & - [(\beta_1 - \alpha U) (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t) - \\ & - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(\alpha x - \beta_1 t)] \frac{\cosh \alpha (z - h)}{\sinh \alpha h} \\ w = & - [(\beta_1 - \alpha U) (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(\alpha x - \beta_1 t) + \\ & + \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t)] \frac{\sinh \alpha (z - h)}{\sinh \alpha h} \quad (16) \\ p = & - \alpha \varepsilon \{ [(c_1 - U)^2 - c_2^2] (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t) - \\ & - 2 (c_1 - U) c_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(\alpha x - \beta_1 t) \} \frac{\cosh \alpha (z - h)}{\sinh \alpha h} \\ & - 2 \Omega_y \varepsilon [(c_1 - U) (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t) - c_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(\alpha x - \beta_1 t)] \frac{\sinh \alpha (z - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned}$$

Ferner bestimmen sich die Stromlinien aus:

$$\begin{aligned} - [(\beta_1 - \alpha U) (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos(\alpha x - \beta_1 t) - \\ - \beta_2 (Z e^{\beta_2 t} - Z' e^{-\beta_2 t}) \sin(\alpha x - \beta_1 t)] \frac{\sinh \alpha (z - h)}{\alpha \sinh \alpha h} = \Psi, \quad (17) \end{aligned}$$

und die Orbitalbahn aus:

$$\begin{aligned} x - x_0 = & (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \sin [\alpha x_0 - (\beta_1 - \alpha U) t] \frac{\cosh \alpha (z_0 - h)}{\sinh \alpha h} \\ z - z_0 = & - (Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t}) \cos [\alpha x_0 - (\beta_1 - \alpha U) t] \frac{\sinh \alpha (z_0 - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned} \quad (18)$$

Aus (18) erhalten wir wieder:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\cosh^2 \alpha (z_0 - h)} + \frac{(z - z_0)^2}{\sinh^2 \alpha (z_0 - h)} = \frac{(Z e^{\beta_2 t} + Z' e^{-\beta_2 t})^2}{\sinh^2 \alpha h}. \quad (19)$$

Die Orbitalbahn erscheint also als Summe von zwei, in der z -Richtung abgeplatteten logarithmischen Spiralen. Die Abplattung wird größer, je näher wir an die Wand rücken.

Für das Azimuth φ eines Teilchens, von seiner stationären Lage aus gesehen, ergibt sich wieder die Gleichung (15), wo β durch β_1 zu ersetzen ist.

§ 13. Freie Oberfläche.

Wir behandeln schließlich in aller Kürze den Fall, wo die Schicht I von einer starren Grenzfläche, $z = -h^I$, begrenzt ist, während die Schicht II eine freie Oberfläche hat. Da diese mit einer Isobarenfläche zusammenfallen muß und die ungestörten Isobarenflächen nach § 5 horizontale Ebenen darstellen, deren Gleichung in der Form

$$P^{II} = -\varepsilon^{II} (g - 2 \Omega_y U^{II}) z + P_{z=0}^{II} \quad (1)$$

geschrieben werden kann, so können wir für die obere Grenzfläche, wie im letzten Paragraphen, $z = h^{II}$ setzen.

Die Integrale der Schicht I bleiben dieselben wie in dem vorigen Paragraphen, s. (12, 1):

$$\begin{aligned} u^I = & i C^I \cosh \alpha (z + h^I) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^I = & C^I \sinh \alpha (z + h^I) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^I = & \frac{\varepsilon^I i C^I}{\alpha} [(\beta - \alpha U^I) \cosh \alpha (z + h^I) + 2 \Omega_y \sinh \alpha (z + h^I)] e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Für die Schicht II müssen wir zu den vollständigen Integralen (7, 4) zurückkehren, indem dort $C''=0$ gesetzt wird. Die Gleichung der gestörten freien Oberfläche (4, 9) ergibt dann, unter Berücksichtigung von (1):

$$-\varepsilon^{\text{II}}(g-2\Omega_y U^{\text{II}})+P_{z=0}^{\text{II}}+ \\ +a\varepsilon^{\text{II}i}[(\beta-aU^{\text{II}}+2\Omega_y)C^{\text{II}}e^{\alpha h^{\text{II}}}-(\beta-aU^{\text{II}}-2\Omega_y)C^{\text{II}}e^{-\alpha h^{\text{II}}}]e^{i(\alpha x-\beta t)}+\text{const.}=0.$$

Aus der Grenzflächenbedingung an der freien Oberfläche (4, 10) ergibt sich entsprechend:

$$[(\beta-aU^{\text{II}})^2-ag+2\Omega_y\beta]C^{\text{II}}e^{\alpha h^{\text{II}}}=[(\beta-aU^{\text{II}})^2+ag-2\Omega_y\beta]C^{\text{II}}e^{-\alpha h^{\text{II}}}.$$

Durch Einführung einer neuen, willkürlichen Konstante \bar{C}^{II} , wo

$$\bar{C}^{\text{II}}=\frac{2C^{\text{II}}e^{\alpha h^{\text{II}}}}{(\beta-aU^{\text{II}})^2+ag-2\Omega_y\beta}=\frac{2C^{\text{II}}e^{-\alpha h^{\text{II}}}}{(\beta-aU^{\text{II}})^2-ag+2\Omega_y\beta}$$

ist, erhalten wir dann die folgenden Integrale, indem wir zukünftig wieder C^{II} anstatt \bar{C}^{II} schreiben:

$$u^{\text{II}}=iC^{\text{II}}[(\beta-aU^{\text{II}})^2\sinh\alpha(z-h^{\text{II}})+(ag-2\Omega_y\beta)\cosh\alpha(z-h^{\text{II}})]e^{i(\alpha x-\beta t)} \\ w^{\text{II}}=C^{\text{II}}[(\beta-aU^{\text{II}})^2\cosh\alpha(z-h^{\text{II}})+(ag-2\Omega_y\beta)\sinh\alpha(z-h^{\text{II}})]e^{i(\alpha x-\beta t)} \\ p^{\text{II}}=\frac{\varepsilon^{\text{II}i}C^{\text{II}}}{\alpha}\left\{[(\beta-aU^{\text{II}})^3+2\Omega_y(ag-2\Omega_y\beta)]\sinh\alpha(z-h^{\text{II}})+\right. \\ \left.+ \alpha(\beta-aU^{\text{II}})(g-2\Omega_yU^{\text{II}})\cosh\alpha(z-h^{\text{II}})\right\}e^{i(\alpha x-\beta t)}.$$

Mit den Integralen (2) und (3) folgt nun aus der Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche (6, 4):

$$-[g(\varepsilon^{\text{I}}-\varepsilon^{\text{II}})-2\Omega_y(\varepsilon^{\text{I}}U^{\text{I}}-\varepsilon^{\text{II}}U^{\text{II}})]z+\frac{i}{\alpha}\left\{\varepsilon^{\text{I}}C^{\text{I}}[(\beta-aU^{\text{I}})\cosh\alpha h^{\text{I}}+2\Omega_y\sinh\alpha h^{\text{I}}]+ \right. \\ \left. +\varepsilon^{\text{II}}C^{\text{II}}[(\beta-aU^{\text{II}})^3+2\Omega_y(ag-2\Omega_y\beta)]\sinh\alpha h^{\text{II}}- \right. \\ \left. -\varepsilon^{\text{II}}C^{\text{II}}\alpha(\beta-aU^{\text{II}})(g-2\Omega_yU^{\text{II}})\cosh\alpha h^{\text{II}}\right\}e^{i(\alpha x-\beta t)}=0.$$

Führen wir wieder die Amplitude Z der schwingenden Fläche ein, so haben wir auch

$$z=Ze^{i(\alpha x-\beta t)} \tag{4'}$$

als Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche.

Mittels dieser Gleichung und der Grenzflächenbedingung an der Diskontinuitätsfläche (6, 5') erhalten wir ferner:

$$C^{\text{I}}\sinh\alpha h^{\text{I}}=-i(\beta-aU^{\text{I}})Z \\ C^{\text{II}}[(\beta-aU^{\text{II}})^2\cosh\alpha h^{\text{II}}-(ag-2\Omega_y\beta)\sinh\alpha h^{\text{II}}]=-i(\beta-aU^{\text{II}})Z. \tag{5}$$

Einsetzen dieser Werte von C^{I} und C^{II} in (4) und Berücksichtigung von (4') gibt dann schließlich:

$$(\beta-aU^{\text{II}})^2[\varepsilon^{\text{I}}(\beta-aU^{\text{I}})^2\cotgh\alpha h^{\text{I}}\cotgh\alpha h^{\text{II}}+\varepsilon^{\text{II}}(\beta-aU^{\text{II}})^2]- \\ -\varepsilon^{\text{I}}(ag-2\Omega_y\beta)[(\beta-aU^{\text{I}})^2\cotgh\alpha h^{\text{I}}+(\beta-aU^{\text{II}})^2\cotgh\alpha h^{\text{II}}]+(\varepsilon^{\text{I}}-\varepsilon^{\text{II}})(ag-2\Omega_y\beta)^2=0. \tag{6}$$

Wenn die obere Schicht eine freie Oberfläche hat, wird also die Frequenzgleichung von vierter Ordnung. Eine Auflösung nach β ist deshalb mit erheblichem Rechnungsaufwand verbunden, und wir können bei dieser Gelegenheit nicht näher darauf eingehen.

Wir beschränken uns auf den Fall von unendlichen Schichtdicken, wobei $\cotgh\alpha h^{\text{I}}=\cotgh\alpha h^{\text{II}}=1$ zu setzen ist. Die Gleichung (6) gibt dann:

$$(\beta - a U^{\text{II}})^2 [\varepsilon^{\text{I}} (\beta - a U^{\text{I}})^2 + \varepsilon^{\text{II}} (\beta - a U^{\text{II}})^2] - \varepsilon^{\text{I}} (a g - 2 \Omega_y \beta) [(\beta - a U^{\text{I}})^2 + (\beta - a U^{\text{II}})^2] + (\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}) (a g - 2 \Omega_y \beta)^2 = 0,$$

oder in ihre zwei Faktoren aufgelöst:

$$[\varepsilon^{\text{I}} (\beta - a U^{\text{I}})^2 + \varepsilon^{\text{II}} (\beta - a U^{\text{II}})^2 - (\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}) (a g - 2 \Omega_y \beta)] [(\beta - a U^{\text{II}})^2 - (a g - 2 \Omega_y \beta)] = 0. \quad (7)$$

Die Wurzeln des ersten Faktors sind mit den Wurzeln der entsprechenden Frequenzgleichung (7, 9) identisch. Die Wurzeln des zweiten Faktors entsprechen einer Wellenbewegung in der oberen Schicht allein, die so verläuft, als ob die untere Schicht erstarrt wäre.

Eine entsprechende Zerlegung der Gleichung (6) erfolgt immer für eine unendliche, obere Schicht, wie auch die Dicke der unteren Schicht beschaffen ist. Die Gleichung schreibt sich dann:

$$[\varepsilon^{\text{I}} (\beta - a U^{\text{I}})^2 \cotgh a h^{\text{I}} + \varepsilon^{\text{II}} (\beta - a U^{\text{II}})^2 - (\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}) (a g - 2 \Omega_y \beta)] [(\beta - a U^{\text{II}})^2 - (a g - 2 \Omega_y \beta)] = 0. \quad (7')$$

Ist dagegen die obere Schicht von endlicher Dicke, wird eine entsprechende Zerlegung der Gleichung (6) in zwei Faktoren nicht mehr möglich sein. Es ist aber wahrscheinlich, daß die vier Wurzeln auch hier in zwei Gruppen von je zwei Wurzeln zerlegt werden können, die sich den bei unendlicher Dicke auftretenden Schwingungstypen ähnlich verhalten.

KAPITEL III.

Integration der Störungsgleichungen bei vertikaler Grenzfläche.

§ 14. Einleitende Bemerkungen.

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß die Integration der Störungsgleichungen verhältnismäßig einfach durchführbar ist, wenn die Diskontinuitätsfläche und die Isobarenflächen horizontale Ebenen sind, und der Rotationsvektor horizontal und senkrecht zu der Grundströmung gerichtet ist.

Die entwickelte Methode kann auch bei einem anderen Probleme zur Anwendung kommen, und zwar gelingt es dabei, in noch einfacherer Weise zum Ziele zu gelangen.

Es handelt sich um die Integration der Störungsgleichungen für zwei inkompressible Schichten I und II von den Dichten ε^{I} , ε^{II} und den konstanten Grundströmen U^{I} , U^{II} , wenn die Trennungsfäche *vertikal* ist. Die Schichten sollen von zwei starren, vertikalen Flächen im Abstände h^{I} und h^{II} von der Diskontinuitätsfläche begrenzt sein. Der Fall von unendlicher Dicke der Schichten ist darin mit einbegriffen.

Wenn wir dasselbe kartesische Koordinatensystem wie im vorigen Kapitel behalten, so lautet die Margules-Bjerknes'sche Formel (5, 6) für den Neigungswinkel Θ einer Diskontinuitätsfläche mit der Horizontalebene:

$$\operatorname{tg} \Theta = - \frac{2 \Omega_z (\varepsilon^{\text{I}} U^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}} U^{\text{II}})}{g (\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^{\text{I}} U^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}} U^{\text{II}})}.$$

Sollen hier unendliche Werte der Konstanten im Zähler ausgeschlossen werden, so ist die Bedingung für das Auftreten einer vertikalen Diskontinuitätsfläche durch das Verschwinden des Nenners gegeben. Es muß folglich

$$g (\varepsilon^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}}) = 2 \Omega_y (\varepsilon^{\text{I}} U^{\text{I}} - \varepsilon^{\text{II}} U^{\text{II}}) \quad (1)$$

sein. Ein Spezialfall von (1) liegt vor, wenn sowohl die rechte als auch die linke Seite verschwindet. Es muß dann entweder

$$\varepsilon^I = \varepsilon^{II} = \varepsilon, \quad \Omega_y = 0 \tag{2}$$

oder

$$\varepsilon^I = \varepsilon^{II} = \varepsilon, \quad U^I = U^{II} = U \tag{2'}$$

sein. Der letztere Fall ist von geringerem Interesse, da eigentlich keine Diskontinuitätsfläche mehr vorhanden ist. Im ersteren Falle besteht aber noch ein Windsprung, wenn auch der Dichteunterschied verschwunden ist.

Setzen wir hier außerdem voraus, daß $\Omega_x = 0$ ist, so wird der Rotationsvektor vertikal, und die Störungsbewegung kann dann zweidimensional, in der Horizontalebene, verlaufen. Der Spezialfall (2') wie auch der allgemeine Fall (1) führen dagegen auf dreidimensionale Bewegung. Wir werden uns deshalb im Folgenden auf den Fall (2) beschränken, während die anderen Fälle im nächsten Kapitel zur Untersuchung kommen werden.

Die Gleichungen der Grundströmung bleiben dieselben wie im vorigen Kapitel (§ 5). Die Isobarenflächen sind also wieder durch (5, 2) gegeben, oder, indem $\Omega_x = 0$ ist, durch die Gleichung:

$$P = -2\Omega_z \varepsilon U y - \varepsilon g z + P_0; \tag{3}$$

sie sind also parallele Ebenen, deren Neigung zu der Horizontalebene durch

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{2\Omega_z U}{g}$$

gegeben ist.

Die Gleichung der ungestörten vertikalen Diskontinuitätsfläche lautet dann nach (5, 3):

$$P^I - P^{II} = -2\Omega_z \varepsilon (U^I - U^{II}) y = 0. \tag{4}$$

§ 15. Die Störungsgleichungen und ihre Integration.

Für die zweidimensionale Störung, die von der z -Koordinate unabhängig vorausgesetzt werden soll, ergeben sich aus (6, 1—2) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) u - 2\Omega_z v &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) v + 2\Omega_z u &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Bewegungsgleichungen (6, 3) zeigt nun, daß diese Gleichungen aus jenen durch die Transformation

$$y \rightarrow z, \quad z \rightarrow -y \tag{2}$$

hervorgehen werden. Denn dabei ergibt sich ja auch:

$$\Omega_y \rightarrow \Omega_z, \quad w \rightarrow -v.$$

Wir können deshalb die in dem vorigen Kapitel erhaltenen Resultate mit geringer Modifikation auch auf dieses neue Problem anwenden. In dieser Weise erhalten wir aus (12, 5), indem wir $\varepsilon^I = \varepsilon^{II} = \varepsilon$ und $\beta = \alpha c$ setzen:

$$(c - U^I)^2 \operatorname{cotgh} \alpha h^I + (c - U^{II})^2 \operatorname{cotgh} \alpha h^{II} = 0, \tag{3}$$

oder nach c aufgelöst:

$$\left. \begin{matrix} c \\ c' \end{matrix} \right\} = \frac{U^I \operatorname{cotgh} \alpha h^I + U^{II} \operatorname{cotgh} \alpha h^{II} \pm i(U^I - U^{II}) \sqrt{\operatorname{cotgh} \alpha h^I \operatorname{cotgh} \alpha h^{II}}}{\operatorname{cotgh} \alpha h^I + \operatorname{cotgh} \alpha h^{II}}. \tag{4}$$

Für unendliche Schichten ist $\cotgh \alpha h^I = \cotgh \alpha h^{II} = 1$, wodurch sich ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} c \\ c' \end{array} \right\} = \frac{U^I + U^{II}}{2} \pm i \frac{U^I - U^{II}}{2}. \quad (5)$$

Diese Gleichung wird übrigens immer für $h^I = h^{II}$ bestehen, d. h. wenn die zwei Schichten dieselbe Dicke haben, wenn auch dieselbe endlich sei.

Aus (4) folgt, daß es niemals zwei verschiedene, reelle Wurzeln vorkommen können. Die angenommene Grundströmung mit einer vertikalen Diskontinuitätsfläche stellt also immer eine labile Schichtung dar.

Wir haben deshalb nur zwei verschiedene Fälle zu untersuchen, je nachdem (3) eine Doppelwurzel oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln hat, d. h. je nachdem $U^I = U^{II}$ oder $U^I \neq U^{II}$ ist.

(a) Im ersteren Falle setzen wir $U^I = U^{II} = U$ in (4) ein und erhalten $c = c' = U$. Die Wellen pflanzen sich also mit der Geschwindigkeit des Grundstromes fort.

Aus (12, 11) ergibt sich dann, indem die Transformation (2) Anwendung findet: für die gestörte Grenzfläche:

$$y = (Y + Vt) \cos \alpha x, \quad (6)$$

wo die Anfangsamplitude und deren Änderungsgeschwindigkeit relativ zu der bewegten Fläche mit Y und V bezeichnet sind;

für die Wellenbewegung, indem sämtliche Glieder mit dem Faktor $c - U$ verschwinden:

$$\begin{aligned} u &= V \sin \alpha (x - Ut) \frac{\cosh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} \\ v &= -V \cos \alpha (x - Ut) \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} \\ p &= -\varepsilon \frac{2 \Omega_z}{\alpha} V \sin \alpha (x - Ut) \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned} \quad (7)$$

Für die zwei Schichten sind $h = h^I$, bzw. $-h^{II}$ zu setzen.

Die Gleichung der Stromlinien wird nach (12, 12):

$$-V \sin \alpha (x - Ut) \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} = \psi, \quad (8)$$

und die Gleichung der Orbitalbahn nach (12, 13):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (Y + Vt) \sin \alpha x_0 \frac{\cosh \alpha (y_0 - h)}{\sinh \alpha h} \\ y - y_0 &= -(Y + Vt) \cos \alpha x_0 \frac{\sinh \alpha (y_0 - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Hieraus folgt:

$$\cotg \varphi = -\tg \alpha x_0 \cotgh \alpha (y_0 - h); \quad (10)$$

die Bahn ist folglich eine Gerade, deren Neigungswinkel mit der x -Achse von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ variiert, wenn x_0 von 0 bis $\frac{\pi}{\alpha}$ geht.

In diesem Falle ($\varepsilon^I = \varepsilon^{II}$, $U^I = U^{II}$) liegt keine Diskontinuitätsfläche vor, da ja eigentlich nur eine einzige Schicht vorhanden ist. Wenn aber durch irgendeine äußere Ursache für einen Augenblick eine kleine Unstetigkeit der Dichte- oder Windverteilung in der Flüssigkeitsschicht auftreten sollte, so würde dieselbe nicht zu gleicher Zeit wie die Impulse erlöschen, sondern mit der Zeit beständig wachsen.

Bei unendlichen Schichtdicken werden die hyperbolischen Funktionen in den Formeln (7—10) in Exponentialausdrücke übergehen. Wir erhalten dann (für $\Omega_z = 0$) diejenigen

Formeln, die der Rayleigh'schen Erläuterung des Flatterns von Segeln und Fahnen zugrunde liegen.

(b) Für $U^I \neq U^{II}$ ergibt sich nach (4):

$$c_1 = \frac{U^I a^I + U^{II} a^{II}}{a^I + a^{II}}, \quad c_2 = (U^I - U^{II}) \frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a^I + a^{II}}, \quad (11)$$

wo zur Abkürzung

$$a^I = \cotgh \alpha h^I, \quad a^{II} = \cotgh \alpha h^{II}$$

eingeführt worden sind. Hieraus folgt nun:

$$c_1 - U = -(U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})}.$$

Mit diesen Werten ergibt sich aus den Gleichungen (12, 16), unter Anwendung der Transformation (2):

für die gestörte Grenzfläche:

$$y = (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t); \quad (12)$$

für die Wellenbewegung:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{a^I a^{II}} \alpha \frac{U^I - U^{II}}{a^I + a^{II}} \left[\frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a} (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + (Y e^{\beta_2 t} - Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha (x - c_1 t) \right] \frac{\cosh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} \\ v &= \sqrt{a^I a^{II}} \alpha \frac{U^I - U^{II}}{a^I + a^{II}} \left[\frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a} (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha (x - c_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - (Y e^{\beta_2 t} - Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t) \right] \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} \\ p &= -\alpha \varepsilon \frac{(U^I - U^{II})^2}{(a^I + a^{II})^2} a^I a^{II} \left[\left(\frac{a^I a^{II}}{a^2} - 1 \right) (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a} (Y e^{\beta_2 t} - Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha (x - c_1 t) \right] \frac{\cosh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} - \left[\frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a} (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + (Y e^{\beta_2 t} - Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha (x - c_1 t) \right] 2 \Omega_2 \varepsilon \frac{U^I - U^{II}}{a^I + a^{II}} \sqrt{a^I a^{II}} \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Hier sind wieder $a = a^I$, $h = h^I$, bzw. $-a^{II}$, $-h^{II}$ zu setzen.

Die Gleichung der Stromlinien wird nach (12, 17):

$$\begin{aligned} -\sqrt{a^I a^{II}} \frac{U^I - U^{II}}{a^I + a^{II}} \left[\frac{\sqrt{a^I a^{II}}}{a} (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha (x - c_1 t) + \right. \\ \left. + (Y e^{\beta_2 t} - Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha (x - c_1 t) \right] \frac{\sinh \alpha (y - h)}{\sinh \alpha h} = \Psi, \end{aligned} \quad (14)$$

und die Gleichung der Orbitalbahn nach (12, 18):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \sin \alpha \left[x_0 + (U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})} t \right] \frac{\cosh \alpha (y_0 - h)}{\sinh \alpha h} \\ y - y_0 &= -(Y e^{\beta_2 t} + Y' e^{-\beta_2 t}) \cos \alpha \left[x_0 + (U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})} t \right] \frac{\sinh \alpha (y_0 - h)}{\sinh \alpha h}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Orbitalbahn kann wieder als Summe von zwei, in der y -Richtung abgeplatteten logarithmischen Spiralen dargestellt werden. Die Abplattung wird größer, je näher wir an die Wand rücken.

Das Azimuth φ eines Teilchens, von seiner stationären Lage aus gesehen, ergibt sich nach (12, 15) aus:

$$\cotg \varphi = -\tg \alpha \left[x_0 + (U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})} t \right] \cotgh \alpha (y_0 - h). \quad (16)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{2} (U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})} \frac{\sinh 2\alpha(y_0 - h)}{\sinh^2 \alpha(y_0 - h) + \sin^2 \alpha \left[x_0 + (U^I - U^{II}) \frac{a^I a^{II}}{a(a^I + a^{II})} t \right]}.$$

Die Umlaufsrichtung eines Teilchens in seiner Orbitalbahn ist folglich in beiden Massen dieselbe und ist durch das Vorzeichen von $U^{II} - U^I$ gegeben.

Fig. 6 gibt in Horizontalprojektion die Form einer vertikalen, instabilen Grenzfläche (dicke, gestrichelte Linie) und der Stromlinien (voll ausgezogene Linien) zu zwei verschiedenen Zeiten. Der Einfachheit halber haben wir nur unendliche Schichten betrachtet, wodurch $a^I = a^{II} = 1$ zu setzen ist; ferner sind die Grundströme entgegengesetzt und vom selben Betrag gewählt worden, indem $U^I = -U^{II} = U$ ist. Aus (11) folgt dann $c_1 = 0$, $c_2 = U$; die Störung pflanzt sich also nicht der Fläche entlang, sondern bleibt am Orte liegen und wächst mit der Zeit.

Im Anfangsmomente $t=0$ soll die ungestörte Lage der Grenzfläche vorhanden sein; aus (12) folgt dann:

$$Y = -Y', \quad (17)$$

wodurch die Gleichung der gestörten Grenzfläche folgendermaßen lautet:

$$y = 2 Y \sinh \alpha U t \cos \alpha x. \quad (18)$$

Für unendliche Schichten ergeben sich ferner:

$$\lim_{h \rightarrow \pm \infty} \frac{\cosh \alpha(y-h)}{\sinh \alpha h} = \pm e^{\mp \alpha y}, \quad \lim_{h \rightarrow \pm \infty} \frac{\sinh \alpha(y-h)}{\sinh \alpha h} = -e^{\mp \alpha y};$$

die Wellenbewegung (13) reduziert sich deshalb auf:

$$\begin{aligned} u &= 2 U Y \alpha [\sinh \alpha U t \cos \alpha x \pm \cosh \alpha U t \sin \alpha x] e^{\mp \alpha y} \\ v &= 2 U Y \alpha [\mp \sinh \alpha U t \sin \alpha x + \cosh \alpha U t \cos \alpha x] e^{\mp \alpha y} \\ p &= 4 U Y \varepsilon [-(\alpha U - \Omega_z) \cosh \alpha U t \sin \alpha x \pm \Omega_z \sinh \alpha U t \cos \alpha x] e^{\mp \alpha y}, \end{aligned} \quad (19)$$

wo die oberen Vorzeichen der Schicht I und die unteren Vorzeichen der Schicht II entsprechen. Diese Gleichungen können übrigens auch unmittelbar aus (11, 7) unter Anwendung der Transformation (2) erhalten werden.

Für die Gleichung der Stromlinien ergibt sich in ähnlicher Weise aus (14):

$$\begin{aligned} \Psi^I &= 2 U Y (\sinh \alpha U t \cos \alpha x + \cosh \alpha U t \sin \alpha x) e^{-\alpha y}, \\ \Psi^{II} &= 2 U Y (-\sinh \alpha U t \cos \alpha x + \cosh \alpha U t \sin \alpha x) e^{\alpha y}. \end{aligned} \quad (20)$$

Es bestehen folglich die Relationen:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Diese Stromfunktion ist in der Figur als gestrichelte Kurven angegeben; durch graphische Addition der den Grundströmen entsprechenden Stromfunktion (gestrichelte, horizontale Linien), deren Gleichung durch $\mp U y = \text{const.}$ gegeben ist, erhalten wir dann die vollständigen Stromlinien von der Gleichung $\Psi \mp U y = \text{const.}$ Mit der getroffenen Wahl der Richtung des Grundstromes ergibt diese Addition verstärkte antizyklonale und abgeschwächte zyklonale Zirkulation.

Fig. 6a gibt die Stromlinien um eine ebene Grenzfläche im Anfangsmomente $t=0$. Es sind die Richtungen der x - und der y -Achse nach rechts, bzw. nach oben gewählt worden, wodurch die Schicht oberhalb der Grenzfläche (für $y > 0$) die Bezeichnung I erhält. Der Grundstrom in der Schicht I soll positiv sein, also nach rechts gehen.

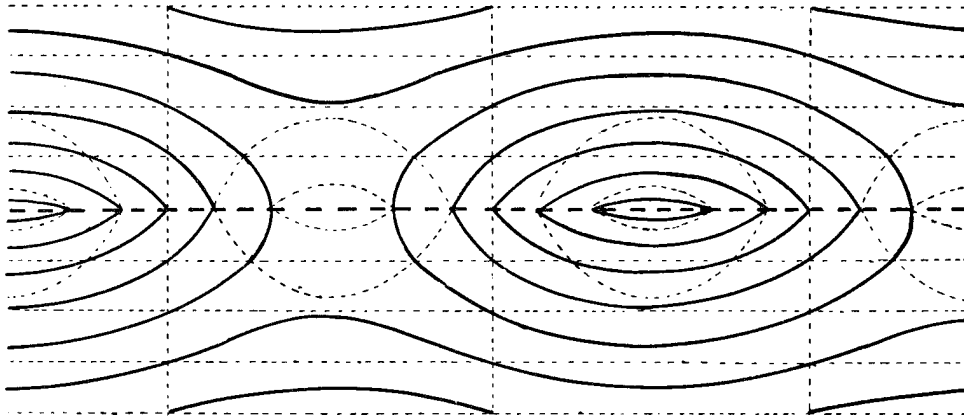


Fig. 6a.

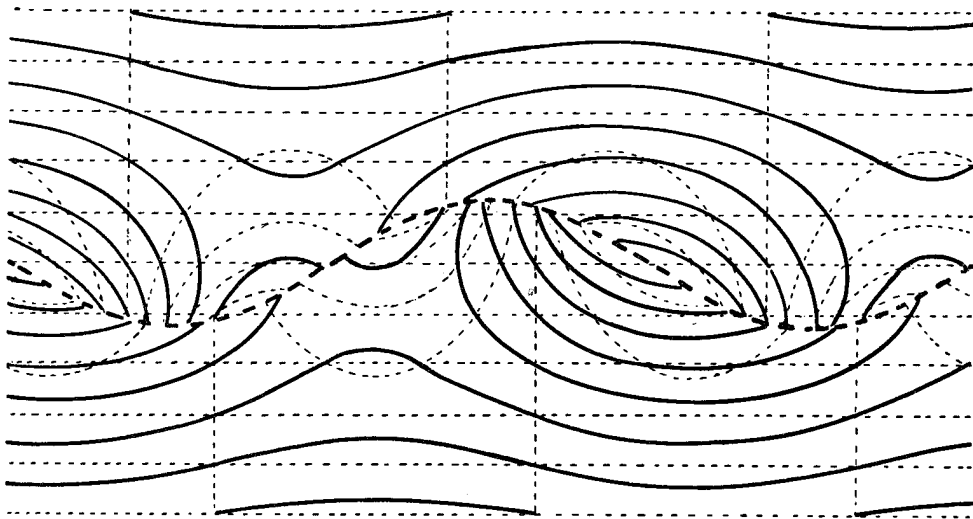


Fig. 6 b.

Die Stromfunktion der Störungsbewegung ist nach (20) durch

$$\Psi = 2 U Y \sin \alpha x e^{\mp \alpha y}$$

gegeben (oberes Vorzeichen in Schicht I); sie hat dieselbe Phase in beiden Schichten, wodurch die gestrichelten, vertikalen Geraden, die dem Werte $\Psi=0$, d. h. $x=k\pi$ entsprechen, hier zusammenfallen werden. Die Stromlinien in den zwei Schichten liegen deshalb symmetrisch zueinander, mit der x -Achse als Symmetrielinie.

Fig. 6 b gibt die Verhältnisse an demselben Abschnitt der Diskontinuitätsfläche zu einer späteren Zeit, wenn $\sinh \alpha U t = 1$ geworden ist. Die Grenzfläche, deren Gleichung nach (18) jetzt durch

$$y = 2 Y \cos \alpha x$$

gegeben ist, hat dann eine ausgeprägte Sinusform erhalten. Gleichzeitig mit dem Anwachsen der Amplitude hat auch eine Zunahme der Geschwindigkeit stattgefunden; der Betrag derselben ergibt sich aus dem Gradienten der voll ausgezogenen Stromlinien.

Die Stromfunktion Ψ der Störungsbewegung hat jetzt verschiedene Phasen in den zwei Schichten; die vertikalen Geraden (Äquiskalarkurven für $\Psi=0$) erscheinen gegen-

einander verschoben, und zwar sind sie im Verhältnis zu ihrer Anfangslage für $t=0$ in der Schicht I nach links, in der Schicht II nach rechts gerückt. Der Phasenunterschied wächst mit der Zeit, um zuletzt für $t=\infty$ ein Viertel der Wellenlänge zu betragen. Dann haben aber die Formeln schon längst ihre Gültigkeit verloren. Selbst die Fig. 6 b scheint außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Formeln zu liegen. Streng genommen können ja die Formeln nur für unendlich kleine Amplituden verwendet werden; wenn aber Wellenberge und Wellentäler vorhanden sind, dann wird die Gleichung (20) Äquisikalarkurven ergeben, die, bis an der Fläche extrapoliert, zu nahe aneinander auf der einen Seite der Fläche und zu weit auseinander auf der anderen Seite kommen werden, um die physikalisch notwendige Gleichheit der Normalenkomponenten der Geschwindigkeit zu beiden Seiten einer Diskontinuitätsfläche erfüllen zu können. Diese Tatsache muß bei Betrachtung der Fig. 6 b in Erinnerung gehalten werden.

Hätten wir anstatt (17) z. B. $Y'=0$ gewählt, so würde die entsprechende Stromfunktion immer dieselbe Phase in beiden Schichten haben.

KAPITEL IV.

Integration der Störungsgleichungen für schräggestellte, parallele Schichten.

§ 16. Der stationäre Zustand.

In den Kapiteln II und III haben wir die einfachen Spezialfälle behandelt, wo der Rotationsvektor Ω erstens senkrecht zu dem stationären Strom steht und zweitens in der Diskontinuitätsfläche liegt. Nach diesen orientierenden Untersuchungen werden wir jetzt zu dem generellen Falle übergehen, wo der Rotationsvektor einen beliebigen Winkel mit dem stationären Strom und mit der Diskontinuitätsfläche bildet.

Wegen der Coriolis-Beschleunigung wird dann die Wellenbewegung in *drei* Dimensionen vor sich gehen.

Es hat sich gezeigt, daß die Durchführung der Rechnungen sehr erleichtert wird, wenn die Diskontinuitätsfläche als die eine Koordinatenebene gewählt wird. Anstatt der früher verwendeten Koordinaten x, y, z , die zur Schwerkraft orientiert waren, führen wir folglich neue Koordinatenachsen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ein, die aus x, y, z durch die Transformation:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \cos \Theta + z \sin \Theta \\ \bar{z} &= -y \sin \Theta + z \cos \Theta\end{aligned}\quad (1)$$

hervorgehen. Dabei ist Θ die Neigung der Diskontinuitätsfläche gegen die Horizontalebene. \bar{y} liegt dann in die Diskontinuitätsfläche, während \bar{z} senkrecht dazu steht. Im folgenden werden wir, der Einfachheit halber, das Zeichen »Überstrichen« weglassen.

Bei der Projektion der Vektorgleichung (5, 1) für den stationären Strom auf diesen neuen kartesischen Achsen erhalten wir die folgenden Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P}{\partial x} \\ g_y + 2\Omega_z U &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P}{\partial y} \\ g_z - 2\Omega_y U &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\quad (2)$$

Durch Integration folgt hieraus unmittelbar die Gleichung der ebenen Isobarenflächen:

$$P = -\varepsilon(g_y + 2\Omega_z U)y - \varepsilon(g_z - 2\Omega_y U)z + P_0.$$

Da diese Gleichung sowohl für die Masse I als auch für die Masse II gelten muß, so ergibt sich für die Diskontinuitätsfläche, die durch $P^I - P^{II} = 0$ charakterisiert ist, die folgende Gleichung:

$$P^I - P^{II} = -[g_y(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2\Omega_z(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})]y + [-g_z(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2\Omega_y(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})]z = 0.$$

Nun soll aber diese Fläche mit der xy -Ebene zusammenfallen; es muß folglich

$$g_y(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2\Omega_z(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II}) = 0 \tag{3}$$

sein, und es bleibt übrig:

$$P^I - P^{II} = [-g_z(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2\Omega_y(\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})]z = 0 \tag{4}$$

oder auch

$$F = z = 0, \tag{4'}$$

als Gleichung der Diskontinuitätsfläche.

Die Gleichung (3) ist mit der erweiterten Margules'schen Formel (5,6) identisch, wie man durch Transformation auf die früheren Koordinaten mittels (1) sofort erkennt.

§ 17. Die Störungsgleichungen.

Die Komponenten der vektoriellen Störungsgleichungen (6, 1—2) längs den drei Achsen x, y, z lauten, wenn die Geschwindigkeitskomponenten längs diesen Achsen mit u, v, w bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)u - 2\Omega_z v + 2\Omega_y w &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)v - 2\Omega_x w + 2\Omega_z u &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)w - 2\Omega_y u + 2\Omega_x v &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Durch Hinzufügung der Indizes I und II wird angedeutet, daß diese Gleichungen für beide Schichten Gültigkeit besitzen.

Die Grenzflächenbedingungen bleiben dieselben wie in § 6. Sie lauten:

(1) An einer festen Grenzfläche, die der Diskontinuitätsfläche parallel sein soll, und folglich die Gleichung $z=h$ hat, muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden, d. h. es muß

$$w_h = 0 \tag{3}$$

sein.

(2a) An der Diskontinuitätsfläche von der Gleichung:

$$P^I - P^{II} + p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II} = 0 \tag{4}$$

muß

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^I\frac{\partial}{\partial x}\right)(p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II}) + w_{z=0}^I\frac{\partial}{\partial z}(P^I - P^{II}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{II}\frac{\partial}{\partial x}\right)(p_{z=0}^I - p_{z=0}^{II}) + w_{z=0}^{II}\frac{\partial}{\partial z}(P^I - P^{II}) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

sein.

(2 b) An einer Diskontinuitätsfläche von der Gleichung:

$$F + f_{z=0} = 0 \quad (4)$$

muß

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^I \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{z=0} + w_{z=0}^I \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (5')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{z=0} + w_{z=0}^{II} \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

sein.

§ 18. Integration der Störungsgleichungen.

Wir betrachten eine periodische Störung, die sich der x -Achse entlang fortpflanzt und außerdem von der y -Koordinate unabhängig ist. Wir gehen also mit den Ansätzen

$$\begin{aligned} u &= A e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ v &= B e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ w &= C e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ p &= \varepsilon D e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \end{aligned} \quad (1)$$

in die Differentialgleichungen (1—2) des vorigen Paragraphen hinein, wodurch wir für die Konstanten A, B, C, D das folgende System von vier linearen Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} -i(\beta - \alpha U)A - 2\Omega_z B + 2\Omega_y C &= -i\alpha D \\ 2\Omega_z A - i(\beta - \alpha U)B - 2\Omega_x C &= 0 \\ -2\Omega_y A + 2\Omega_x B - i(\beta - \alpha U)C &= -\delta D \\ i\alpha A + \delta C &= 0 \end{aligned}$$

Damit die Konstanten nicht identisch verschwinden sollen, muß die Determinante ihrer Koeffizienten identisch gleich Null sein. Durch Ausrechnung erhalten wir hieraus die quadratische Relation

$$(\beta - \alpha U)^2 (\alpha^2 - \delta^2) + (2\Omega_x \alpha i + 2\Omega_z \delta)^2 = 0 \quad (2)$$

zwischen den Parametern α, β, δ . Es ist bemerkenswert, daß Ω_y hier nicht eingeht.

Werden α und β als bekannt betrachtet, so ergeben sich durch Auflösung von (2) nach δ zwei verschiedene Werte:

$$\left. \begin{aligned} \delta \\ \delta' \end{aligned} \right\} = \frac{4\Omega_x \Omega_z \alpha i \pm \alpha(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}, \quad (2')$$

wo δ dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel und δ' dem negativen Vorzeichen entsprechen.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad \delta' = -\delta_1 + i\delta_2, \quad (3)$$

wo

$$\delta_1 = \frac{\alpha(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}, \quad \delta_2 = \frac{4\Omega_x \Omega_z \alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2} \quad (4)$$

sind.

Für $\Omega_x = \Omega_z = 0$ erhalten wir aus (2) die entsprechende Gleichung (7, 2) wieder; die Bewegung ist dann zweidimensional, wie sie schon in den Spezialfällen untersucht worden ist.

Der nächst einfache Fall tritt ein, wenn eine dieser Rotationskomponenten verschwindet, indem dann $\delta_2 = 0$ wird. So erhalten wir für $\Omega_x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \delta \\ \delta' \end{aligned} \right\} = \pm \delta_1 = \pm \frac{\alpha(\beta - \alpha U)}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}},$$

und für $\Omega_z=0$:

$$\left. \begin{matrix} \delta \\ \delta' \end{matrix} \right\} = \pm \delta_1 = \pm \frac{\alpha}{\beta - \alpha U} \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2} .$$

In beiden Fällen werden folglich δ und δ' entgegengesetzte Werte annehmen.

Mit dem Werte (2') für δ erhalten wir für die Konstanten, indem dieselben wieder durch C ausgedrückt werden:

$$A = \frac{-4 \Omega_x \Omega_z + i(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} C$$

$$B = \frac{2 \Omega_x i(\beta - \alpha U) + 2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} C$$

$$D = \frac{i}{\alpha} \left(2 \Omega_y + \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \right) C .$$

Hier ist das positive Vorzeichen vor der Wurzel gewählt worden. Wir können aber auch das negative Vorzeichen wählen und erhalten dann entsprechende Formeln, diesmal mit C' als neue willkürliche Konstante.

Es ergeben sich folglich zwei partikuläre Integrale der Form (1); das allgemeine Integral als Summe dieser zwei lautet dann:

$$u = \left[\frac{4 \Omega_x \Omega_z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (C e^{\delta_1 z} + C' e^{-\delta_1 z}) + \frac{i(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (C e^{\delta_1 z} - C' e^{-\delta_1 z}) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}$$

$$v = \left[\frac{2 \Omega_x i(\beta - \alpha U)}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (C e^{\delta_1 z} + C' e^{-\delta_1 z}) + \frac{2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (C e^{\delta_1 z} - C' e^{-\delta_1 z}) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \tag{5}$$

$$w = (C e^{\delta_1 z} + C' e^{-\delta_1 z}) e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}$$

$$p = \frac{\varepsilon i}{\alpha} \left[2 \Omega_y (C e^{\delta_1 z} + C' e^{-\delta_1 z}) + \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} (C e^{\delta_1 z} - C' e^{-\delta_1 z}) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} .$$

Es ist hier zu beachten, daß Ω_y nur im Drucke eingeht. Sehr bemerkenswert ist es auch, daß diese Bewegung nicht mehr wirbelfrei ist, wie es bei den speziellen, zwei-dimensionalen Störungsbewegungen der Fall gewesen ist.

Die Integrale (5) enthalten vier willkürliche Konstanten: α , β , C und C' . Damit die Bewegung eindeutig festgelegt werden kann, müssen dann noch gewisse Relationen zwischen diesen Konstanten gegeben oder gefunden werden. Diese Relationen ergeben sich nun aus den vorhandenen Grenzflächenbedingungen.

Wir berücksichtigen zuerst die Randbedingungen an den starren Grenzflächen. Wenn die Gleichungen derselben durch $z = -h^I$ und $z = h^{II}$ gegeben sind, so gibt die Randbedingung (17, 3): $w_{z=-h^I} = 0$ und $w_{z=h^{II}} = 0$; aus (5) folgt dann:

$$C^I e^{-\delta_1^I h^I} + C^{II} e^{\delta_1^I h^I} = 0$$

$$C^{II} e^{\delta_1^{II} h^{II}} + C^{II} e^{-\delta_1^{II} h^{II}} = 0 . \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich ferner:

$$C^I - C^{II} = \cotgh \delta_1^I h^I \cdot (C^I + C^{II})$$

$$C^{II} - C^{II} = -\cotgh \delta_1^{II} h^{II} \cdot (C^{II} + C^{II}) , \tag{6'}$$

in welcher Form wir die aus den Randbedingungen erhaltene Relation zwischen C und C' verwenden werden.

Aus der Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche (17, 4) ergibt sich ferner wegen der Gleichung der ungestörten Diskontinuitätsfläche (16, 4) und der Integrale (5):

$$\begin{aligned} & [-g_z (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] z + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon^I i}{\alpha} [2 \Omega_y (C^I + C'^I) + \sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} (C^I - C'^I)] - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon^{II} i}{\alpha} [2 \Omega_y (C^{II} + C'^{II}) + \sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} (C^{II} - C'^{II})] \right\} e^{i(\alpha x - \beta t)} = 0. \end{aligned}$$

Wenn hier zur Abkürzung die Amplitude der schwingenden Fläche mit Z bezeichnet wird, wodurch die Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche in der Form

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (7)$$

erscheint, so ergibt sich aus der obigen Gleichung, indem noch (6') Anwendung findet:

$$\begin{aligned} & [-g_z (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) + 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] Z + \\ & + \frac{\varepsilon^I i}{\alpha} [2 \Omega_y + \sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \operatorname{cotgh} \delta_1^I h^I] (C^I + C'^I) - \\ & - \frac{\varepsilon^{II} i}{\alpha} [2 \Omega_y - \sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \operatorname{cotgh} \delta_1^{II} h^{II}] (C^{II} + C'^{II}) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Die Grenzflächenbedingung an der Diskontinuitätsfläche (7) gibt schließlich nach (17, 5') unter Berücksichtigung von (16, 4') und (5):

$$\begin{aligned} C^I + C'^I &= -i (\beta - \alpha U^I) Z \\ C^{II} + C'^{II} &= -i (\beta - \alpha U^{II}) Z. \end{aligned} \quad (9)$$

Das Einsetzen dieser Werte von $C + C'$ in (8) gibt dann, wenn Z von Null verschieden ist, die folgende Frequenzgleichung:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^I (\beta - \alpha U^I) \sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \operatorname{cotgh} \delta_1^I h^I + \\ & + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II}) \sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \operatorname{cotgh} \delta_1^{II} h^{II} = \\ & = (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) (\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta). \end{aligned} \quad (10)$$

Diese transzendente Gleichung zwischen α und β spielt eine fundamentale Rolle bei den Wellenbewegungen, die uns in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels beschäftigen werden.

Wir machen sofort darauf aufmerksam, daß sich die Gleichung (10) für $\Omega_x = \Omega_z = 0$ auf die entsprechende Gleichung (12, 5) für zweidimensionale Bewegung reduziert.

Bevor wir zur Diskussion dieser Gleichung übergehen, werden wir in die Integrale (5) die Amplitude Z anstatt C als willkürliche Konstante einführen. Unter Berücksichtigung von (6) und (9) ergeben sich für die in den Integralen vorkommenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} C e^{\delta_1 z} + C' e^{-\delta_1 z} &= \frac{i(\beta - \alpha U) Z}{\sinh \delta_1 h} \sinh \delta_1 (z - h) \\ C e^{\delta_1 z} - C' e^{-\delta_1 z} &= \frac{i(\beta - \alpha U) Z}{\sinh \delta_1 h} \cosh \delta_1 (z - h). \end{aligned}$$

In (5) eingeführt, erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} [4 \Omega_x \Omega_z i \sinh \delta_1 (z - h) + \\
 &\quad + (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\
 v &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} [-2 \Omega_x (\beta - \alpha U) \sinh \delta_1 (z - h) + \\
 &\quad + 2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} i \cosh \delta_1 (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \quad (11) \\
 w &= \frac{i(\beta - \alpha U) Z}{\sinh \delta_1 h} \sinh \delta_1 (z - h) e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\
 p &= -\varepsilon \frac{(\beta - \alpha U) Z}{\alpha \sinh \delta_1 h} [2 \Omega_y \sinh \delta_1 (z - h) + \\
 &\quad + \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}.
 \end{aligned}$$

Für die Schicht I sollen hier $\varepsilon = \varepsilon^I$, $U = U^I$, $\delta_1 = \delta_1^I$, $\delta_2 = \delta_2^I$, $h = h^I$, und für die Schicht II sollen $\varepsilon = \varepsilon^{II}$, $U = U^{II}$, $\delta_1 = \delta_1^{II}$, $\delta_2 = \delta_2^{II}$, $h = h^{II}$ gesetzt werden.

Wie gewöhnlich, ist von diesen Ausdrücken nur der reelle Teil zu behalten.

Die in den Gleichungen (11) verwendete Form der Integrale wird sich in den meisten Fällen als hinreichend erweisen. Für spezielle Werte der Parameter wird es aber vorkommen können, daß die Koeffizienten eine unbestimmte Form annehmen. Dies wird z. B. der Fall sein, wenn $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_z^2$ wird. Der Nenner in den obigen Ausdrücken für u und v wird dann gleich Null; um endliche Geschwindigkeitskomponenten behalten zu können, müssen dann auch die Zähler für diesen speziellen Wert der Parameter verschwinden, was durch Einführung einer neuen willkürlichen Konstante anstatt Z bewirkt werden kann.

Aus den Gleichungen (11) erhalten wir schließlich in der üblichen Weise die folgenden Komponenten der Orbitalbahn eines Flüssigkeitsteilchens:

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= \frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} [4 \Omega_x \Omega_z \sinh \delta_1 (z - h) - \\
 &\quad - (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} i \cosh \delta_1 (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\
 y - y_0 &= -\frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} [2 \Omega_x (\beta - \alpha U) i \sinh \delta_1 (z - h) + \\
 &\quad + 2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z - h)] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \quad (12) \\
 z - z_0 &= -\frac{Z}{\sinh \delta_1 h} \sinh \delta_1 (z - h) e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}.
 \end{aligned}$$

Eine genaue Diskussion der Störungsbewegung (11) und der Orbitalbahn (12) kann erst nach einer Zerlegung der Gleichungen in ihre reellen und imaginären Teile ausgeführt werden. Dies wird nun erst nach einer vollständigen Diskussion der Frequenzgleichung (10) möglich sein und kann deshalb an dieser Stelle nicht durchgeführt werden. Bei den in den folgenden Paragraphen auszuführenden Untersuchungen einiger Spezialfälle der hier gegebenen, generellen Theorie soll aber die Diskussion der Formeln (10—12) mit den in jedem Falle stattfindenden Vereinfachungen ausgeführt werden.

Aus den Gleichungen (11) und (12) in der komplexen Schreibweise läßt sich aber ein generelles Resultat ermitteln, das hier sogleich mitgeteilt werden soll.

Durch Multiplikation der drei Komponentengleichungen bzw. mit
 $2 \Omega_x \sinh^2 \delta_1 (z-h)$, $-\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \sinh \delta_1 (z-h) \cosh \delta_1 (z-h)$ und
 $2 \Omega_z \left[\cosh^2 \delta_1 (z-h) - \frac{4 \Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right]$

und nachfolgende Addition ergibt sich nämlich eine identisch verschwindende lineare Kombination der Komponenten, indem sowohl der reelle wie auch der komplexe Teil des Koeffizienten rechts gleich Null werden.

Wir schreiben diese Relation in der Form:

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0.$$

Wenn hier $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ eingeführt wird, ergibt sich auch:

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0, \quad (13)$$

eine bequeme und oft integrable Form für die Gleichung der Stromlinien. Die Koeffizienten λ , μ , ν sind dabei nur Funktionen der z -Koordinate. Sie müssen entweder reell sein oder, wenn dies nicht der Fall ist, als Produkte einer reellen Größe und eines gemeinsamen komplexen Faktors darstellbar sein.

Entsprechend folgt aus (12):

$$\lambda (x - x_0) + \mu (y - y_0) + \nu (z - z_0) = 0 \quad (14)$$

als Gleichung der Orbitalbahn. Wegen der unendlichen Kleinheit der Störung kann nun z in erster Näherung durch z_0 in den Koeffizienten λ , μ , ν ersetzt werden, wodurch dieselben als konstant für eine Orbitalbahn erscheinen. Die Gleichung (14) wird aber dann eine Ebene darstellen, die wir kurz die *Orbitalebene* nennen. λ , μ , ν können somit als die drei Richtungskosinus der Normale zu der Orbitalebene interpretiert werden, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} M\lambda &= 2 \Omega_x \sinh^2 \delta_1 (z-h) \\ M\mu &= -\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \sinh \delta_1 (z-h) \cosh \delta_1 (z-h) \\ M\nu &= 2 \Omega_z \left[\cosh^2 \delta_1 (z-h) - \frac{4 \Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Verhältniszahl M bestimmt sich mit Hilfe der bekannten Relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

zu:

$$M = \pm \sqrt{\left[\cosh^2 \delta_1 (z-h) - \frac{4 \Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right] \left[(\beta - \alpha U)^2 \sinh^2 \delta_1 (z-h) + 4 \Omega_z^2 \frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right]}. \quad (15')$$

Das doppelte Vorzeichen vor der Wurzel rührt daher, daß die Normalenrichtung zweideutig ist.

Für die Diskussion der Gleichungen (12) ist es sehr empfehlenswert, ein neues kartesisches Koordinatensystem einzuführen, das zu der Orbitalebene (14) und deren Normale orientiert ist.

Es seien ξ , η , ζ die drei Achsen, wovon ξ in die Schnittlinie zwischen der Orbitalebene und der xy -Ebene fällt, während ζ die Richtung der Normalen besitzt. Die Richtung der y -Achse ist dann eindeutig festgelegt durch die Bemerkung, daß ξ , η , ζ in der angegebenen Reihenfolge ein rechtwinkliges Rechtssystem bilden sollen. Es sei ferner

ψ der Winkel zwischen der x - und der ξ -Achse und θ der Neigungswinkel der Orbitalebene zur xy -Ebene. Es bestehen dann die leicht zu bestätigenden Relationen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sin \psi \sin \theta \\ \mu &= -\cos \psi \sin \theta \\ \nu &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Mit den Werten (15) und (15') erhalten wir nun hieraus:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 (z - h)}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sinh^2 \delta_1 (z - h) + 4 \Omega_z^2 [(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2]}} \\ \cos \theta &= \frac{\pm 2 \Omega_z \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \cosh^2 \delta_1 (z - h) - 4 \Omega_x^2}}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sinh^2 \delta_1 (z - h) + 4 \Omega_z^2 [(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2]}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Da θ als Winkel zwischen zwei Richtungen (der z - und der ζ -Achse) 180° nicht übersteigen kann, muß das doppelte Vorzeichen vor der Wurzel in dem Ausdruck für $\sin \theta$ so gewählt werden, daß $\sin \theta$ immer positiv bleibt. Je nach der Wahl des Vorzeichens vor dem anderen Wurzelzeichen in dem Ausdruck für $\cos \theta$ wird dann θ im ersten oder im zweiten Quadranten kommen. Wir können z. B. die Wahl so treffen, daß θ immer im ersten Quadranten bleibt.

Ferner ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{2 \Omega_x \sinh \delta_1 (z - h)}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \cosh^2 \delta_1 (z - h) - 4 \Omega_x^2}} \\ \cos \psi &= \frac{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z - h)}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \cosh^2 \delta_1 (z - h) - 4 \Omega_x^2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

wo das doppelte Vorzeichen nach der getroffenen Wahl der Normalenrichtung durch (16) eindeutig festgelegt ist.

Für die Koordinaten in der Orbitalebene erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_0) \cos \psi + (y - y_0) \sin \psi \\ \eta &= [-(x - x_0) \sin \psi + (y - y_0) \cos \psi] \frac{1}{\cos \theta} = \frac{z - z_0}{\sin \theta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (12), (16) und (17) ergibt sich hieraus nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned} \xi &= \mp i Z \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \cosh^2 \delta_1 (z - h) - 4 \Omega_x^2}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ \eta &= \mp Z \frac{\sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sinh^2 \delta_1 (z - h) + 4 \Omega_z^2 [(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2]}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}. \end{aligned} \tag{18'}$$

In reeller Form können diese Gleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\xi = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi, \quad \eta = b_1 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi, \tag{19}$$

wo

$$\varphi = R(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)$$

ist, während die reellen Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 bei stabilen Wellen Funktionen von z allein sind, bei instabilen Wellen aber auch den Faktor $e^{\beta_2 t}$ enthalten.

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (19) erhalten wir nun:

$$(b_1^2 + b_2^2) \xi^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \xi \eta + (a_1^2 + a_2^2) \eta^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \tag{19'}$$

Bei stabilen Wellen wird diese Gleichung eine *Ellipse* darstellen. Auf eine Diskussion der Größe ihrer beiden Achsen, sowie der Lage der großen Achse in der Orbital-ebene, in ihrer Abhängigkeit von den auftretenden Parametern, können wir bei dieser Gelegenheit nicht eingehen, da eine genaue Zerlegung der Koeffizienten auf der rechten Seite von (18') in ihren Reell- und Imaginärteil noch nicht durchgeführt werden kann.

Bei instabilen Wellen werden die Achsen der Ellipse den Faktor $e^{\beta_2 t}$ enthalten; die Bahn eines Teilchens wird sich dann spiralförmig um die Ellipse (19') herumwinden, unter ständig wachsender Entfernung von derselben.

Die Bestimmung der Umlaufsrichtung eines Teilchens in seiner Orbitalbahn muß auch auf eine spätere Gelegenheit, nach der Diskussion der Frequenzgleichung, verschoben werden.

§ 19. Die Schwingungen einer einzigen Schicht zwischen zwei parallelen, starren Grenzflächen.

Wir werden in diesem Paragraphen den Fall von einer einzigen Schicht betrachten, die zwischen zwei parallelen, starren Grenzflächen eingeschlossen sei.

Es sei die Gleichung dieser ebenen Flächen durch $z=0$ und $z=-h$ gegeben. Das Verschwinden der Normalkomponente w an diesen Grenzflächen gibt dann aus dem Ausdruck (18, 5) für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} C + C' &= 0 \\ C e^{-\delta_1 h} + C' e^{\delta_1 h} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Bei nichtverschwindenden C -Werten muß folglich die Determinantengleichung:

$$e^{\delta_1 h} - e^{-\delta_1 h} = 0,$$

bestehen, d. h. es muß

$$\sinh \delta_1 h = 0$$

sein, und diese Gleichung ist nur für

$$\delta_1 h = \pi i n \quad (2)$$

erfüllt, wo n eine ganze Zahl ist.

Durch Einsetzen des Wertes von δ_1 aus (18, 4) erhalten wir dann die folgende Frequenzgleichung:

$$\pm \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} = \frac{\pi n}{a h}. \quad (2')$$

Hieraus folgt sofort, daß bei reellen Werten von α und β immer die Ungleichung

$$(\beta - \alpha U)^2 \leq 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2$$

bestehen muß. Wie schon erwähnt (s. S. 32), stellt $\beta - \alpha U$ die Orbitalfrequenz dar; es ist ferner $\beta - \alpha U = \frac{2\pi}{T'}$, wo T' die Orbitalperiode darstellt. Eine bei reellen Werten von α und β vorkommende Schwingung ist folglich nur für kleinere Werte der Orbitalfrequenz möglich. Der Maximalwert ist durch $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ gegeben; nach (2') wird er einer unendlich kleinen Wellenlänge ($\alpha = \infty$) entsprechen. Für abnehmende Werte von α wird auch die Orbitalfrequenz abnehmen, aber langsamer, so daß der unendlich langen Welle ($\alpha = 0$) eine Frequenz $2 \Omega_z$ entspricht. Um noch kleinere Frequenzen zu erhalten, müßten eigentlich negative Werte von α berücksichtigt werden, was aber nach Voraussetzung nicht gestattet ist. Nun hat aber die Wurzel in (2') ein doppeltes Vorzeichen; wenn für

$\beta - \alpha U < 2 \Omega_z$ das negative Vorzeichen gewählt wird, so bleibt die linke Seite von (2') und folglich auch α positiv. Diese Schwingungen mit Frequenzen zwischen $2 \Omega_z$ und Null werden α -Werten zwischen 0 und ∞ entsprechen.

Um ein quantitatives Bild der Frequenzgleichung (2') zu erhalten, ist dieselbe in Fig. 7 in ein kartesisches Koordinatensystem eingetragen, mit $\frac{h \alpha}{\pi n}$ als Abszisse und der Orbitalfrequenz $\beta - \alpha U$ als Ordinate. Es ist dabei $\Omega_x = \Omega_z$ gewählt worden. Zur Vollständigkeit sind auch die sich aus (2') ergebenden, negativen Werte von $\beta - \alpha U$ mit berücksichtigt worden, die symmetrisch zu den positiven liegen, mit der Abszissenachse als Symmetrielinie.

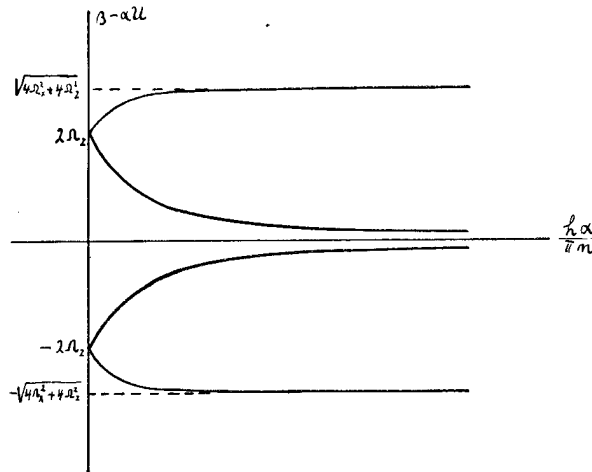


Fig. 7.

Zu jedem Wert von α entsprechen folglich vier verschiedene reelle Werte von $\beta - \alpha U$. Dies ergibt sich auch analytisch durch Quadrieren der Frequenzgleichung, wodurch wir erhalten:

$$\left[1 + \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2 \right] (\beta - \alpha U)^4 - 4 \left\{ \Omega_x^2 + \Omega_z^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2 \right] \right\} (\beta - \alpha U)^2 + 16 \Omega_z^4 \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^4 = 0,$$

oder nach $\beta - \alpha U$ aufgelöst:

$$\beta - \alpha U = \pm \sqrt{\frac{2 \Omega_x^2 + 2 \Omega_z^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2 \right] \pm \sqrt{4 \Omega_x^4 + 4 \Omega_z^4 + 8 \Omega_x^2 \Omega_z^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2 \right]}}{1 + \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2}} \quad (3)$$

Da der Radikand immer reell, positiv ist, so erhalten wir zu jedem gegebenen Wert von α vier verschiedene reelle Werte von $\beta - \alpha U$.

Aus der Figur ersieht man sofort, daß sich die äußeren Kurvenzweige (mit $|\beta - \alpha U| > 2 \Omega_z$) bei abnehmendem Wert von Ω_x mehr und mehr den horizontalen Geraden $\beta - \alpha U = \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ nähern, um schließlich für $\Omega_x = 0$ in dieselben überzugehen. Entsprechend werden sich die inneren Kurvenzweige (mit $|\beta - \alpha U| < 2 \Omega_z$) bei abnehmendem Wert von Ω_z der Abszissenachse nähern, um für $\Omega_z = 0$ mit derselben zusammenzufallen. Ist dann außerdem $\Omega_x = 0$, so bleibt nur die Wurzel $\beta - \alpha U = 0$ zurück. Auf der Existenz dieser Wurzel, wenn $\Omega_x = \Omega_z = 0$ ist, haben wir schon früher, bei der Behandlung zweidimensionaler Störungsbewegungen, aufmerksam gemacht (s. S. 17).

Wir beschränken uns auf diese Diskussion der Frequenzgleichung (2') und gehen jetzt zu der Störungsbewegung über. Aus den Integralen (18, 5) folgt wegen (1), wenn nur eine einzige der vier Wurzeln von (2') berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} u &= C \left[\frac{4 \Omega_x \Omega_z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sin \frac{\pi n z}{h} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) - \frac{\pi n}{\alpha h} \cos \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \right] \\ v &= -C \left[\frac{2 \Omega_x (\beta - \alpha U)}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sin \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) + \frac{\pi n}{\alpha h} \frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \cos \frac{\pi n z}{h} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \right] \\ w &= -C \sin \frac{\pi n z}{h} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \end{aligned} \quad (4)$$

$$p = -\frac{\varepsilon}{\alpha} C \left[2 \Omega_y \sin \frac{\pi n z}{h} + \frac{\pi n}{\alpha h} \frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}{\beta - \alpha U} \cos \frac{\pi n z}{h} \right] \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z),$$

wo nach (18, 4)

$$\delta_2 = \frac{4 \Omega_x \Omega_z \alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}$$

ist.

Um die Diskussion dieser Integrale leichter durchzuführen, betrachten wir zuerst die Projektion der Stromlinien auf die xz -Ebene. Für die entsprechende »Stromfunktion« Ψ , wobei

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ist, erhalten wir:

$$\Psi = -\frac{1}{\alpha} C \sin \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z). \quad (5)$$

Diese Funktion verschwindet an den $n+1$ parallelen Ebenen:

$$z = 0, -\frac{h}{n}, -\frac{2h}{n}, \dots, -\frac{(n-1)h}{n}, -h. \quad (6)$$

Die ganze Schicht von der Höhe h ist also in n parallele Partialschichten von der Höhe $\frac{h}{n}$ zerlegt, wobei die Störungsbewegung innerhalb einer Partialschicht von der Bewegung in den angrenzenden Schichten unabhängig ist. Da die Normalkomponente der Geschwindigkeit an den Ebenen (6) verschwindet, können dieselben auch als starr betrachtet werden, ohne daß dadurch die Störungsbewegung (4) eine Änderung erleiden wird.

Die »Stromfunktion« (5) verschwindet auch an den Ebenen:

$$\alpha x + \delta_2 z = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi + \beta t,$$

wo k sämtliche positive und negative ganze Zahlen bedeutet. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden von diesen Ebenen muß die »Stromfunktion« Ψ geschlossene Äquiskalarkurven aufweisen. Das momentane Stromfeld der Flüssigkeit ist also in parallelepipedische Stromgebiete mit ähnlichen Stromlinien zerlegt, wobei die Stromrichtung in zwei angrenzenden Gebieten immer entgegengesetzt ist. Die Höhe dieser Partialgebiete ist gleich $\frac{h}{n}$, während ihre Breite durch $\frac{\pi}{\alpha}$ gegeben ist. Die Neigung der Seitenwände ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\alpha}{\delta_2} = -\frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}{4 \Omega_x \Omega_z}$$

und kann folglich alle Werte von 0 bis π annehmen. Für $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_z^2$ ist die Neigung gleich Null; um unendliche Geschwindigkeitskomponenten zu vermeiden, muß dann

$C=0$ gewählt werden. Die Bewegung wird aber dann zweidimensional, indem sie nur in der xy -Ebene vor sich gehen kann. Um ein Unendlichwerden der Geschwindigkeitskomponenten (4) zu vermeiden, könnte auch $[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] C'$ anstatt C als neue willkürliche Konstante eingeführt werden.

Für $\Omega_x=0$ wird die Neigung der Seitenwände gleich 90° . Dasselbe gilt auch, wenn außerdem $\Omega_z=0$ ist. Die rechte Seite der obigen Gleichung für ω würde dann eigentlich die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, da in diesem Falle $\beta - \alpha U=0$ ist, wie wir schon gesehen haben. Durch Betrachtung der Integrale findet man aber leicht, daß $\delta_2=0$ ist, während α willkürlich bleibt, woraus sich $\omega=90^\circ$ ergibt.

Die Störungsbewegung (4) ist durch die Rotation Ω bedingt. Bei verschwindender Rotation bleibt noch eine x - und z -Komponente der Bewegung übrig, während die y -Komponente und der Störungsdruck verschwindet. Der letztere kann also nur bei vorhandener Rotation eine regulierende Einwirkung auf die Bewegung ausüben. Die Störungsbewegung, die nur im zweidimensionalen Spezialfalle wirbelfrei ist, stellt die von der Rotation beeinflussten Eigenschwingungen der ganzen Flüssigkeitsschicht dar. Für $n=1$ ergibt sich die Grundschwingung, während für $n=2, 3, \dots$, die erste, zweite, \dots , Oberschwingung zur Darstellung kommt.

Die Diskussion der Störungsbewegung (4) ist bis jetzt ganz allgemein geführt worden. Es gibt aber zwei Spezialfälle dieser Störungsbewegung, die von besonderem Interesse erscheinen und deshalb in aller Kürze erwähnt werden sollen.

Wie wir schon gesehen haben, bewirkt die Rotation eine Zerlegung des Stromfeldes in parallelepipedische Stromgebiete von der Höhe $\frac{h}{n}$ und der Breite $\frac{\pi}{\alpha}$. Die Konstante $\frac{\pi n}{\alpha h}$, die in der Gleichung (3) und in der Figur auftritt, stellt somit das Verhältnis der halben »Wellenlänge« zur Höhe der Partialschicht dar. Die uns interessierenden Spezialfälle treten nun ein, wenn dieses Verhältnis eine sehr große oder eine sehr kleine Größe ist. Es bestehen dann gewisse Vereinfachungen, die an die Verhältnisse bei den »langen« und den »kleinen« Wellen erinnern.

Wir beschränken uns darauf, diese Vereinfachungen für den Fall der Gleichung (3) anzugeben; dieselben können aber auch bei der Störungsbewegung (4) zur Anwendung kommen.

(a) Es sei erstens die Konstante $\frac{\pi n}{\alpha h}$ sehr groß. Die rechte Seite von (3) kann dann in eine Reihe nach steigenden Potenzen der kleinen Größe $\frac{\alpha h}{\pi n}$ entwickelt werden, wodurch wir erhalten:

$$\beta - \alpha U = \pm \left[2 \Omega_z \pm \Omega_x \frac{\alpha h}{\pi n} - \frac{\Omega_z}{4} \left(2 - \frac{\Omega_x^2}{\Omega_z^2} \right) \left(\frac{\alpha h}{\pi n} \right)^2 + \dots \right].$$

Wenn nur das erste Glied rechts berücksichtigt wird, erhalten wir bloß die zwei Werte: $\beta - \alpha U = \pm 2 \Omega_z$. In erster Annäherung ist also die Störungsbewegung zweidimensional (s. oben), und zwar bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen in ihrer Trägheitsbahn herum, wobei die Umlaufsrichtung positiv oder negativ ist, je nachdem $\Omega_z \leq 0$ ist.

Bei Berücksichtigung weiterer Glieder in der obigen Reihenentwicklung wird die Bahn der Teilchen etwas modifiziert, obgleich ein quasi-horizontaler Charakter noch besteht. Es ergeben sich aber nun vier verschiedene Werte von $\beta - \alpha U$.

Diese Form der Störungsbewegung wird in einer sehr dünnen Schicht zwischen zwei parallelen, starren Grenzflächen in die Erscheinung treten. Es ist ja auch sehr plausibel, daß die Bewegung in diesem Falle angenähert den Grenzflächen parallel verläuft.

(b) Es sei nun zweitens die Konstante $\frac{\pi n}{a h}$ sehr klein, indem z. B. die Flüssigkeitsschicht von großer Dicke ist, wobei auch eine unendliche Dicke vorkommen kann. Die Entwicklung von (3) nach Potenzen von $\frac{\pi n}{a h}$ gibt dann die vier Wurzeln:

$$\beta - \alpha U = \begin{cases} \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \left[1 - \frac{2 \Omega_x^4}{(2 \Omega_x^2 + 2 \Omega_z^2)^2} \left(\frac{\pi n}{a h} \right)^2 + \dots \right], \\ \pm \left[\frac{2 \Omega_z^2}{\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_z^2}} \frac{\pi n}{a h} + \dots \right]. \end{cases}$$

Die Wurzeln liegen in der Nähe der horizontalen Geraden $\beta - \alpha U = \begin{cases} \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \\ \pm 0 \end{cases}$

(s. Fig. 7), um bei unendlicher Dicke der Flüssigkeitsschicht mit denselben zusammenzufallen. Die Kurvenzweige der Fig. 7 nähern sich also bei wachsender Schichtdicke allmählich den Seiten ihrer zwei umschließenden Vierecke. —

Aus den Integralen (4) können in bekannter Weise die Stromlinien und die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens bestimmt werden. Der Verlauf der Stromlinien ergibt sich durch Integration der Gleichungen:

$$u dz - w dx = 0, \quad v dz - w dy = 0.$$

Aus der ersteren erhalten wir unter Berücksichtigung von (4):

$$\sin \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) = K,$$

wo K eine für die betreffende Stromlinie charakteristische Konstante ist, deren Betrag ≤ 1 ist. Diese Gleichung stimmt mit (5) überein, und ist somit schon früher diskutiert worden.

Mit Hilfe dieser Relation ergibt sich ferner aus der zweiten Gleichung der Stromlinien:

$$e^{\frac{2 \Omega_x (\beta - \alpha U) \alpha K}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi n z}{h} - K^2}} \left[\sin \frac{\pi n z}{h} \right]^{\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U}} = K' e^{\alpha y}, \quad (7)$$

mit K' als neue Integrationskonstante. Diese Gleichung enthält somit ein elliptisches Integral, auf dessen Auflösung wir aber nicht näher eingehen können. Es soll hier nur angeführt werden, daß das elliptische Integral für $\Omega_x = 0$ nicht mehr vorkommen wird. Die zu $K = 0$ und ± 1 gehörenden Stromlinien können übrigens auch für $\Omega_x \neq 0$ durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

Für die Komponenten der Orbitalbahn eines Flüssigkeitsteilchens ergeben sich aus (4):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{C}{\beta - \alpha U} \left[\frac{4 \Omega_x \Omega_z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sin \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi n}{a h} \cos \frac{\pi n z}{h} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \right] \\ y - y_0 &= \frac{C}{\beta - \alpha U} \left[\frac{2 \Omega_x (\beta - \alpha U)}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sin \frac{\pi n z}{h} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi n}{a h} \frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \cos \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \right] \\ z - z_0 &= - \frac{C}{\beta - \alpha U} \sin \frac{\pi n z}{h} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z). \end{aligned} \quad (8)$$

Hieraus folgt für die Gleichung der Orbitalebene (vgl. die entsprechenden Rechnungen des vorigen Paragraphen):

$$2 \Omega_x \sin^2 \frac{\pi n z}{h} \cdot (x - x_0) - \frac{\pi n (\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}{\alpha h (\beta - \alpha U)} \sin \frac{\pi n z}{h} \cos \frac{\pi n z}{h} \cdot (y - y_0) + 2 \Omega_z \left[-\cos^2 \frac{\pi n z}{h} + \frac{4 \Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right] (z - z_0) = 0. \quad (9)$$

Der Neigungswinkel θ der Orbitalebene mit der xy -Ebene ist ferner durch

$$\sin \theta = \frac{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sin \frac{\pi n z}{h}}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}} \pm 2 \Omega_z \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_x^2} \quad (10)$$

$$\cos \theta = \frac{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}}{\pm \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}}$$

gegeben, wo die doppelten Vorzeichen vor den zwei Wurzeln so zu wählen sind, daß θ immer im ersten Quadranten bleibt (s. S. 59).

Der Winkel ψ , den die Schnittlinie zwischen der Orbital- und der xy -Ebene mit der x -Achse bildet, ergibt sich ferner aus:

$$\sin \psi = \frac{2 \Omega_x \sin \frac{\pi n z}{h}}{\pm \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_x^2}} \quad (11)$$

$$\cos \psi = \frac{\frac{\pi n (\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}{\alpha h (\beta - \alpha U)} \cos \frac{\pi n z}{h}}{\pm \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_x^2}}$$

Das Vorzeichen vor der Wurzel ist durch (10) eindeutig festgelegt.

Schließlich erhalten wir für die rechtwinkligen Komponenten ξ, η der Orbitalbahn, wenn die Orbitalebene als Koordinatenebene gewählt wird, mit der ξ -Achse in der Schnittlinie zur xy -Ebene:

$$\xi = \pm \frac{C}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_x^2} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \quad (12)$$

$$\eta = \mp \frac{C \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z).$$

Führen wir hier

$$\xi = a \cos \varphi, \quad \eta = b \sin \varphi \quad (13)$$

ein, so erhalten wir zuerst:

$$a = \frac{C}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_x^2}$$

$$b = \frac{|C| \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 \frac{\pi n z}{h} + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)} \quad (13')$$

Durch Bildung des Ausdruckes:

$$a^2 - b^2 = \frac{C^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2},$$

ersieht man, daß $a \geq b$ ist, je nachdem $(\beta - \alpha U)^2 \geq 4 \Omega_z^2$ ist. Für $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_z^2$ wird der Ausdruck unendlich; wie wir schon gesehen haben (S. 63), muß dann $[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] C'$ als neue willkürliche Konstante anstatt C eingeführt werden, wodurch sich in diesem Falle $a = b$ ergibt. Auch für $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2$ ergibt sich $a = b$. Die Orbitalbahn ist also in diesen beiden Fällen *kreisförmig*; sonst ist sie *elliptisch* mit der großen Achse in der Richtung der ξ -, bzw. η -Achse, je nachdem $(\beta - \alpha U)^2 \geq 4 \Omega_z^2$ ist.

Ferner erhalten wir durch Division der zwei Gleichungen (12), unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung (10):

$$\frac{\xi}{\eta} = -\frac{\beta - \alpha U}{2 \Omega_z} \cos \theta \operatorname{tg} (\alpha x - \beta t + \delta_2 z).$$

Das Verhältnis $\frac{\xi}{\eta}$ kann aber nach (13) durch $\frac{a}{b} \cotg \varphi$ ersetzt werden, und da ferner nach (13') und (10)

$$\frac{a}{b} = \frac{|\beta - \alpha U|}{|2 \Omega_z|} \cos \theta$$

ist, so ergibt sich schließlich:

$$\cotg \varphi = -\frac{|\Omega_z (\beta - \alpha U)|}{\Omega_z (\beta - \alpha U)} \operatorname{tg} (\alpha x - \beta t + \delta_2 z). \quad (14)$$

Durch Ausführung der Differentiation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$ erhalten wir hieraus die wichtige Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{|\Omega_z|}{\Omega_z} |\beta - \alpha U|. \quad (15)$$

Die Winkelgeschwindigkeit eines Teilchens während seines Umlaufes in der Orbitalellipse ist folglich gleich dem Betrage der Orbitalfrequenz. Die Umlaufsrichtung des Teilchens ist ferner positiv (zyklonisch) oder negativ (antizyklonisch), je nachdem $\Omega_z \leq 0$ ist. Die Umlaufsrichtung in der Projektion der Orbitalellipse auf die xy -Ebene wird auch dasselbe Verhalten zeigen, da der Neigungswinkel θ der Orbitalebene immer im ersten Quadranten bleiben sollte.

Wir werden zum Schluß die räumliche Orientierung der Orbitalebene für verschiedene Wellenlängen und Orbitalfrequenzen untersuchen, indem wir uns dabei auf positive Werte der Orbitalfrequenzen beschränken. Das Resultat könnte übrigens auch leicht auf negative Orbitalfrequenzen ausgedehnt werden.

$$\text{Es sei zuerst } \alpha = \infty, \text{ d. h. } \beta - \alpha U = \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}.$$

Dieser Grenzfall einer unendlich kleinen »Wellenlänge« in der x -Richtung ist mit einer rein konvektiven Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = U$ in dieser Richtung verbunden,

während der Störungsdruck verschwindet. Die Neigung der Orbitalebene folgt nach (10) aus:

$$\sin \theta = \frac{|2 \Omega_x|}{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}, \quad \cos \theta = \frac{|2 \Omega_z|}{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}};$$

sie ist folglich in der ganzen Flüssigkeitsschicht von demselben Betrag. Für $|\Omega_x| = |\Omega_z|$ ist sie gleich 45° , und sie wird größer oder kleiner als dieser Wert sein, je nachdem $|\Omega_x| \geq |\Omega_z|$ ist.

Nach (11) ist ferner ψ überall gleich $+90^\circ$ oder -90° , je nachdem Ω_x und Ω_z das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Orbitalebene steht folglich senkrecht auf der in die xz -Ebene fallende Komponente des Rotationsvektors. Die Orbitalbahn ist kreisförmig, wie wir schon gesehen haben. Der Radius des Kreises wird nach (13') gleich:

$$r = \left| \frac{C}{2 \Omega_x} \sin \frac{\pi n z}{h} \right|;$$

er erreicht folglich seinen Maximalwert $\left| \frac{C}{2 \Omega_x} \right|$ in der Mitte einer Partialschicht und verschwindet an den Grenzen derselben. Es liegt deshalb eine besondere Form der Trägheitsbewegung vor, die von den x, z -Komponenten der Rotation verursacht ist.

Wir lassen nun α abnehmen. Dann wird auch θ abnehmen, wenn auch nicht in demselben Verhältnis in allen Höhen der Flüssigkeit. In der Mitte der Partialschichten wird nämlich θ den größten Wert erreichen, und dort wird er mit α in ständigem Abnehmen sein, während er an den Grenzen derselben immer gleich Null ist. Gleichzeitig mit dieser Abnahme von θ wird die Orbitalebene eine Drehung um die $(z - z_0)$ -Achse ausführen, ausgenommen in der Mitte der Partialschichten, wo ψ immer noch gleich $+90^\circ$ oder -90° bleibt. Der Wert von ψ bestimmt sich am einfachsten mit Hilfe der folgenden, aus (10) und (11) sich ergebenden Relationen:

$$\sin \psi = \frac{4 \Omega_x \Omega_z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \operatorname{tg} \theta, \quad \cos \psi = \frac{\pi n}{\alpha h} \frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \operatorname{tg} \theta \operatorname{cotg} \frac{\pi n z}{h}. \quad (16)$$

Da $\operatorname{tg} \theta$ immer positiv ist, während $\operatorname{cotg} \frac{\pi n z}{h}$ in der oberen Hälfte einer Partialschicht negativ, in der unteren Hälfte positiv ist, so ergibt sich, wenn Ω_x und Ω_z vom selben Zeichen sind, für $\Omega_z > 0$ eine Abnahme des Winkels ψ von 180° bis 0° , von oben nach unten in der Partialschicht gerechnet, und für $\Omega_z < 0$ eine Zunahme von 0° bis 180° . Sind Ω_x und Ω_z von entgegengesetztem Zeichen, so folgt entsprechend für $\Omega_z > 0$ eine Abnahme des Winkels ψ von -0° bis -180° , und für $\Omega_z < 0$ eine Zunahme von -180° bis -0° .

Es sei ferner: $\alpha = 0, \beta - \alpha U = |2 \Omega_z|$.

Es wird dann $\theta = 0$ sein; die Bewegung findet folglich nur in der xy -Ebene statt, und zwar ist sie kreisförmig mit dem Radius: $|2 \Omega_x C'|$. Der Störungsdruck verschwindet nicht, wenn er auch von der x -Koordinate unabhängig geworden ist. Der Winkel ψ hat eigentlich keinen Sinn in diesem Falle; aus den Formeln ergibt sich aber ein Grenzwert für $\alpha \rightarrow 0$. Wenn z. B. sowohl Ω_x als auch Ω_z positiv sind, erhalten wir dann $\psi = \pi + \frac{\pi n z}{h}$; in der oberen Partialschicht variiert also ψ von 180° bis 0° , von oben nach unten gerechnet.

Für $(\beta - \alpha U)^2 < 4 \Omega_z^2$ liegt die große Achse der Orbitalellipse längs der η -Achse; ψ gibt folglich den Winkel zwischen der kleinen Achse und der x -Achse. Sein Verhalten in einer Partialschicht ist durch die oben, für $(\beta - \alpha U)^2 > 4 \Omega_z^2$ angegebene Variation

von ψ vollständig bestimmt, denn aus (16) folgt nämlich, daß sich das dortige Verhalten für positives Ω_x mit dem hiesigen für negatives Ω_x völlig deckt.

θ wird wieder mit α wachsen, indem er doch an den Grenzen der Partialschichten immer gleich Null bleibt.

Wenn schließlich $\alpha = \infty$, $\beta - \alpha U = 0$ geworden ist, ergibt sich θ aus:

$$\sin \theta = \frac{\left| 2 \Omega_z \sin \frac{\pi n z}{h} \right|}{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2 \cos^2 \frac{\pi n z}{h}}{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}.$$

In der Mitte einer Partialschicht ist folglich $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right|$, wodurch der Rotationsvektor $\mathbf{\Omega}$ hier in die Orbitalebene fallen wird.

Der Störungsdruck wird verschwinden, während die Geschwindigkeitskomponenten endlich bleiben, falls $C \neq 0$ ist. Da aber in diesem Falle aus (13') zu ersehen ist, daß die lange Achse der Orbitalellipse für abnehmende Orbitalfrequenzen immer größer wird, um zuletzt für verschwindende Orbitalfrequenz unendlich zu werden, was mit einer kleinen Störung nicht vereinbar ist, so muß die willkürliche Konstante C den Faktor $\beta - \alpha U$ enthalten, z. B. gleich $(\beta - \alpha U) C''$ sein. Dann werden aber auch die Geschwindigkeitskomponenten der Störung mit $\beta - \alpha U$ gegen Null gehen; die ganze Flüssigkeitsschicht bewegt sich also allein mit dem gleichförmigen Grundstrom fort.

§ 20. Die Wellenbewegung in einer unendlichen Schicht mit freier Oberfläche.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Wellenbewegung in einer einzigen Schicht über, deren obere Begrenzung eine freie Oberfläche sei. Die Lösungen für diesen Fall können sofort aus den generellen Formeln des § 18 durch Nullsetzen aller Konstanten mit dem Index II bestimmt werden. Um möglichst einfache Resultate zu erhalten, werden wir uns in diesem Paragraphen darauf beschränken, die Diskussion der Lösungen für den Fall von unendlicher Tiefe der Flüssigkeit durchzuführen.

Wenn in den Integralen (18, 11) $h = -h^I = -\infty$ gesetzt wird, so ergibt sich, indem

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{\sinh \delta_1 (z-h)}{\sinh \delta_1 h} = -e^{\pm \delta_1 z}, \quad \lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{\cosh \delta_1 (z-h)}{\sinh \delta_1 h} = \mp e^{\pm \delta_1 z}$$

sind:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\beta - \alpha U}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} Z [4 \Omega_x \Omega_z i \pm (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}] e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ v &= \frac{\beta - \alpha U}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} Z [2 \Omega_x (\beta - \alpha U) \mp 2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} i] e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ w &= -i(\beta - \alpha U) Z e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ p &= \epsilon \frac{\beta - \alpha U}{a} Z [2 \Omega_y \pm \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}] e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Es ist hier $\delta = \pm \delta_1 + i \delta_2$, oder nach (18, 4):

$$\delta = \frac{\pm \alpha (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} + 4 \Omega_x \Omega_z \alpha i}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}. \quad (2)$$

Damit die Bewegung im Unendlichen verschwinden kann, muß das doppelte Vorzeichen vor der Wurzel so gewählt werden, daß die Bedingung:

$$R(\delta) > 0 \quad (3)$$

immer erfüllt bleibt.

Aus der Frequenzgleichung (18, 10) folgt ferner, indem für unendliche Tiefe $\cotgh \delta_1 h=1$ ist:

$$\pm (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} = \alpha g_z - 2 \Omega_y \beta. \quad (4)$$

Wegen dieser Gleichung kann das Wurzelzeichen in (1) und (2) weggeschafft werden. Besonders einfach gestaltet sich dann die Druckgleichung, die folgende Form erhält:

$$p = \varepsilon (g_z - 2 \Omega_y U) Z e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}. \quad (1')$$

Aus (2) ergibt sich entsprechend:

$$\delta = \alpha \frac{\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta + 4 \Omega_x \Omega_z i}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}. \quad (2')$$

Aus der Gleichung (4) folgt sofort, daß bei reellen Werten von α und β die Ungleichung

$$(\beta - \alpha U)^2 \geq 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2$$

immer bestehen muß, wodurch bloß Schwingungen mit größeren Orbitalfrequenzen möglich werden. Es ist beachtenswert, daß die Orbitalfrequenzen für die Schwingungen einer Schicht zwischen starren Grenzflächen ein gerade umgekehrtes Verhalten gezeigt haben (s. S. 60). Der sich dort ergebende Maximalwert $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ ist ja gerade gleich dem hiesigen Minimalwert der Orbitalfrequenz.

Um die Abhängigkeit der Orbitalfrequenz von der Wellenlänge besser überblicken zu können, werden wir auch hier, wie es im vorigen Paragraphen der Fall gewesen ist, die Frequenzgleichung (4) in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch aufzeichnen, mit α als Abszisse und $\beta - \alpha U$ als Ordinate. Zu dem Zweck schreiben wir zuerst die Gleichung in der etwas veränderten Form:

$$(\beta - \alpha U) [2 \Omega_y \pm \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}] = \alpha (g_z - 2 \Omega_y U). \quad (4')$$

Aus dieser Gleichung folgt nun sofort, daß einem unendlichen α ein unendlicher Wert von $\beta - \alpha U$ entsprechen muß. Für sehr große Werte von $\beta - \alpha U$ kann aber Ω in erster Näherung gegen $\beta - \alpha U$ vernachlässigt werden; aus (4') folgt dann:

$$\pm (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2} = \alpha (g_z - 2 \Omega_y U).$$

Bei irdischen Verhältnissen ist $g_z \gg 2 \Omega_y U$; da wir außerdem bloß positive Werte von α berücksichtigen, ist das doppelte Vorzeichen so zu wählen, daß die linke Seite immer positiv bleibt. Nach der obigen Gleichung kann nun $\beta - \alpha U$ entweder reell, in welchem Falle die linke Seite einfach $(\beta - \alpha U)^2$ geschrieben werden kann, oder auch rein imaginär sein. Die letzte Möglichkeit ist aber auszuschließen, denn nach (2') wäre dann $R(\delta) < 0$, was mit der Bedingung (3) nicht vereinbar ist. Es bleibt folglich nur:

$$(\beta - \alpha U)^2 = \alpha (g_z - 2 \Omega_y U). \quad (5)$$

Diese Gleichung stellt nun eine durch Origo hindurchgehende Parabel dar, deren Achse mit der positiven α -Achse zusammenfällt.

Mit derselben Näherung folgt aus (2):

$$\delta = \alpha = \frac{(\beta - \alpha U)^2}{g_z - 2 \Omega_y U}.$$

Bei kleineren Werten von $|\beta - \alpha U|$ wird die Kurve (4') anfangen, von der Parabel auszuweichen, und zwar wird für ein bestimmtes α der Wert von $|\beta - \alpha U|$ etwas größer ausfallen, als es nach der Parabel der Fall gewesen wäre. Schließlich wird $|\beta - \alpha U|$ den Minimalwert $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ erreichen; es ergeben sich dann:

$$\alpha = \pm 2 \Omega_y \frac{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}{g_z - 2 \Omega_y U}, \quad \delta = \frac{\Omega_z}{\Omega_x} i \alpha.$$

Es ist also δ rein imaginär geworden. Von dem doppelten Vorzeichen in dem Ausdruck für α soll + für positive und — für negative Orbitalfrequenzen verwendet werden.

Nur wenn Ω_y und die Orbitalfrequenz von gleichem Vorzeichen sind, wird $\alpha > 0$ werden. Versuchen wir in diesem Falle die Kurve (4') für noch kleinere Werte von α zu zeichnen, so ergibt sich aus (2'), daß dann $R(\delta) < 0$ wird, was gegen die Bedingung (3) streitet. Dieser positive Wert von α wird deshalb einen Minimalwert darstellen.

Wenn nun Ω_y und $\beta - \alpha U$ von entgegengesetztem Vorzeichen sind, wird der minimalen Orbitalfrequenz ein negativer Wert von α entsprechen. Da wir aber bloß

positive α -Werte berücksichtigen, brauchen wir nur die Kurve (4') bis an ihren Schnittpunkt mit der Ordinatenachse zu zeichnen. Setzen wir nun $\alpha = 0$ in (4') ein, so folgt: $\beta = 2 \Omega$, welcher Wert in diesem Falle als minimale Orbitalfrequenz gelten wird.

Für irdische Verhältnisse mit $g_z \gg \Omega_y$ wird der Minimalwert von α sehr nahe an Null kommen. In der Fig. 8, die eine graphische Darstellung der Gleichung (4') gibt, ist deshalb $\Omega_y = 0$ gesetzt worden, wodurch die minimale Orbitalfrequenz an die Ordinatenachse kommt; selbst mit dem vorkommenden Werte von Ω_y würde sie so nahe an die Ordinatenachse kommen, daß sie in der Figur von derselben kaum zu unterscheiden wäre.

Es ist ferner $2 \Omega_x = 2 \Omega_z = 1,03 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ und $g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}$ gewählt worden. Die Einheit ist gleich $2 \Omega_x^2 + 2 \Omega_z^2 = 1,06 \cdot 10^{-8}$ längs der Abszisse und gleich $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} = 1,46 \cdot 10^{-4}$ längs der Ordinate.

Die gestrichelte Kurve stellt die Parabel, die voll ausgezogene Kurve die Gleichung (4')

dar. Die Abweichung der zwei Kurvensysteme voneinander ist für größere Werte von $|\beta - \alpha U|$ ganz unmerkbar.

Jedem Wert von α entsprechen folglich zwei verschiedene Werte von $\beta - \alpha U$. Für $\Omega_y = 0$ liegen dieselben symmetrisch zur α -Achse; für $\Omega_y \neq 0$ ergibt sich aber eine kleine Asymmetrie.

Diesen zwei Wurzeln der Frequenzgleichung entsprechend, muß die vollständige Störungsbewegung die Summe von zwei Gliedern der Form (1) sein, wie wir es in den zwei vorigen Kapiteln gesehen haben. Dadurch können auch gewisse Anfangsbedingungen erfüllt werden. Wir können aber nicht näher darauf eingehen und werden fortan das primitive Integral (1) als Störungsbewegung betrachten.

Die entsprechende Gleichung der schwingenden Oberfläche lautet dann nach (18,7):

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)},$$

wo, wie gewöhnlich, nur der reelle Teil zu behalten ist.

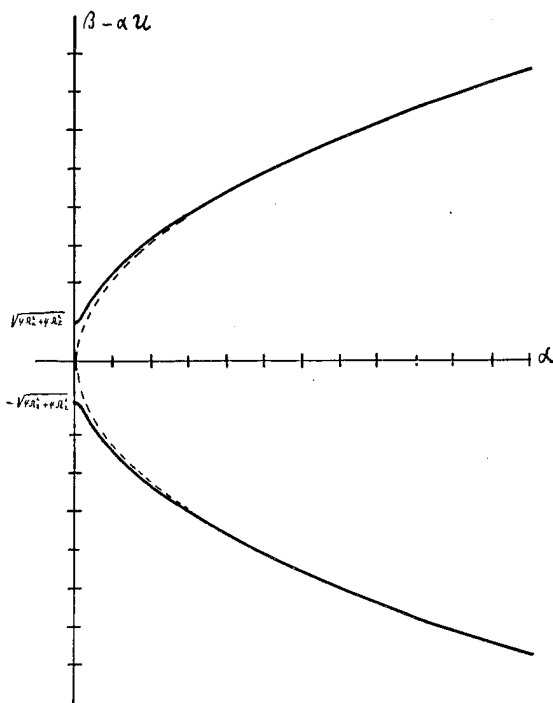


Fig. 8.

Die Gleichungen (1) stellen eine dreidimensionale Wellenbewegung dar; in der x -Richtung pflanzt sich diese mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\beta}{\alpha}$ fort. Für kleine Wellen ($\alpha \rightarrow \infty$) ist, wie wir gesehen haben, die Wirkung der Rotation unmerkbar; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird in diesem Falle nach (5):

$$c = U \pm \sqrt{\frac{g_z - 2\Omega_y U}{\alpha}}$$

Wenn keine Konvektion vorhanden ist, d. h. für $U = 0$, reduziert sich diese Gleichung auf die Stokes'sche Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen auf unendlich tiefem Wasser.

Für lange Wellen muß die Wirkung der Rotation mit berücksichtigt werden, und zwar folgt unmittelbar aus der Figur 8, daß für eine bestimmte Wellenlänge die Orbitalfrequenz durch die Rotation eine Vergrößerung erleidet, wodurch auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c vergrößert wird.

Bei abnehmendem α ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der x -Richtung wachsend; für $\alpha = \infty$ nimmt sie den rein konvektiven Wert U an und wächst so mit der Wellenlänge, um zuletzt für $\alpha = 0$ unendlich groß zu werden.

Wie verhalten sich nun die Integrale (1) bei dieser Änderung der Wellenlänge?

Wir werden dieselben für einen Augenblick in der kürzeren Form:

$$u = A e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}, \quad v = B e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}, \quad w = C e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}$$

schreiben, wo die komplexen Koeffizienten A, B, C wieder in ihren reellen und komplexen Teil zerlegt werden können. Es seien z. B.

$$A = A_1 + i A_2, \quad B = B_1 + i B_2, \quad C = C_1 + i C_2.$$

Mit den Werten dieser Koeffizienten aus (1) erhalten wir nun für den Ausdruck

$$A^2 + B^2 + C^2 = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + 2i(A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2)$$

den Wert Null, d. h. es bestehen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &= A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Der reelle Teil der Integrale (1) lautet nun:

$$R(u) = u_1 = [A_1 \cos(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) - A_2 \sin(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)] e^{\delta_1 z}$$

und entsprechend für die zwei anderen Geschwindigkeitskomponenten. Für den absoluten Betrag V der Geschwindigkeit ergibt sich deshalb:

$$\begin{aligned} V^2 &= u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = [(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \cos^2(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) + \\ &+ (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) \sin^2(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) - (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) \sin 2(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)] e^{2\delta_1 z}, \end{aligned}$$

oder nach (6):

$$V = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} e^{\delta_1 z}.$$

Die Geschwindigkeit ist also nur von der z -Koordinate abhängig, und zwar nimmt sie exponentiell nach unten ab, nach demselben Gesetz wie die Geschwindigkeitskomponenten und der Störungsdruck. Mit den Werten der Konstanten A_1, B_1, C_1 in (1) erhalten wir schließlich:

$$V = \frac{(\beta - \alpha U)^2 Z}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}} e^{\delta_1 z}. \tag{7}$$

Aus den generellen Gleichungen des § 18 wissen wir schon, daß eine verschwindende lineare Kombination aus den Komponenten der Störungsgeschwindigkeit gebildet werden kann. Im Falle unendlicher Tiefe lautet diese Relation:

$$2 \Omega_x u \mp \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} v + 2 \Omega_z w = 0;$$

die Koeffizienten sind also hier Konstanten.

Division mit dt und Integration gibt dann unmittelbar die folgende Gleichung der Stromlinien:

$$2 \Omega_x x \mp \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} y + 2 \Omega_z z = K. \quad (8)$$

Die Stromlinien sind folglich ebene Kurven. Bei verschwindender Rotation ($\Omega_x = \Omega_z = 0$) verlaufen sie in vertikalen Ebenen, parallel der xz -Ebene; es liegt dann die einfache zweidimensionale Bewegung (mit $v = 0$) vor, die im zweiten Kapitel behandelt worden ist. Bei vorhandener Rotation werden aber die Stromlinienebenen eine schräge Stellung zu der Vertikale einnehmen. Ihre Neigung θ zu der xy -Ebene ist nach (18, 16) durch

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \right)^2}, \quad \cos \theta = \left| \frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \right| \quad (9)$$

gegeben, während der Winkel ψ zwischen der x -Achse und den Schnittlinien der Stromlinienebenen mit der xy -Ebene sich nach (18, 17) aus

$$\sin \psi = \frac{2 \Omega_x}{\pm \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\pm \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{\pm \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}} \quad (10)$$

ergibt. Von dem doppelten Vorzeichen vor der Wurzel im Nenner soll \pm gewählt werden, je nachdem $\Omega_z \geq 0$ ist. Die zweideutige Wurzel im Zähler des Ausdrucks für $\cos \psi$ kann übrigens, nach der Frequenzgleichung (4), durch den eindeutigen Ausdruck $\frac{\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta}{\beta - \alpha U}$ ersetzt werden. Nach (2') und den Bemerkungen S. 70 wird nun $\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta \geq 0$; im Zähler des Ausdrucks für $\cos \psi$ muß folglich + oder - gewählt werden, je nachdem die Orbitalfrequenz positiv oder negativ ist.

Um die Form der Stromlinien in ihrer Ebene bestimmen zu können, müssen wir noch die Gleichung: $u dz - w dx = 0$, integrieren. Mittels der Werte (1) für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich dann:

$$\cos(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) = K' e^{\mp \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \alpha z}. \quad (11)$$

Die linke Seite verschwindet an den Ebenen:

$$\alpha x + \delta_2 z = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi + \beta t$$

wo k sämtliche ganze Zahlen bedeutet. Die Stromlinien gehen asymptotisch gegen diese Ebenen, um dieselben für $z = \infty$ zu erreichen. Zwischen zwei benachbarten Ebenen ($k = n$ und $n + 1$) verlaufen die Stromlinien als zusammenhängende Kurven; sie fangen bei $z = \infty$ an, erreichen ihre größte Tiefe irgendwo zwischen den zwei Ebenen (wenn auch nicht ganz in der Mitte), um dann umzubiegen und sich allmählich der Nachbarbene zu nähern. In zwei angrenzenden asymptotischen Ebenen wird folglich die Stromrichtung entgegengesetzt sein. Die Neigung dieser Ebenen zu der xy -Ebene ist durch

$$\operatorname{tg} \omega = - \frac{\alpha}{\delta_2} = - \frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2}{4 \Omega_x \Omega_z}$$

gegeben. Wenn Ω_x und Ω_z von demselben Vorzeichen sind, wird deshalb der Winkel ω im zweiten Quadranten liegen, sonst liegt er im ersten. Es ist noch zu bemerken, daß er für kleine Wellen, wobei Ω beinahe zu vernachlässigen ist, nahe bei 90° liegen wird.

Es bleibt uns noch übrig, die Orbitalbahn der Flüssigkeitsteilchen zu ermitteln. Nach der üblichen Methode erhalten wir aus (1):

$$\begin{aligned} x-x_0 &= \frac{Z}{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2} [-4\Omega_x\Omega_z \pm (\beta-\alpha U) \sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_x^2-4\Omega_z^2} i] e^{i(\alpha x-\beta t)+\delta z} \\ y-y_0 &= \frac{Z}{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2} [2\Omega_x(\beta-\alpha U)i \pm 2\Omega_z \sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_x^2-4\Omega_z^2}] e^{i(\alpha x-\beta t)+\delta z} \\ z-z_0 &= Z e^{i(\alpha x-\beta t)+\delta z}, \end{aligned} \tag{12}$$

wo wie gewöhnlich der reelle Teil zu behalten ist.

Hieraus folgt für die Gleichung der Orbitalebene:

$$2\Omega_x(x-x_0) \mp \sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_x^2-4\Omega_z^2}(y-y_0) + 2\Omega_z(z-z_0) = 0, \tag{13}$$

die natürlicherweise den Stromlinienebenen (8) parallel sein muß.

Die rechtwinkligen Komponenten ξ, η der Orbitalbahn ergeben sich ferner nach (18, 18) zu:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{i(\beta-\alpha U)Z}{\pm \sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2}} e^{i(\alpha x-\beta t)+\delta z} \\ \eta &= \frac{|\beta-\alpha U|Z}{\sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2}} e^{i(\alpha x-\beta t)+\delta z}; \end{aligned} \tag{14}$$

die Orbitalbahn ist folglich kreisförmig.

Wie in (10), ist das obere oder untere Vorzeichen vor der Wurzel zu verwenden, je nachdem $\Omega_z \geq 0$ ist. Das doppelte Vorzeichen kann deshalb auch durch $\frac{|\Omega_z|}{\Omega_z}$ ersetzt werden.

Wenn der imaginäre Teil von (14) weggeworfen wird, können wir die Polarkoordinaten

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi$$

einführen, und erhalten erstens:

$$r = \frac{|\beta-\alpha U|Z}{\sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2}} e^{\delta_1 z}. \tag{15}$$

Es ist hier Z positiv vorausgesetzt worden, was sich durch geeignete Wahl des Koordinatenursprunges immer bewerkstelligen läßt. Außer mit der Wellenamplitude ist der Radius des Orbitalkreises auch mit der Größe $\frac{|\beta-\alpha U|}{\sqrt{(\beta-\alpha U)^2-4\Omega_z^2}}$ proportional; dieser Ausdruck ist für kleine Wellen gleich 1 und wächst mit der Wellenlänge, um schließlich für sehr lange Wellen den Wert $\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_z}{\Omega_x}\right)^2}$ anzunehmen. Außerdem ist der Radius, nach demselben Exponentialgesetz wie die absolute Geschwindigkeit, von der Oberfläche nach unten zu abnehmend.

Ferner erhalten wir:

$$\cotg \varphi = - \frac{|\Omega_z(\beta-\alpha U)|}{\Omega_z(\beta-\alpha U)} \operatorname{tg}(\alpha x - \beta t + \delta_2 z), \tag{16}$$

d. h. genau dieselbe Gleichung wie (14) des vorigen Paragraphen. Was dort über die Winkelgeschwindigkeit eines Teilchens und die Umlaufsrichtung in der Orbitalbahn gesagt

worden ist, läßt sich also Wort für Wort auf diesen Fall überführen. Besonders ist zu bemerken, daß die Umlaufsrichtung positiv oder negativ ist, je nachdem $\Omega_z \leq 0$ ist.

Wir werden noch zum Schluß die räumliche Orientierung des Orbitalkreises für verschiedene Wellenlängen untersuchen.

Für kleine Wellen ($\beta - \alpha U \rightarrow \infty$) erhalten wir aus (9) und (10): $\theta = 90^\circ$ und $\psi = 0$; der Orbitalkreis steht also vertikal, parallel der xz -Ebene, wie bei rotationsfreier Wellenbewegung. Bei größeren Wellenlängen wird aber die Orbitalebene sich schräg stellen, und zwar wird bei einem gegebenen Wert von Ω_z die Neigung mit der Wellenlänge wachsen, bis sie den Wert: $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\Omega_x}{\Omega_z} \right|$, für sehr lange Wellen annimmt.

Wäre keine x -Komponente von Ω vorhanden, so würde bloß eine Drehung der Orbitalebene um die x -Achse zustandekommen, und zwar wird der Drehungssinn gegen die positive oder die negative y -Achse sein, je nachdem $\beta - \alpha U$ und Ω_z von demselben oder von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Im ersteren Falle ist nämlich $\psi = 0$, im letzteren gleich 180° .

Wenn eine x -Komponente von Ω vorhanden ist, wird die Orbitalebene außerdem eine Drehung um die z -Achse ausführen. Wenn Ω_x und Ω_z das gleiche Vorzeichen haben, wird $\sin \psi$ positiv bleiben; aus dem Vorzeichen von $\cos \psi$ folgt dann, daß ψ im ersten oder zweiten Quadranten liegt, je nachdem Ω_z und $\beta - \alpha U$ das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn dagegen $\Omega_x \Omega_z < 0$ ist, wird ψ im dritten oder vierten Quadranten liegen, je nachdem $\Omega_z (\beta - \alpha U) \leq 0$ ist. Für kleine Wellen liegt der Drehungswinkel ψ nahe an 0 oder 180° , um mit wachsender Wellenlänge allmählich geändert zu werden, bis er den Wert 90° , bezw. -90° für sehr lange Wellen erreicht. Die Orbitalebene wird dann längs der y -Achse fallen. Da gleichzeitig $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\Omega_x}{\Omega_z} \right|$ ist, wie wir eben gesehen haben, so steht die Orbitalebene senkrecht auf der in die xz -Ebene fallende Komponente des Rotationsvektors. Der Radius des Orbitalkreises ist nach (15) gleich $\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right)^2} Z$, indem $\delta_1 = 0$ ist; er wird also in allen Tiefen denselben Betrag haben.

Die Bewegung hat deshalb ihren Wellencharakter verloren, wenn sie auch nicht als reine Trägheitsbewegung bezeichnet werden kann; denn nach (1') ist sie noch mit einem Störungsdrucke verbunden. Nur für den Fall einer verschwindenden x -Komponente von Ω muß die Amplitude Z gleich Null gewählt werden, da sonst der Radius des Orbitalkreises unendlich groß wird; dann verschwindet aber sowohl die Vertikalkomponente der Störungsgeschwindigkeit, wie auch der Störungsdruck, und es bleibt eine reine, horizontale Trägheitsbewegung von der Orbitalfrequenz $2\Omega_z$ übrig.

Die Diskussion der primitiven Integrale (1) kann nun als durchgeführt betrachtet werden. Sie stellen eine immer stabil verlaufende, dreidimensionale Wellenbewegung dar, deren Verhalten für alle mögliche Wellenlängen jetzt untersucht worden ist. Auch die vollständige Störungsbewegung, die als Summe von zwei primitiven Integralen der Form (1) dargestellt werden kann, läßt sich mit mehr oder weniger Mühe nach der angegebenen Methode studieren. Die Orbitalbahn der Flüssigkeitsteilchen wird dann, wie wir schon bei dem Spezialfalle in Kapitel II gesehen haben, aus zwei Kreisen zusammengesetzt sein; da dieselben aber nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen werden, wird die Summe derselben auch nicht mehr eben erscheinen, wie bei den Epizykloiden im zweidimensionalen Spezialfall. Bei der Bestimmung der vollständigen Orbitalbahnen wird deshalb eine erhebliche Rechnungsarbeit erforderlich sein, wenn auch keine prinzipiellen Schwierigkeiten vorkommen werden.

Es bleibt uns aber noch eine anscheinend erhebliche Schwierigkeit übrig, die im vorigen noch nicht berührt worden ist.

Wie schon mehrmals bemerkt, haben wir Wellen von allen möglichen Längen studiert. Die entsprechenden Orbitalfrequenzen müßten aber oberhalb des kritischen Wertes $\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ liegen, und es würde hiernach erscheinen, als ob die eben auseinandergesetzte Theorie nicht ausreiche, um Wellen von noch kleinerer Frequenz in einer rotierenden Flüssigkeitsschicht bestimmen zu können. Dies ist auch in der Hydrodynamik und in der theoretischen Meeresforschung angenommen worden, wo ein ähnliches Problem der Wellenbewegung in einer Schicht, wenn auch unter vereinfachenden Voraussetzungen (Vernachlässigung der Konvektion und der x, y -Komponenten der Rotation), mit Hilfe der quasistatischen Methode in der elementaren Ebbe- und Fluttheorie behandelt wird¹.

Es wird sich aber zeigen, daß die gegebene Lösung auch Wellen von kleinerer Orbitalfrequenz mit enthält, vorausgesetzt, daß keine störenden Vereinfachungen eingeführt werden. Eine solche Vereinfachung ist aber schon am Anfang dieses Paragraphen gemacht worden, indem wir in der Frequenzgleichung (4) $\cotgh \delta_1 h = 1$ gesetzt haben. Für unendliche Tiefe der Flüssigkeit ist dies erlaubt, falls $\delta_1 > 0$ ist. Dies trifft nun immer zu, wenn $|\beta - \alpha U| > \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ ist; für den Minimalwert $|\beta - \alpha U| = \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ aber ist nach (2) δ rein imaginär und δ_1 folglich gleich Null, und für noch kleinere, reelle Werte von $|\beta - \alpha U|$ würde δ_1 rein imaginär werden. Es kann aber dann $\cotgh \delta_1 h$ alle mögliche Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, wenn auch h unendlich groß wäre. Die Frequenzgleichung in der Form (4) ist deshalb nur für $|\beta - \alpha U| > \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ gültig; es wird dann auch nicht mehr erstaunlich erscheinen, daß sie keine Wurzeln für $|\beta - \alpha U| < \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ gibt, denn dieses Gebiet liegt ja außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches. Um sämtliche Wurzeln erhalten zu können, müssen wir deshalb zuerst h als willkürlich behalten, und erst nachträglich im Endresultat den Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ ausführen. Es soll dies in dem nächsten Paragraphen ausgeführt werden. Da sich die Rechnungen für eine unendliche und für eine endliche Schicht völlig decken, gehen wir gleich zu dem generelleren Fall mit endlicher Tiefe der Flüssigkeit über; der Fall von unendlicher Tiefe ist ja hierin mit einbegriffen.

§ 21. Die Wellenbewegung in einer endlichen Schicht mit freier Oberfläche.

Die Störungsbewegung ergibt sich sofort aus den generelleren Formeln von § 18, indem dort überall $\varepsilon^{\text{II}} = 0$ gesetzt wird. Wenn außerdem der, jetzt überflüssig gewordene, Index I weggelassen wird, so erhalten wir z. B. aus der Frequenzgleichung (18, 10), indem der Wert von δ_1 aus (18, 4) eingeführt wird:

$$(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} \cotgh a h \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2} = a g_z - 2\Omega_y \beta. \tag{1}$$

Der Charakter dieser Gleichung ist im wesentlichen davon abhängig, ob

$$(\beta - \alpha U)^2 \geq 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2$$

ist.

Wir werden diese Fälle gesondert untersuchen und setzen zuerst voraus, daß

$$(\beta - \alpha U)^2 > 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2$$

ist. Sämtliche Glieder von (1) sind dann reell.

¹ S. z. B. W. WIEN: Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900, S. 239—242. H. U. SVERDRUP: Dynamics of Tides on the North Siberian Shelf. Geofys. Publ. Vol. IV. Nr. 5, Oslo 1926, S. 20—23.

Für sehr große Werte von $\beta - \alpha U$ kann nun Ω gegen $\beta - \alpha U$ vernachlässigt werden, und wir erhalten angenähert aus (1):

$$(\beta - \alpha U)^2 \cotgh \alpha h = \alpha (g_z - 2 \Omega_y U).$$

Diese Gleichung ist aber nur für großes α möglich, und dann nähert sich der hyperbolische Kotangens dem Werte 1, vorausgesetzt, daß h nicht allzu klein ist. Es bleibt also nur:

$$(\beta - \alpha U)^2 = \alpha (g_z - 2 \Omega_y U).$$

In dem schon früher verwendeten kartesischen Koordinatensystem mit α als Abszisse und $\beta - \alpha U$ als Ordinate stellt diese Gleichung eine Parabel von derselben Form wie im vorigen Paragraphen dar. Die kleinen Wellen haben also dieselbe kleine Orbitalperiode sowohl in einer endlichen, wie in einer unendlichen Schicht.

Für kleinere Werte von $\beta - \alpha U$, die sich dem kritischen Werte $\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ nähern, wird die exakte Kurve (1) natürlich von der Parabel ausweichen; auch wird sie für eine endliche Schicht anders verlaufen als für eine unendliche Schicht. Wenn wir an die Grenze kommen, mit $(\beta - \alpha U)^2 = 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2$, wird das Argument des hyperbolischen Kotangens gleich Null und der \cotgh selbst gleich unendlich, wodurch die linke Seite von (1) die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ erhält. Nun gilt aber für ein sehr kleines Argument η die Entwicklung:

$$\cotgh \eta = \frac{1}{\eta} (1 + \dots).$$

In dieser Weise reduziert sich (1) auf

$$\frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}{\alpha h} = \alpha g_z - 2 \Omega_y \beta, \quad (2)$$

welche einfache Gleichung in der Nähe des kritischen Wertes $(\beta - \alpha U)^2 = 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2$ der komplizierteren Formel (1) ersetzen kann.

Für $\beta - \alpha U = \pm \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ folgt hieraus:

$$\alpha = \pm \frac{\Omega_y \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{g_z - 2 \Omega_y U} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{(g_z - 2 \Omega_y U) 4 \Omega_x^2}{h \Omega_y^2 (4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2)}} \right]. \quad (3)$$

Für $h = \infty$ ergibt sich wieder das Resultat des vorigen Paragraphen (S. 70). Für $\Omega_y = 0$ wird dann auch $\alpha = 0$. Dies gilt aber nicht mehr für endliches h , denn es ist dann:

$$\alpha = \pm \frac{2 \Omega_x}{\sqrt{g_z h}}, \quad (3')$$

wo nur das eine Vorzeichen, das $\alpha > 0$ ergibt, zu berücksichtigen ist.

Es sei nun schließlich $(\beta - \alpha U)^2 < 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2$. Der Wurzelausdruck in (1) wird dann rein imaginär; dasselbe gilt auch für δ_1 , das wir $i|\delta_1|$, mit $|\delta_1| > 0$, schreiben können. Wegen der bekannten Verbindung, die zwischen den hyperbolischen und den gewöhnlichen Kreisfunktionen besteht, und nach welcher

$$i \cotgh(i|\delta_1|h) = \cotg|\delta_1|h$$

ist, kann aber die Gleichung (1) in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2} \cotg \alpha h \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2} = \\ = \alpha g_z - 2 \Omega_y \beta \end{aligned} \quad (1')$$

geschrieben werden, wo wieder alle Glieder reell sind.

Zur Diskussion dieser Gleichung werden wir zuerst die Änderung des Argumentes $|\delta_1| h$ von \cotg mit $\beta - \alpha U$ untersuchen, indem wir uns dabei auf positive Orbitalfrequenzen beschränken.

Für den kritischen Wert $\beta - \alpha U = \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ ist das Argument gleich Null, und für abnehmende Werte von $\beta - \alpha U$ wird es auch im Anfang klein bleiben. Wir können aber dann $\cotg |\delta_1| h$ durch $\frac{1}{|\delta_1| h}$ ersetzen, wodurch wir wieder auf die Gleichung (2) geführt werden. Diese Gleichung gilt also in einem gewissen Gebiet zu beiden Seiten des kritischen Wertes von $\beta - \alpha U$. In dem verwendeten kartesischen Koordinatensystem stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar, deren Achsen nur sehr wenig von den kartesischen Achsen abweichen werden. Für $\Omega_y = 0$ fallen sie sogar mit denselben zusammen; die Hyperbeläste gehen dann durch die Punkte:

$$\left(\frac{|2 \Omega_x|}{\sqrt{g_z h}}, \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \right) \text{ und } (0, \pm 2 \Omega_z).$$

Die genaue Kurve (1') wird natürlich etwas von der Hyperbel abweichen; das Argument $|\delta_1| h$ hält sich nämlich nicht klein längs der ganzen Kurve, vielmehr ist es bei abnehmendem $\beta - \alpha U$ immer wachsend. Die rechte Seite von (1') ist ja längs der Hyperbel immer abnehmend, um zuletzt für $\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta = 0$ zu verschwinden. Es muß dann auch die linke Seite verschwinden, was ein Argument von $\frac{\pi}{2}$ bedingt.

Ist $\Omega_y > 0$, wird dies für positives α eintreffen. Da wir die Kurve für alle positive Werte von α aufzeichnen werden, muß folglich das Argument $|\delta_1| h$ für noch kleinere α im zweiten Quadranten kommen. Zuletzt wird $\alpha = 0$; der entsprechende Wert der Frequenz ist dann $\beta = |2 \Omega_z|$. Die Gleichung (1') gibt in diesem Falle:

$$|\Omega_x| \cotg |\delta_1| h = -\Omega_y,$$

woraus sich das Argument $|\delta_1| h$ ergibt.

Ist $\Omega_y < 0$, wird ein Argument von $\frac{\pi}{2}$ erst für negatives α eintreffen. Der unendlich langen Welle und der Orbitalfrequenz $|2 \Omega_z|$ wird dann ein Argument entsprechen, das sich aus

$$\cotg |\delta_1| h = \frac{|\Omega_y|}{|\Omega_x|}$$

ergibt; $|\delta_1| h$ liegt also noch im ersten Quadranten.

Es hat sich nun gezeigt, daß das Anwachsen des Argumentes auf ein kleines Gebiet in der unmittelbaren Nähe der durch Origo hindurchgehenden Gerade: $\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta = 0$, d. h. in der Nähe der Ordinatenachse, beschränkt ist. So wird z. B. für $\Omega_y = 0$ ein Argument von $\frac{\pi}{4}$ angenähert in dem Punkte $\left(\frac{4 \Omega_x \Omega_z}{g_z}, 2 \Omega_z \left(1 + \frac{8 \Omega_x^2 h}{g_z \pi} \right) \right)$ vorkommen, der mit den auf der Erde vorkommenden Werten der Konstanten sehr nahe an dem Punkte $(0, 2 \Omega_z)$ liegen wird.

Wir haben schließlich den Fall $(\beta - \alpha U)^2 < 4 \Omega_z^2$ zu betrachten. Das Argument kann hier $\delta_1 h = -i |\delta_1| h$ geschrieben werden, wo $|\delta_1| > 0$ ist. Die Gleichung (1) gibt dann:

$$\begin{aligned}
 -(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \cotg \alpha h \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2} = \\
 = \alpha g_z - 2 \Omega_y \beta. \tag{1''}
 \end{aligned}$$

Für $\alpha=0$ ergibt sich wieder $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_z^2$. Das entsprechende Argument des \cotg wird im ersten oder zweiten Quadranten liegen, je nachdem $\Omega_y \beta \geq 0$ ist. In beiden Fällen wird das Argument mit α wachsen, bis es den Wert π für $\alpha = \infty$ erreicht, und zwar wird auch hier das Anwachsen des Argumentes in einem kleineren Gebiete in der Nähe der Gerade: $\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta = 0$, erfolgen. An dieser Gerade ist übrigens das Argument gleich $\frac{\pi}{2}$ (für $\Omega_y \beta > 0$). Längs dem größten Teil der Kurve wird folglich das Argument nicht viel von π abweichen können. Wir setzen es deshalb gleich $\pi - \eta$, wo η eine kleine Größe ist. Aus (1'') folgt dann in erster Näherung:

$$\alpha h \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2} = \pi - \eta,$$

$$(\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} = (\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta) \eta,$$

woraus sich die gesuchte Gleichung zwischen α und $\beta - \alpha U$ durch Elimination von η ergibt. Mit genügender Genauigkeit läßt sich übrigens diese Relation aus der ersten Gleichung allein bestimmen, indem wir dort eine weitere Annäherung ausführen und die rechte Seite einfach durch π ersetzen.

Wenn $\beta - \alpha U$ sehr klein im Verhältnis zu Ω ist, kann diese Gleichung angenähert in der Form:

$$\alpha(\beta - \alpha U) = \frac{\pi}{h} \frac{4 \Omega_z^2}{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}} \quad (4)$$

geschrieben werden; die Gleichung (1'') wird also in der Nähe der α -Achse eine gleichseitige Hyperbel darstellen, die sich um so mehr der α -Achse anschließt, je größer die Schichtdicke h ist.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der kleinen Wellen von diesem Typus folgt aus (4):

$$c = U + \frac{\pi}{\alpha^2 h} \frac{4 \Omega_z^2}{\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}}.$$

Wenn wir auch die in der negativen x -Richtung sich fortpflanzende Welle zu berücksichtigen wünschen, muß \pm vor der Wurzel hinzugefügt werden.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst mit der Wellenlänge und mit der z -Komponente der Rotation, wird aber für größere Tiefen immer kleiner, um schließlich für $h = \infty$ den rein konvektiven Wert U zu erhalten.

Die Figur 9 gibt eine graphische Darstellung der Gleichungen (1, 1', 1''). Es ist dabei $\Omega_x = \Omega_z$ und $\Omega_y = 0$ gewählt worden; ferner sind die an der Erdoberfläche vorkommenden Werte, $\Omega = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ und $g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}$, benutzt worden. Die Tiefe der Flüssigkeitsschicht sei 5000 m. Hätten wir h noch größer gewählt, so würde die Kurve den Achsen näher rücken (s. Gl. (3') und (4)), um für $h = \infty$ die Ordinatenachse in dem Punkte $(0, \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2})$ zu treffen und mit dieser Achse bis zum Nullpunkt und schließlich mit der positiven α -Achse zusammenzufallen. Der Verlauf der Kurve für $|\beta - \alpha U| > \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ ist für $h = \infty$ schon früher in Fig. 8, S. 70 angegeben worden.

Die Einheit ist gleich $1,458 \cdot 10^{-4}$ längs der Ordinatenachse und gleich $0,729 \cdot 10^{-6}$ längs der Abszissenachse. Mit diesen Einheiten wird die Kurve für $\beta - \alpha U < |2 \Omega_z|$ so wenig von der Gerade $\beta - \alpha U = |2 \Omega_z|$ abweichen, daß sie in der Figur von derselben kaum zu unterscheiden ist. Sie ist deshalb in dem unteren Teil der Figur nochmals aufgezeichnet, diesmal mit einer 1000mal vergrößerten Einheit längs der Abszissenachse.

Für negative Orbitalfrequenzen, die in der Figur nicht berücksichtigt worden sind, ergeben sich ähnliche Kurven, die in diesem Falle ($\Omega_y=0$) symmetrisch zu denjenigen für positive Orbitalfrequenzen verlaufen.

Jedem Werte von a entsprechen folglich vier verschiedene, reelle Werte von $\beta - aU$. Die einzige Ausnahme bildet der Fall $h = \infty$, wo zwei der Wurzeln zusammenfallend sind und die singuläre Lösung $\beta - aU = 0$ ergeben. Zwei der Wurzeln geben nach (1) Wellen mit Orbitalfrequenzen größer als $\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$, und die zwei anderen geben nach (1') und (1'') Frequenzen kleiner als diesen kritischen Wert.

Diese zwei Wurzeln sind aber nicht die einzigen der Gleichungen (1') und (1''), denn \cotg ist eine periodische Funktion, und dementsprechend müssen jedem Werte von a unendlich viele Werte von $\beta - aU$ entsprechen.

Wie wir soeben gesehen haben, lag das Argument $|\delta_1| h$ hauptsächlich im ersten Quadranten für $|2\Omega_z| < \beta - aU < \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ und im zweiten Quadranten für $0 < \beta - aU < |2\Omega_z|$. Zu diesen Argumenten hätten wir aber auch $n\pi$ addieren können, wo n sämtliche ganze positive Zahlen bedeutet.

Im ersteren Falle ergibt sich dann angenähert längs dem größten Teil der Kurven:

$$ah \frac{(\beta - aU) \sqrt{-(\beta - aU)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{(\beta - aU)^2 - 4\Omega_z^2} = n\pi;$$

für jeden Wert von $n \geq 1$ erhalten wir also eine Kurve in der $a, (\beta - aU)$ -Ebene, die durch den Punkt $(0, |2\Omega_z|)$ hindurchgeht und sich mit wachsendem a der Gerade $\beta - aU = \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ asymptotisch nähert, um dieselbe für $a = \infty$ zu erreichen. Diese Kurvenschar wird für großes a an gleichseitige Hyperbeln erinnern, und zwar wird für einen bestimmten Wert von a die entsprechende Orbitalfrequenz um so kleiner ausfallen, je größer n ist. $n = \infty$ wird den Grenzfall $\beta - aU = |2\Omega_z|$ ergeben. Die zu $n=0$ gehörende Kurve ist schon früher diskutiert worden; als einzige Kurve der ganzen Schar schneidet sie die Gerade: $\beta - aU = \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$.

Im letzteren Falle, $0 < \beta - aU < |2\Omega_z|$, ergibt sich entsprechend:

$$ah \frac{(\beta - aU) \sqrt{-(\beta - aU)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{-(\beta - aU)^2 + 4\Omega_z^2} = (n+1)\pi,$$

eine durch den Punkt $(0, |2\Omega_z|)$ hindurchgehende Kurvenschar, die sich mit wachsendem a der Abszissenachse $\beta - aU = 0$ asymptotisch nähert, und zwar in der Form gleichseitiger Hyperbeln von der Gleichung:

$$a(\beta - aU) = \frac{(n+1)\pi}{h} \frac{4\Omega_z^2}{\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}.$$

Für wachsendes n entfernen sich diese Kurven mehr und mehr von der Abszissenachse, um schließlich für $n = \infty$ in die Gerade $\beta - aU = |2\Omega_z|$ überzugehen.

Die $n=0$ entsprechende Kurve wird also für eine bestimmte Wellenlänge die kleinste Orbitalfrequenz, d. h. die größte Orbitalperiode ergeben. Die andere Kurvenschar (mit $\beta - aU > |2\Omega_z|$) hat sich gerade umgekehrt verhalten.

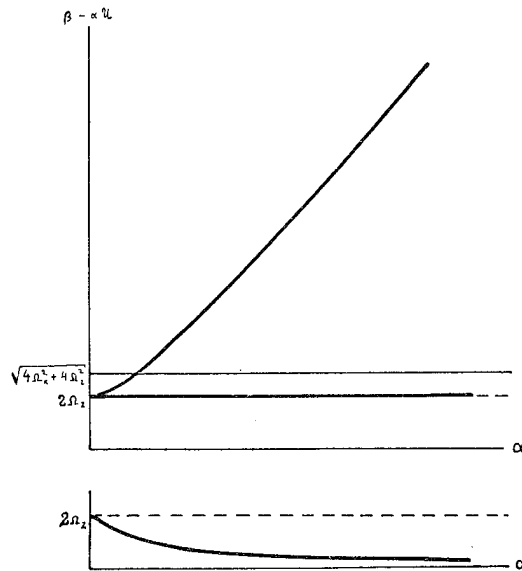


Fig. 9.

Wie später zu sehen ist, werden die $n=0$ entsprechenden Wurzeln der Frequenzgleichung einer Störungsbewegung gehören, die als Grundschwingung der Flüssigkeitsschicht betrachtet werden kann, während die $n=1, 2, \dots$ entsprechenden Störungen als erste, zweite, \dots Oberschwingung anzusehen sind.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Störungsbewegung über, und zwar beschränken wir uns dabei auf den einfachen Fall, wo nur eine einzige Wurzel der Frequenzgleichung vorhanden ist. Die Gleichung der gestörten, freien Oberfläche ist dann durch

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (5)$$

gegeben; da hier nur die Amplitude als willkürliche Konstante vorkommt, können etwaige Anfangsbedingungen (z. B. die Fläche sei im Anfangsmomente in ihrer Gleichgewichtslage) nicht erfüllt werden. Die entsprechende Störungsbewegung ist durch (18, 11) gegeben, indem jedoch das Vorzeichen von h dort geändert werden muß. Es ergibt sich deshalb für $(\beta - \alpha U)^2 > 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \left[4 \Omega_x \Omega_z i \sinh \delta_1 (z + h) + \right. \\ &\quad \left. + (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z + h) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ v &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \left[2 \Omega_x (\beta - \alpha U) \sinh \delta_1 (z + h) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} i \cosh \delta_1 (z + h) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \quad (6) \\ w &= -\frac{i(\beta - \alpha U) Z}{\sinh \delta_1 h} \sinh \delta_1 (z + h) e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ p &= \varepsilon \frac{(\beta - \alpha U) Z}{\alpha \sinh \delta_1 h} \left[2 \Omega_y \sinh \delta_1 (z + h) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z + h) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}. \end{aligned}$$

Wegen (1) kann die Druckgleichung auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$p = \frac{\varepsilon Z}{\cosh \delta_1 h} \left[(g_z - 2 \Omega_y U) \cosh \delta_1 (z + h) + 2 \Omega_y (c - U) \frac{\sinh \delta_1 z}{\sinh \delta_1 h} \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}. \quad (6')$$

Die Konstanten δ_1 und δ_2 haben die in (18, 4) angegebenen Werte; es kann dabei δ_1 positiv vorausgesetzt werden, indem sie augenscheinlich in der Form

$$\delta_1 = \alpha \frac{\sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U)^2}}}{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} \right)^2} \quad (7)$$

geschrieben werden kann.

Aus den reellen Geschwindigkeitskomponenten von (6) ergeben sich für die, jetzt nicht mehr ebenen Stromlinien:

$$\begin{aligned} \sinh \delta_1 (z + h) \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) &= K, \\ e^{\frac{2 \Omega_x (\beta - \alpha U) \alpha K}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \int \frac{dz}{\sqrt{\sinh^2 \delta_1 (z + h) - K^2}}} \frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U} &= K' e^{\alpha y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die erste Gleichung ähnelt der entsprechenden (20, 11), nur ist ein hyperbolischer Sinus anstatt des dortigen Exponentialgliedes getreten. Auch hier erhalten wir die asymptotischen Ebenen:

$$\alpha x + \delta_2 z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \beta t,$$

deren sich die Stromlinien mit wachsendem z nähern. Wegen der endlichen Tiefe besteht eine Abplattung der Stromlinien nach der festen Unterlage zu.

Die zweite Gleichung (8) enthält ein elliptisches Integral und soll deshalb bei dieser Gelegenheit nicht näher untersucht werden.

Für die Orbitalebene ergibt sich ferner aus (6):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \left[-4\Omega_x \Omega_z \sinh \delta_1 (z+h) + \right. \\ &\quad \left. + (\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} i \cosh \delta_1 (z+h) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ y - y_0 &= \frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \left[2\Omega_x (\beta - \alpha U) i \sinh \delta_1 (z+h) + \right. \\ &\quad \left. + 2\Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} \cosh \delta_1 (z+h) \right] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ z - z_0 &= \frac{Z}{\sinh \delta_1 h} \sinh \delta_1 (z+h) e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichung der Orbitalebene lautet folglich (vgl. (18, 14—15)):

$$\begin{aligned} 2\Omega_x \sinh^2 \delta_1 (z+h) \cdot (x - x_0) - \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} \sinh \delta_1 (z+h) \cosh \delta_1 (z+h) \cdot (y - y_0) + \\ + 2\Omega_z \left[\cosh^2 \delta_1 (z+h) - \frac{4\Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2} \right] (z - z_0) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Wie in § 18 gezeigt, ist die Lage dieser Ebene zu der xy -Ebene durch die zwei Winkel θ und ψ festgelegt, wobei θ ihren Neigungswinkel und ψ den Winkel zwischen der x -Achse und der Schnittlinie beider Ebenen darstellen. Die Formeln für θ und ψ folgen direkt aus (18, 16—17) durch Änderung des Vorzeichens von h , und brauchen deshalb hier nicht wiedergegeben zu werden.

Die rechtwinkligen Komponenten der Orbitalbahn ergeben sich ferner nach (18, 18'), indem wir sogleich die reelle Form angeben:

$$\begin{aligned} \xi &= \mp Z \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \cosh^2 \delta_1 (z+h) - 4\Omega_x^2}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \sin(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \\ \eta &= \pm Z \frac{\sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sinh^2 \delta_1 (z+h) + 4\Omega_z^2 [(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2]}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \cos(\alpha x - \beta t + \delta_2 z). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Bahn ist folglich eine Ellipse mit der großen Achse längs der ξ -Achse.

Die Orbitalellipse hat die größte Ausdehnung an der freien Oberfläche, um nach unten zu abzunehmen; an der festen Unterlage sind die Achsen derselben bis auf die Werte

$$\left| Z \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \right| \quad \text{und} \quad \left| Z \frac{2\Omega_z \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sinh \delta_1 h} \right|$$

abgenommen.

Für die Umlaufsrichtung eines Teilchens in seiner Orbitalellipse behält die Formel (20, 16) für eine unendliche Schicht auch hier ihre Gültigkeit.

Die räumliche Lage der Orbitalebene ändert sich mit der Wellenlänge nach ähnlichen Gesetzen wie die in dem vorigen Paragraphen dargestellten. Nur wird die Neigung der

Orbitalebene nicht mehr dieselbe in allen Tiefen sein; sondern es muß θ nach unten zu abnehmen, um an der festen Unterlage gleich Null zu werden.

Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen und gehen jetzt zur Untersuchung der Wellen von kleinerer Frequenz über.

Es sei zuerst $|2\Omega_z| < \beta < \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$.

In diesem Falle haben wir $\delta_1 = i|\delta_1|$, mit

$$|\delta_1| = a \frac{\sqrt{-1 + \frac{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}{(\beta - \alpha U)^2}}}{1 - \left(\frac{2\Omega_z}{\beta - \alpha U}\right)^2}, \quad (12)$$

eine positive Größe, in die Formeln (6—11) einzuführen. Es ergibt sich dann aus (6) für die Störungsbewegung:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sin|\delta_1 h|} [4\Omega_x \Omega_z i \sin|\delta_1(z+h)| + \\ &\quad + (\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2} \cos|\delta_1(z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ v &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2] \sin|\delta_1 h|} [2\Omega_x(\beta - \alpha U) \sin|\delta_1(z+h)| - \\ &\quad - 2\Omega_z \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2} i \cos|\delta_1(z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ w &= -\frac{i(\beta - \alpha U) Z}{\sin|\delta_1 h|} \sin|\delta_1(z+h)| e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ p &= \varepsilon \frac{(\beta - \alpha U) Z}{\alpha \sin|\delta_1 h|} [2\Omega_y \sin|\delta_1(z+h)| + \\ &\quad + \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2} \cos|\delta_1(z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Ausdrücke sind von ähnlicher Form wie die Störungsbewegung (19, 4) in einer Schicht zwischen zwei starren Grenzflächen, indem die hyperbolischen Funktionen der Amplituden durch gewöhnliche Kreisfunktionen ersetzt worden sind.

In entsprechender Weise ergibt sich aus (8) für die Stromlinien:

$$\begin{aligned} \sin|\delta_1(z+h)| \cos(\alpha x - \beta t + \delta_2 z) &= K, \\ e^{\frac{2\Omega_x(\beta - \alpha U) \alpha K}{(\beta - \alpha U)^2 - 4\Omega_z^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\sin^2|\delta_1(z+h)| - K^2}} &= \frac{2\Omega_z}{\beta - \alpha U} = K' e^{\alpha y}, \end{aligned} \quad (14)$$

also wieder Gleichungen von derselben Art wie in § 19.

Die linke Seite der ersten Gleichung (14) verschwindet, wenn das Argument

$$|\delta_1|(z+h) = |\delta_1 h| \left(1 + \frac{z}{h}\right) = k\pi$$

ist (k ganze positive Zahl). Nun haben wir oben (S. 77) gesehen, daß die Größe $|\delta_1 h| = \tau + n\pi$ ist, wo τ in unserem Falle im ersten und zweiten Quadranten liegt (für $\Omega_y \beta \leq 0$ bleibt τ sogar ausschließlich im ersten Quadranten). Da nun $0 \leq 1 + \frac{z}{h} \leq 1$

ist, so wird das Argument $|\delta_1|(z+h)$ niemals den Wert $(n+1)\pi$ übersteigen können, und folglich höchstens $n+1$ mal ein Multiplum von π werden. Für $n=0$ wird deshalb $\sin|\delta_1(z+h)|$ nur an der starren Unterlage verschwinden; für $n=1, 2, \dots$ verschwindet er aber außerdem an $1, 2, \dots$ anderen, der Unterlage parallelen Ebenen. Wie aus dem Ausdruck für die Vertikalgeschwindigkeit (13) zu ersehen ist, verschwindet die Normalkomponente der Störungsgeschwindigkeit an diesen Flächen, wodurch die Bewegung keine Änderung erleidet, wenn dieselben erstarrt wären. Die ganze Flüssigkeitsschicht ist

folglich in $n+1$ parallele Partialschichten zerlegt, von welchen bloß die obere eine freie Oberfläche hat und folglich in Wellenbewegung geraten kann, während die Störungsbewegung in den n anderen so verlaufen, als ob diese zwischen starren Grenzflächen eingeschlossen wären. Deshalb haben wir oben S. 80 die $n=0$ entsprechende Bewegung als die Grundschwingung der Flüssigkeitsschicht charakterisiert, während die zu $n=1, 2, \dots$ gehörenden Bewegungen die erste, zweite, \dots Oberschwingung darstellen. Die Höhe der unteren Partialschichten ist immer gleich $\frac{\pi}{|\delta_1|}$, während die obere Schicht eine etwas kleinere Höhe hat. Für $n \geq 1$ ergibt sich mit Hilfe der Ebenen: $\alpha x + \delta_2 z = (k + \frac{1}{2})\pi + \beta t$, eine parallelepipedische Aufteilung des Stromfeldes in den unteren Partialschichten mit Eigenschwingungen, die denjenigen von § 19 sehr nahe kommen, wenn auch δ_1 dort einen anderen Wert angenommen hat.

Uns interessiert vor allem die Wellenbewegung in der oberen Schicht mit freier Oberfläche, und insbesondere für den Fall der Grundschwingung.

Für die Komponenten der Orbitalbahn folgen aus (9):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 h|} [-4 \Omega_x \Omega_z \sin |\delta_1 (z+h)| + \\ &\quad + (\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} i \cos |\delta_1 (z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ y - y_0 &= \frac{Z}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 h|} [2 \Omega_x (\beta - \alpha U) i \sin |\delta_1 (z+h)| + \\ &\quad + 2 \Omega_z \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \cos |\delta_1 (z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)} \\ z - z_0 &= \frac{Z}{\sin |\delta_1 h|} \sin |\delta_1 (z+h)| e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}, \end{aligned} \tag{15}$$

während die Gleichung der Orbitalebene nach (10) durch

$$\begin{aligned} 2 \Omega_x \sin^2 |\delta_1 (z+h)| (x - x_0) - \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \sin |\delta_1 (z+h)| \cos |\delta_1 (z+h)| (y - y_0) + \\ + 2 \Omega_z \left[-\cos^2 |\delta_1 (z+h)| + \frac{4 \Omega_x^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} \right] (z - z_0) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

gegeben ist. Von den verschiedenen Werten von δ_1 abgesehen, sind diese Gleichungen mit (19, 8–9) identisch.

Schließlich folgen aus (11) die rechtwinkligen Komponenten der elliptischen Orbitalbahn:

$$\begin{aligned} \xi &= \mp Z \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 |\delta_1 (z+h)| + 4 \Omega_x^2}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 h|} \sin (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) \\ \eta &= \pm Z \frac{\sqrt{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] (\beta - \alpha U)^2 \sin^2 |\delta_1 (z+h)| + 4 \Omega_z^2 [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2]}}{[(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 h|} \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z). \end{aligned} \tag{17}$$

Die lange Achse wird auch hier längs der ξ -Achse fallen. Für $(\beta - \alpha U)^2 = 4 \Omega_z^2$ geht übrigens die Ellipse in einen Kreis vom Radius $Z' |2 \Omega_z| \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_y^2}$ über. Es ist dann $Z = [(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2] Z'$ eingeführt worden. Gleichzeitig wird die Vertikalgeschwindigkeit verschwinden, die Störungsbewegung findet also nur in der xy -Ebene statt. Der Störungsdruck bleibt aber immer noch bestehen. Da die x -Koordinate wegen des Verschwindens von α aus den Gleichungen wegfällt, wird die Fortpflanzung jetzt ausschließlich in der z -Richtung stattfinden.

Wenn wir schließlich zu dem Falle: $0 < \beta - \alpha U < |2 \Omega_z|$ übergehen, so folgen die Störungsbewegungen aus den eben angegebenen Formeln durch einfache Änderung des Vorzeichens von $|\delta_1|$. Es ist also z. B.:

$$u = \frac{(\beta - \alpha U) Z}{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 h|} [-4 \Omega_x \Omega_z i \sin |\delta_1 (z+h)| + (\beta - \alpha U) \sqrt{-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \cos |\delta_1 (z+h)|] e^{i(\alpha x - \beta t + \delta_2 z)}.$$

Es ist von großer Bedeutung, daß das Argument $|\delta_1 h|$ für $n=0$ gewöhnlich im zweiten Quadranten liegt, und zwar zum größten Teil nahe an 180° . Der Ausdruck $\cos |\delta_1 (z+h)|$ wird dann positiv in einer Schicht vom Boden bis zu der Höhe $\frac{\pi}{2|\delta_1|}$, wo sie verschwindet, um in dem oberen Teil der Flüssigkeit negativ zu sein. An einer Ebene mit verschwindendem Werte des Argumentes: $\alpha x - \beta t + \delta_2 z$ kann folglich die Geschwindigkeitskomponente u verschiedene Richtungen an der Oberfläche und am Boden annehmen, was bei den gewöhnlichen Oberflächenwellen ausgeschlossen ist. Auch kann der Störungsdruck an dieser Ebene positiv unten und negativ oben sein.

Es ist sehr lehrreich, die »Stromfunktion« in der xz -Ebene näher zu untersuchen; sie lautet nach (14):

$$\sin |\delta_1 (z+h)| \cos (\alpha x - \beta t + \delta_2 z) = K.$$

Die linke Seite verschwindet an dem viereckigen Netz, das von den horizontalen Geraden: $z = -h, z = \frac{\pi}{|\delta_1|} - h, \dots, z = \frac{(n+1)\pi}{|\delta_1|} - h$, und von den parallelen schrägen Geraden: $\alpha x + \delta_2 z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \beta t$, (k ganze Zahl) gebildet ist. Die Projektion der Stromlinien auf die xz -Ebene muß dann in jedem Parallelogramm geschlossene, um den Mittelpunkt symmetrische Kurven ergeben. Die Umlaufsrichtung in zwei angrenzenden Parallelogrammen ist natürlich entgegengesetzt. Wenn die Oberfläche der Flüssigkeit nicht gerade in der oberen Ebene: $z = \frac{(n+1)\pi}{|\delta_1|} - h$, gelegen ist, so wird sie verschiedenen Normalkomponenten ausgesetzt sein, und folglich als freie Fläche in Schwingungen geraten. Ihre Gleichung wird wie früher durch

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

gegeben sein.

Wenn die Oberfläche in die obere Hälfte der Parallelogramme fällt, d. h. wenn $|\delta_1 h|$ im zweiten Quadranten liegt, was bei der Grundschwingung $n=0$ immer zutrifft, mit einer einzigen Ausnahme für sehr lange Wellen, wenn $\Omega_y \beta > 0$ ist (s. S. 77), wird die x -Komponente der Geschwindigkeit in einem Parallelogramm entgegengesetzte Werte an der Oberfläche und am Boden erhalten. Es folgt dann sofort, daß in dem oberen Teil der Flüssigkeit die Projektion der Orbitalbahn auf die xz -Ebene positive Umlaufsrichtung der Teilchen ergeben wird, wenn sich die Wellen in der positiven x -Richtung fortpflanzen, und negative Umlaufsrichtung, wenn sie sich in der negativen x -Richtung fortpflanzen. Auch in dieser Beziehung besteht also ein direkter Gegensatz zu den Verhältnissen bei den gewöhnlichen Oberflächenwellen.

Die Umlaufsrichtung in der Projektion der Orbitalbahn auf die xy -Ebene wird aber dasselbe Verhalten wie früher zeigen, da die Gleichungen (19, 14–15) auch hier gültig sind.

Der Neigungswinkel θ der Orbitalebene zur xy -Ebene ergibt sich nach (18, 16) aus:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \sin |\delta_1 (z+h)|}{2 \Omega_z \sqrt{[-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \cos^2 |\delta_1 (z+h)| + 4 \Omega_x^2}},$$

und erhält somit seinen maximalen Wert, wenn $|\delta_1 (z+h)| = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die Vertikalgeschwindigkeit am größten ist.

Es ist dann:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-(\beta - aU)^2 + 4\Omega_z^2}{|4\Omega_x\Omega_z|},$$

welcher Ausdruck bei verschwindenden Orbitalfrequenzen seinen Maximalwert: $\left| \frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right|$, erhält.

Die in die xz -Ebene fallende Komponente von Ω ist folglich in diesem Falle den Orbital-ebenen parallel.

Zu beiden Seiten der Ebene maximaler Vertikalgeschwindigkeit: $|\delta_1(z+h)| = \frac{\pi}{2}$,

ist die Neigung abnehmend; am Boden muß sie ja immer gleich Null sein, und auch an der Oberfläche wird sie, wenigstens für kleine Wellen, nahe an Null kommen. Die Bewegung ist dort quasihorizontal; für $\beta - aU = 0$, d. h. $|\delta_1 h| = \pi$, wird sie zuletzt rein horizontal. Die große Achse in der elliptischen Orbitalbahn, die diesmal längs der η -Achse fällt, wird dann unendlich; um dies zu vermeiden, muß deshalb die Amplitude für $\beta - aU = 0$ verschwinden, was durch Einführung einer neuen willkürlichen Konstante $\sin |\delta_1 h| Z''$ anstatt Z möglich wird. Es wird aber dann auch die Störungsbewegung mit $\beta - aU$ gegen Null gehen.

Für den Winkel ψ zwischen der x -Achse und der Schnittlinie der $\xi\eta$ - und der xy -Ebene ergeben sich Änderungen mit der Wellenlänge und mit der Höhe über dem Boden, die denjenigen für die Schwingungen einer einzigen Schicht zwischen starren Grenzflächen sehr ähnlich sind.

Wir können aber darauf nicht näher eingehen und begnügen uns mit einer Hinweisung auf die Resultate des § 19.

§ 22. Die Wellenbewegung in zwei unendlichen Schichten.

Wenn zwei unendliche Schichten vorhanden sind, wird die Störungsbewegung der Schicht I mit den Formeln (20, 1) übereinstimmen, während diejenige der Schicht II aus den generellen Gleichungen (18, 11) folgt, wenn dort

$$\lim_{h^{\text{II}} \rightarrow \infty} \frac{\sinh \delta_1^{\text{II}}(z - h^{\text{II}})}{\sinh \delta_1^{\text{II}} h^{\text{II}}} = -e^{\pm \delta_1^{\text{II}} z}, \quad \lim_{h^{\text{II}} \rightarrow \infty} \frac{\cosh \delta_1^{\text{II}}(z - h^{\text{II}})}{\sinh \delta_1^{\text{II}} h^{\text{II}}} = \mp e^{\pm \delta_1^{\text{II}} z}$$

eingeführt wird. Es sind folglich:

$$\begin{aligned} u^{\text{I}} &= \frac{(\beta - aU^{\text{I}}) Z}{(\beta - aU^{\text{I}})^2 - 4\Omega_z^2} [4\Omega_x\Omega_z i \pm (\beta - aU^{\text{I}}) \sqrt{(\beta - aU^{\text{I}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}] e^{i(ax - \beta t) + \delta^{\text{I}} z} \\ v^{\text{I}} &= \frac{(\beta - aU^{\text{I}}) Z}{(\beta - aU^{\text{I}})^2 - 4\Omega_z^2} [2\Omega_x(\beta - aU^{\text{I}}) \mp 2\Omega_z \sqrt{(\beta - aU^{\text{I}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} i] e^{i(ax - \beta t) + \delta^{\text{I}} z} \\ w^{\text{I}} &= -i(\beta - aU^{\text{I}}) Z e^{i(ax - \beta t) + \delta^{\text{I}} z} \\ p^{\text{I}} &= \varepsilon^{\text{I}} \frac{\beta - aU^{\text{I}}}{\alpha} Z [2\Omega_y \pm \sqrt{(\beta - aU^{\text{I}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}] e^{i(ax - \beta t) + \delta^{\text{I}} z}, \\ u^{\text{II}} &= \frac{(\beta - aU^{\text{II}}) Z}{(\beta - aU^{\text{II}})^2 - 4\Omega_z^2} [4\Omega_x\Omega_z i \mp (\beta - aU^{\text{II}}) \sqrt{(\beta - aU^{\text{II}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}] e^{i(ax - \beta t) - \delta^{\text{II}} z} \\ v^{\text{II}} &= \frac{(\beta - aU^{\text{II}}) Z}{(\beta - aU^{\text{II}})^2 - 4\Omega_z^2} [2\Omega_x(\beta - aU^{\text{II}}) \pm 2\Omega_z \sqrt{(\beta - aU^{\text{II}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} i] e^{i(ax - \beta t) - \delta^{\text{II}} z} \\ w^{\text{II}} &= -i(\beta - aU^{\text{II}}) Z e^{i(ax - \beta t) - \delta^{\text{II}} z} \\ p^{\text{II}} &= \varepsilon^{\text{II}} \frac{\beta - aU^{\text{II}}}{\alpha} Z [2\Omega_y \mp \sqrt{(\beta - aU^{\text{II}})^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2}] e^{i(ax - \beta t) - \delta^{\text{II}} z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es bedeuten hier:

$$\begin{aligned}\delta^I &= \pm \delta_1^I + i \delta_2^I = \alpha \frac{4 \Omega_x \Omega_z i \pm (\beta - \alpha U^I) \sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_z^2}, \\ \delta^{II} &= \mp \delta_1^{II} - i \delta_2^{II} = \alpha \frac{-4 \Omega_x \Omega_z i \pm (\beta - \alpha U^{II}) \sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}}{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_z^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Wegen des Verschwindens der Bewegung im Unendlichen muß das doppelte Vorzeichen vor den Wurzeln so gewählt werden, daß die Ungleichungen

$$R(\delta^I) > 0, \quad R(\delta^{II}) > 0 \quad (3)$$

immer erfüllt sind.

Aus der Frequenzgleichung (18, 10) ergibt sich ferner, wenn $\cotgh \delta_1^I h^I = \cotgh \delta_1^{II} h^{II} = 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\pm \varepsilon^I (\beta - \alpha U^I) \sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} \pm \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II}) \sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2} = \\ = (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) (\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta).\end{aligned}\quad (4)$$

Für die Diskussion dieser Relation zwischen α und β , wozu wir jetzt übergehen werden, könnte es vielleicht vorteilhaft erscheinen, die Gleichung zuerst auf rationale Form zu bringen. Für $U^I \neq U^{II}$ müßte dann die Gleichung zweimal quadriert werden, wodurch wir auf eine Relation 8^{ten} Grades zwischen α und β geführt sind. Zwar ließe sich diese mittels hypergeometrischer Funktionen höherer Ordnung auflösen; da aber viele Parameter in die Gleichung (4) eingehen, wäre es wohl zu erwarten, daß ein ziemlich kompliziertes und unübersichtliches Resultat erscheine, und daß folglich mittels dieser Methode nicht viel zu gewinnen wäre.

Ein anderer fundamentaler Umstand muß auch erinnert werden: die acht Wurzeln von β , die sich als Funktionen von α und den Parametern ergeben, würden nämlich dem Falle entsprechen, daß die positiven und die negativen Vorzeichen vor den zwei Wurzeln auf der linken Seite von (4) sämtlich verwendet werden könnten. Dies ist aber nicht möglich, wie es gezeigt werden kann.

Wir begnügen uns damit, diese Tatsache für den Spezialfall: $\Omega_x = 0$, darzulegen. Es ergeben sich dann aus (2):

$$\delta^I = \frac{\alpha}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^I}\right)^2}}, \quad \delta^{II} = \frac{\alpha}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^{II}}\right)^2}};$$

da $\alpha \geq 0$ vorausgesetzt wird, so kann hier wegen (3) nur das obere Vorzeichen vor den Wurzeln verwendet werden.

Die Frequenzgleichung kann aber nun in der Form:

$$\varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^I}\right)^2} \right) + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^I)^2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^{II}}\right)^2} \right) = (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) (\alpha g_z - 2 \Omega_y \beta)$$

geschrieben werden, wo, wie wir eben gesehen haben, von den zwei doppelten Vorzeichen nur die oberen zu verwenden sind.

Die acht Wurzeln müssen deshalb in vier Gruppen von je zwei Wurzeln eingeteilt werden können, die sich durch das Verhalten der entsprechenden Integrale für $z = +\infty$ und $z = -\infty$ kennzeichnen werden. Zwei Wurzeln werden abklingende und zwei werden unbegrenzt anwachsende Störungen für $z = \pm \infty$ ergeben. Ferner werden zwei Wurzeln abklingende Störung für $z = +\infty$ und unbegrenzt anwachsende Störung für $z = -\infty$ ergeben, während schließlich die zwei letzten Wurzeln unbegrenzt anwachsende Störung für $z = +\infty$ und abklingende Störung für $z = -\infty$ ergeben. Nur die zwei ersten Wurzeln mit

abklingender Störung für $z = \pm \infty$ werden die Ungleichungen (3) erfüllen können. In der weiteren Untersuchung brauchen wir deshalb ausschließlich diese Wurzeln zu berücksichtigen, da sie von sämtlichen acht Wurzeln der rationalen Frequenzgleichung die einzigen von physikalischer Bedeutung sind.

Es muß folglich die Frequenzgleichung in der irrationalen Form (4) der Untersuchung zugrunde gelegt werden. Wir schreiben sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^I)^2}} + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^{II})^2}} = \\ &= \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2 \Omega_y U^{II}) (\beta - \alpha U^I) - (g_z - 2 \Omega_y U^I) (\beta - \alpha U^{II})]. \end{aligned} \quad (4')$$

Wenn die linke Seite in dieser Form erscheint, so wissen wir aus der obigen Diskussion, daß die Gleichung (4') bloß zwei Wurzeln besitzen kann, die die Ungleichungen (3) befriedigen. Durch die vorgenommene Umformung der rechten Seite von (4) haben wir außerdem erreicht, daß die Variablen α und β nunmehr bloß in zwei linearen Kombinationen, in den Orbitalfrequenzen $\beta - \alpha U^I$ und $\beta - \alpha U^{II}$, vorkommen, was von großer Bedeutung ist und sehr zur Erleichterung der Diskussion beitragen wird.

Wie es in den vorigen Paragraphen gemacht worden ist, werden wir auch hier die Frequenzgleichung in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch aufzeichnen. Die früher verwendeten Koordinaten α und $\beta - \alpha U$ werden aber hier nicht mehr geeignet sein; sondern wir wählen vielmehr die zwei in (4') vorkommenden Relationen zwischen α und β , die Orbitalfrequenzen, als Koordinaten, und zwar mit $\beta - \alpha U^I$ als Abszisse und $\beta - \alpha U^{II}$ als Ordinate.

Der einzige Fall, wo dies nicht möglich ist, wird für $U^I = U^{II} = U$ eintreffen. Dann werden aber nicht mehr zwei, sondern nur noch ein einziger Wurzel Ausdruck in (4') vorkommen, und wir erhalten dann, mit α als Abszisse und $\beta - \alpha U$ als Ordinate, eine Frequenzkurve, die denjenigen der vorigen Paragraphen ganz ähnlich ist.

In dieser Ebene der Orbitalfrequenzen wird nun die Gleichung (4') eine Kurve darstellen, deren qualitativen Verlauf wir jetzt näher untersuchen werden.

Für sehr große Orbitalfrequenzen werden diese im Verhältnis zu der Rotation ganz überwiegen; die zwei Wurzel Ausdrücke von (4') können dann angenähert durch 1 ersetzt werden, wodurch sich ergibt:

$$\varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2 \Omega_y U^{II}) (\beta - \alpha U^I) - (g_z - 2 \Omega_y U^I) (\beta - \alpha U^{II})].$$

Diese Gleichung ist mit der Frequenzgleichung (7, 9) identisch. In der Diskussion dieser Gleichung (§ 8) haben wir β als Funktion von α untersucht, was am vorteilhaftesten ist, da α immer reell bleibt, während β auch komplex werden kann. Bei der hier verwendeten Form der Gleichung, wo die Abhängigkeit der Orbitalfrequenzen voneinander untersucht wird, muß dann erinnert werden, daß die Koordinaten bei eintretender Instabilität der Bewegung gleichzeitig ins Komplexe übergehen werden. Ihre Abhängigkeit von der reellen Größe α ist aber auch leicht zu bestimmen, denn in unserem Koordinatensystem wird die α -Achse mit der durch Origo hindurchgehenden Gerade, die den Winkel -45° mit der Abszissenachse bildet, zusammenfallen. Die Koordinate längs dieser Achse ist übrigens gleich $\frac{1}{2} \sqrt{2} (U^{II} - U^I) \alpha$. Entsprechend ist die Koordinate längs der Mittellinie zwischen der positiven Abszissen- und Ordinatenachse gleich $\frac{1}{2} \sqrt{2} [2\beta - \alpha (U^I + U^{II})]$; für $U^I = -U^{II}$ reduziert sich diese einfacherweise auf $\sqrt{2} \beta$.

Den maximalen, bzw. minimalen Wert von α bei reellen Orbitalfrequenzen erhalten wir, wenn eine zu dieser letzten Achse parallele Gerade die Frequenzkurve berührt. Für noch größere, bzw. kleinere α -Werte würden sich keine reellen Schnittpunkte mit der Frequenzkurve ergeben.

Die vereinfachte Frequenzgleichung stellt nun eine durch Origo hindurchgehende Ellipse mit dem Zentrum

$$\left(\frac{(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})(g_z - 2 \Omega_y U^{II})}{2 \varepsilon^I (U^{II} - U^I)}, - \frac{(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})(g_z - 2 \Omega_y U^I)}{2 \varepsilon^{II} (U^{II} - U^I)} \right)$$

dar; die lange Achse (in Richtung der Ordinatenachse) ist durch

$$\frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \sqrt{\varepsilon^I \varepsilon^{II}} |U^{II} - U^I|} \sqrt{\varepsilon^I (g_z - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g_z - 2 \Omega_y U^{II})^2} \text{ und die kurze Achse durch}$$

$$\frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2 \varepsilon^I \sqrt{\varepsilon^{II}} |U^{II} - U^I|} \sqrt{\varepsilon^I (g_z - 2 \Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II} (g_z - 2 \Omega_y U^{II})^2} \text{ gegeben.}$$

Das Achsenverhältnis ist also gleich $\sqrt{\frac{\varepsilon^{II}}{\varepsilon^I}}$ und wird folglich bei den meteorologisch vorkommenden Dichtesprüngen sehr nahe an 1 liegen. Das Zentrum der Ellipse wird dann auch angenähert an der α -Achse liegen.

Nach den bei der Ableitung der vereinfachten Gleichung gemachten Voraussetzungen wird die Ellipse nur für Orbitalfrequenzen viel größer als $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ gelten können. Besonders kann sie gar nicht für Orbitalfrequenzen kleiner als $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ gelten, denn in diesem Falle werden ja die Wurzelausdrücke in (4') komplex.

Wenn beide Orbitalfrequenzen gleich $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ sind, d. h. für $\alpha=0$, verschwindet die linke Seite von (4'). Wenn außerdem $\Omega_y=0$ ist, verschwindet auch die rechte Seite; die Frequenzgleichung ist also dann befriedigt. Für $\Omega_y \neq 0$ entstehen gewisse Komplikationen (s. S. 70), mit denen wir uns aber hier nicht aufhalten können. Für Orbitalfrequenzen etwas größer als $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ wird die genaue Kurve (4') von der Ellipse abweichen. Eine weitere approximative Gleichung kann dann aus (4') durch Entwicklung der Wurzelausdrücke nach steigenden Potenzen von $\frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U)^2}$ erhalten werden; durch Beschränkung auf die zwei ersten Glieder in der Reihenentwicklung erhalten wir hierdurch:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 - (\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) (2 \Omega_x^2 + 2 \Omega_z^2) = \\ & = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2 \Omega_y U^{II})(\beta - \alpha U^I) - (g_z - 2 \Omega_y U^I)(\beta - \alpha U^{II})]. \end{aligned} \quad (5)$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Ellipse mit der langen Achse in der Ordinatenrichtung und mit demselben Zentrum wie die frühere dar; sie geht aber nicht mehr durch Origo, da die Achsen etwas größer geworden sind.

Fig. 10 gibt die graphische Darstellung der Gleichung (4') mit den Orbitalfrequenzen als Koordinatenachsen. Die gestrichelte Kurve stellt die bei kleiner Rotation sich ergebende Ellipse (5), die voll ausgezogene Kurve die genaue Kurve dar. Die Abweichung der zwei Kurven voneinander ist für größere Werte der Orbitalfrequenzen ganz unmerkbar. Als Einheit längs den Achsen ist die Größe $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} = 1,458 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ verwendet worden. Es sind ferner $\Omega_y = 0$, $g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}$, der Temperatursprung 1° und der Windsprung 20 m sec^{-1} gewählt worden. Hätten wir einen größeren Temperatursprung oder einen kleineren Windsprung verwendet, so würde die Ellipse größer werden, da die

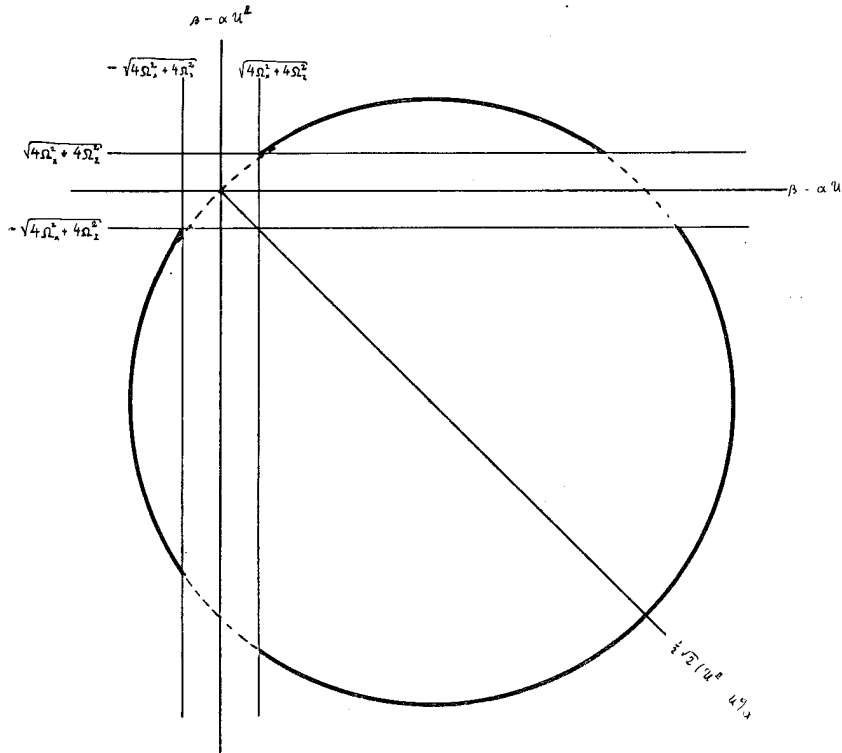


Fig. 10.

Achsen derselben mit $\frac{\epsilon^I - \epsilon^{II}}{U^{II} - U^I}$ proportional sind. Es ist schließlich $U^{II} - U^I > 0$ vorausgesetzt worden; sollte dies nicht der Fall sein, so ließe sich trotzdem die Figur durch einfaches Umtauschen der Achsenrichtungen verwenden, wie es sofort aus (4') zu ersehen ist.

Aus der Figur folgt nun erstens, daß für lange Wellen immer zwei reelle Wurzeln der Gleichung (4') vorhanden sind; der einen entsprechen positive, der anderen negative Orbitalfrequenzen in beiden Schichten.

Bei wachsendem α werden anfänglich die Beträge der Orbitalfrequenzen wachsen; der eine Betrag wird aber bald einen Maximalwert erreichen, um dann wieder abzunehmen, bis er den Wert $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ nochmals erreicht. Der hierher gehörige Wert von α bildet vorläufig einen Abschluß der langen Wellen, denn für größere α -Werte ergibt sich anfänglich keine Lösung der Frequenzgleichung, wenigstens nicht wenn die Schichten von unendlicher Tiefe sind. Die eine Orbitalfrequenz ist nämlich in diesem α -Gebiet kleiner als $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$. Erst wenn α so groß geworden ist, daß dies nicht mehr der Fall ist, ergeben sich wieder zwei Wurzeln, diesmal mit Orbitalfrequenzen von entgegengesetztem Vorzeichen. Mit wachsendem α werden auch die Beträge dieser Wurzeln zunehmen, bis die Doppelwurzel erreicht wird, mit folgendem Umschlag zu komplexen Orbitalfrequenzen.

Für diesen maximalen Wert von α bei reellen Orbitalfrequenzen wird nicht allein die Gleichung (4'), sondern auch ihre erste Derivierte nach β — der Doppelwurzel wegen — Gültigkeit besitzen. Für diese erhalten wir nun:

$$\epsilon^I \frac{2(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}{\sqrt{(\beta - \alpha U^I)^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}} + \epsilon^{II} \frac{2(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}{\sqrt{(\beta - \alpha U^{II})^2 - 4 \Omega_x^2 - 4 \Omega_z^2}} = -(\epsilon^I - \epsilon^{II}) 2 \Omega_y.$$

Da die Orbitalfrequenzen der Rotation sehr überwiegen, können hier die Wurzel-
ausdrücke wieder in Reihen entwickelt werden, wodurch sich ergibt:

$$\varepsilon^I (\beta - aU^I) + \varepsilon^{II} (\beta - aU^{II}) = -(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \Omega_y. \quad (6)$$

Diese Gleichung stellt eine durch das Zentrum der Ellipse (5) hindurchgehenden Gerade dar. Mit den meteorologisch vorkommenden Werten der Konstanten ε und Ω_y wird sie sehr nahe an der α -Achse verlaufen. Der Umschlag erfolgt deshalb bei großen Werten der Orbitalfrequenzen.

Für die Koordinaten der Schnittpunkte zwischen der Ellipse (5), die mit demselben Näherungsgrad aus der Frequenzgleichung erhalten wurde, und der Geraden (6) ergeben sich:

$$\begin{aligned} \beta - aU^I &= \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2\varepsilon^I(U^{II} - U^I)} \left\{ g_z - 2\Omega_y U^{II} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[\varepsilon^I(g_z - 2\Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II}(g_z - 2\Omega_y U^{II})^2] \frac{1}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} + \frac{8\varepsilon^I\varepsilon^{II}}{(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})^2} (U^{II} - U^I)^2 (\Omega_x^2 + \Omega_z^2)} \right\} \\ \beta - aU^{II} &= -\frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{2\varepsilon^{II}(U^{II} - U^I)} \left\{ g_z - 2\Omega_y U^I \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[\varepsilon^I(g_z - 2\Omega_y U^I)^2 + \varepsilon^{II}(g_z - 2\Omega_y U^{II})^2] \frac{1}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} + \frac{8\varepsilon^I\varepsilon^{II}}{(\varepsilon^I - \varepsilon^{II})^2} (U^{II} - U^I)^2 (\Omega_x^2 + \Omega_z^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus könnte auch der Ausdruck für a berechnet werden; dieser wird für $\Omega_x = \Omega_z = 0$ in die Gleichung (8, 6) übergehen.

Für noch größeres α werden die Orbitalfrequenzen komplex. Da die absoluten Beträge derselben bei dem Umschlag groß waren, müssen sie auch in der unmittelbaren Nähe des Labilitätspunktes groß bleiben. Dann ist es aber gestattet, die Wurzel- ausdrücke zu entwickeln, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varepsilon^I (\beta_1 + i\beta_2 - aU^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta_1 + i\beta_2 - aU^{II})^2 - (\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) (2\Omega_x^2 + 2\Omega_z^2) = \\ = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta_1 + i\beta_2 - aU^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta_1 + i\beta_2 - aU^{II})]. \end{aligned}$$

Zerlegung in Imaginär- und Realteil gibt ferner:

$$\varepsilon^I (\beta_1 - aU^I) + \varepsilon^{II} (\beta_1 - aU^{II}) = -(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \Omega_y, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^I (\beta_1 - aU^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta_1 - aU^{II})^2 - (\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) (\beta_2^2 + 2\Omega_x^2 + 2\Omega_z^2) = \\ = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta_1 - aU^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta_1 - aU^{II})]. \quad (7) \end{aligned}$$

Der Realteil der Orbitalfrequenzen liegt also mit dieser Näherung auf der durch das Zentrum der Ellipse hindurchgehenden Geraden (6) und wird folglich mit α gegen Unendlich gehen. Dann wird es aber für alle komplexe Wurzeln gestattet sein, die obige Reihenentwicklung auszuführen, und nicht bloß in der Nähe des Labilitätspunktes, wie es oben vorausgesetzt worden ist.

Die Gleichung (7) stellt auch eine Ellipse dar, mit demselben Zentrum wie (5). Die Achsen sind aber hier größer, indem auch der Ausdruck $(\varepsilon^I + \varepsilon^{II})\beta_2^2$ eingeht. Da die Realteile der Orbitalfrequenzen mit α unbegrenzt wachsen, muß dann die Ellipse (7) immer größer werden, woraus zu schließen ist, daß auch der Imaginärteil der Frequenz, β_2 , mit α gegen Unendlich gehen muß.

Übrigens folgt aus (7), daß β_2 zwei gleichgroße, aber entgegengesetzte Werte annehmen kann. Entsprechend wird die allgemeine Störung aus einer Summe von zwei Integralen der Form (1) bestehen; dem positiven Werte von β_2 entspricht eine mit der Zeit unbegrenzt anwachsende Welle, während der negative Wert eine gedämpfte Welle ergibt.

Beide Wellen haben dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die nach (6) durch

$$c = \frac{\varepsilon^I U^I + \varepsilon^{II} U^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} - \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} \frac{\Omega_y}{a}$$

gegeben ist, d. h. die Wellen pflanzen sich angenähert nach demselben konvektiven Gesetz fort wie bei verschwindenden x - und z -Komponenten der Rotation (s. oben S. 23).

Auch für reelle Wurzeln der Frequenzgleichung werden jedem gegebenen Wert von a zwei verschiedene Orbitalfrequenzen entsprechen. Die allgemeine Störung ist also auch hier aus zwei Integralen (1) zusammengesetzt. Der Einfachheit halber werden wir uns aber mit der Diskussion der Elementarlösung begnügen, wozu wir jetzt übergehen werden.

(a) Bei *reellen* Wurzeln der Frequenzgleichung ergeben sich, wie im Falle einer unendlichen Schicht (§ 20), die folgenden linearen Relationen mit konstanten Koeffizienten zwischen den Geschwindigkeitskomponenten (1):

$$2 \Omega_x u^I - (\beta - a U^I) \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^I)^2}} v^I + 2 \Omega_z w^I = 0$$

$$2 \Omega_x u^{II} + (\beta - a U^{II}) \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^{II})^2}} v^{II} + 2 \Omega_z w^{II} = 0,$$

woraus wieder die folgenden Gleichungen der Stromlinienebenen erhalten werden:

$$2 \Omega_x x - (\beta - a U^I) \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^I)^2}} y + 2 \Omega_z z = K^I$$

$$2 \Omega_x x + (\beta - a U^{II}) \sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^{II})^2}} y + 2 \Omega_z z = K^{II}.$$
(8)

Die im ersten Quadranten gelegenen Neigungswinkel θ^I und θ^{II} dieser Ebenen mit der xy -Ebene folgen, wie in (20, 9), aus:

$$\cos \theta = \left| \frac{2 \Omega_z}{\beta - a U^I} \right|, \quad \cos \theta^{II} = \left| \frac{2 \Omega_z}{\beta - a U^{II}} \right|,$$
(9)

und die Winkel zwischen der x -Achse und den Schnittlinien der Stromlinienebenen mit der xy -Ebene ergeben sich, nach (20, 10), aus:

$$\sin \psi^I = \frac{2 \Omega_x}{\pm \sqrt{(\beta - a U^I)^2 - 4 \Omega_z^2}}, \quad \cos \psi^I = (\beta - a U^I) \frac{\sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^I)^2}}}{\pm \sqrt{(\beta - a U^I)^2 - 4 \Omega_z^2}},$$

$$\sin \psi^{II} = \frac{2 \Omega_x}{\pm \sqrt{(\beta - a U^{II})^2 - 4 \Omega_z^2}}, \quad \cos \psi^{II} = -(\beta - a U^{II}) \frac{\sqrt{1 - \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - a U^{II})^2}}}{\pm \sqrt{(\beta - a U^{II})^2 - 4 \Omega_z^2}}.$$
(10)

Im Nenner dieser Formeln ist \pm zu wählen, je nachdem $\Omega_z \geq 0$ ist.

Die Neigung ist folglich am kleinsten bei der unendlich langen Welle; es ist dann $\text{tg } \theta^I = \text{tg } \theta^{II} = \left| \frac{\Omega_x}{\Omega_z} \right|$. Wenn die Orbitalfrequenzen von demselben Vorzeichen sind, wird die Neigung in der einen Schicht für wachsendes a immer zunehmen, während sie in der anderen Schicht nach Erreichung eines maximalen Wertes wieder abnehmen wird,

um zuletzt den bei unendlich langen Wellen vorkommenden Wert nochmals zu erhalten. Wenn die Orbitalfrequenzen von entgegengesetztem Vorzeichen sind, ist auch θ in der einen Schicht mit α immer wachsend, und zwar von dem kleinsten Werte: $\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\Omega_x}{\Omega_z} \right|$, an; in der anderen Schicht aber ist sie anfänglich größer und zuerst wachsend, dann wieder abnehmend. Bei dem Umschlag zu komplexen Wurzeln ist die Neigung beinahe dieselbe in beiden Schichten geworden, sie ist nur ein klein wenig größer in der Schicht II.

Die Änderung des Winkels ψ soll nur für positive Werte von Ω_x , Ω_z und $U^{\text{II}} - U^{\text{I}}$ untersucht werden.

Wenn beide Orbitalfrequenzen positiv sind, liegt ψ^{I} im ersten und ψ^{II} im zweiten Quadranten, und zwar sind sie gleich 0, bzw. 180° für $\Omega_x=0$. Bei sehr langen Wellen liegen sie nahe an 90° ; mit abnehmender Wellenlänge wird ψ^{I} langsam abnehmen, während ψ^{II} zuerst wächst und dann wieder nach 90° zurückgeht.

Für die Welle mit negativen Orbitalfrequenzen ergeben sich ähnliche Resultate, wenn die Schicht-Indizes vertauscht werden.

Wenn schließlich $\beta - \alpha U^{\text{I}} > 0$, $\beta - \alpha U^{\text{II}} < 0$ sind, liegen beide Winkel im ersten Quadranten. Von den für jeden α -Wert möglichen zwei Wellen betrachten wir bloß diejenige mit dem größten Wert von $\beta - \alpha U^{\text{I}}$.

ψ^{II} wird dann im Anfang 90° sein und mit der Wellenlänge immer abnehmen, bis der Umschlag zu komplexen Wurzeln erfolgt. Für ψ^{I} können die Wurzeln in (10) entwickelt werden; es ergibt sich dann angenähert:

$$\sin \psi^{\text{I}} = \frac{2 \Omega_x}{|\beta - \alpha U^{\text{I}}|}.$$

ψ^{I} ist also im Anfang klein und wird mit wachsendem α zuerst noch kleiner, bis ein Minimalwert erreicht ist; dann fängt er an zu wachsen und ist bei dem Umschlag zu komplexen Wurzeln sehr nahe an ψ^{II} gekommen.

Die Form der Stromlinien in den Ebenen (8) ergibt sich nach (20, 11) aus:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha x - \beta t + \delta_2^{\text{I}} z) &= K^{\text{I}} e^{\mp \delta_1^{\text{I}} z} \\ \cos(\alpha x - \beta t + \delta_2^{\text{II}} z) &= K^{\text{II}} e^{\mp \delta_1^{\text{II}} z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die asymptotischen Ebenen:

$$\alpha x + \delta_2^{\text{I}} z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi + \beta t, \quad \text{bzw.} \quad \alpha x + \delta_2^{\text{II}} z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi + \beta t,$$

werden für gleiche, ganzzahlige k -Werte einander an der Diskontinuitätsfläche schneiden; da im allgemeinen $\delta_2^{\text{I}} \neq \delta_2^{\text{II}}$ ist, haben sie verschiedene Neigung zu derselben, wenn auch die Neigungswinkel immer in demselben Quadranten liegen. In beiden Schichten verlaufen die Stromlinien mit ihrer Konkavität gegen die Diskontinuitätsfläche zu.

Die Gleichungen der Orbitalbahn ergeben sich wie gewöhnlich aus (1); wir wollen sie nicht hinschreiben, da sie unmittelbar aus (20, 12) durch Einführung der Indizes I und II folgen, indem wir dabei aufpassen müssen, daß die Wurzeln in den zwei Schichten entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Wie es bei einer einzigen unendlichen Schicht der Fall gewesen ist, wird auch hier die Orbitalbahn *kreisförmig* vom Radius:

$$r^{\text{I}} = \frac{|\beta - \alpha U^{\text{I}}| Z}{\sqrt{(\beta - \alpha U^{\text{I}})^2 - 4 \Omega_z^2}} e^{\pm \delta_1^{\text{I}} z}, \quad r^{\text{II}} = \frac{|\beta - \alpha U^{\text{II}}| Z}{\sqrt{(\beta - \alpha U^{\text{II}})^2 - 4 \Omega_z^2}} e^{\pm \delta_1^{\text{II}} z}. \quad (12)$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich aus (19, 15):

$$\frac{d\varphi^I}{dt} = -\frac{|\Omega_z|}{\Omega_z} |\beta - \alpha U^I|, \quad \frac{d\varphi^{II}}{dt} = -\frac{|\Omega_z|}{\Omega_z} |\beta - \alpha U^{II}|; \quad (13)$$

sie sind folglich gleich dem Betrage der Orbitalfrequenzen.

Die Umlaufsrichtung ist in beiden Schichten negativ oder positiv, je nachdem $\Omega_z \geq 0$ ist. Dasselbe gilt auch für die Projektion des Orbitalkreises auf der xy -Ebene.

(b) Bei *komplexen* Wurzeln der Frequenzgleichung besteht auch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen den Geschwindigkeitskomponenten. Um dieselbe zu erhalten, schreiben wir für einen Augenblick diese Komponenten in der kürzeren Form:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (A_1 + i A_2) e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ v &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (B_1 + i B_2) e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z} \\ w &= \frac{(\beta - \alpha U) Z}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_z^2} (C_1 + i C_2) e^{i(\alpha x - \beta t) + \delta z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Nach (20, 6) werden dann die folgenden Relationen zwischen den Koeffizienten bestehen:

$$\begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &= A_2^2 + B_2^2 + C_2^2, \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Aus den Geschwindigkeitskomponenten in der Form (14) kann nun die gesuchte Relation sofort erhalten werden. Es ist nämlich:

$$(B_1 C_2 - B_2 C_1) u - (A_1 C_2 - A_2 C_1) v + (A_1 B_2 - A_2 B_1) w = 0,$$

indem dann sowohl der reelle wie auch der komplexe Teil der Integrale identisch verschwinden. Hiermit ist dann auch die Gleichung der Stromlinienebenen gegeben, die wir folgendermaßen schreiben:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = K. \quad (16)$$

Es sollen hier λ , μ , ν die drei Richtungskosinus der Normale zu den Stromlinienebenen darstellen; mit einem später zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor M erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned} M\lambda &= B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ M\mu &= -(A_1 C_2 - A_2 C_1) \\ M\nu &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen, unter Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

ergibt sich erstens:

$$M^2 = (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2,$$

woraus wieder, nach Umformung der rechten Seite unter Berücksichtigung von (15), das einfache Resultat:

$$M = \pm (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \quad (18)$$

herauskommt. Das doppelte Vorzeichen ist hinzugefügt um anzudeuten, daß die Normalenrichtung zweideutig ist.

Für die Berechnung der Richtungskosinus λ , μ , ν setzen wir zuerst zur Abkürzung:

$$\pm \sqrt{(\beta - aU)^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2} = m_1 + i m_2. \quad (19)$$

Hieraus ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \frac{2 m_1^2}{2 m_2^2} = & \pm [(\beta_1 - aU)^2 - \beta_2^2 - 4\Omega_x^2 - 4\Omega_z^2] + \\ & + \sqrt{[(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2]^2 - 8(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)[(\beta_1 - aU)^2 - \beta_2^2] + (4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2)^2}, \quad (20) \end{aligned}$$

wo rechts das obere Vorzeichen für m_1 und das untere Vorzeichen für m_2 zu verwenden ist.

Mit den Werten (1) für die Konstanten A , B , C folgen dann aus (17):

$$\begin{aligned} M\lambda = & \left\{ -2\Omega_x[(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 - 4\Omega_z^2] + 4\Omega_z\beta_2 m_1 - \right. \\ & \left. - 2\Omega_z\beta_2 [(\beta_1 - aU)^2 - \beta_2^2 - 4\Omega_z^2] \frac{1}{m_1} \right\} (\beta_1 - aU) \\ M\mu = & \left\{ [(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 - 4\Omega_z^2] m_1 + 8\Omega_x\Omega_z\beta_2 + \right. \\ & \left. + \beta_2^2[(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 + 4\Omega_z^2] \frac{1}{m_1} \right\} (\beta_1 - aU) \\ M\nu = & - \left\{ 2\Omega_z(m_1^2 + m_2^2 + 4\Omega_x^2) + 2\Omega_x\beta_2 [(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 + 4\Omega_z^2] \frac{1}{m_1} \right\} (\beta_1 - aU) \\ \pm M = & \left\{ (\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 - 4\Omega_z^2 + 8\Omega_x\Omega_z\beta_2 \frac{1}{m_1} + \right. \\ & \left. + \beta_2^2[(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 + 4\Omega_z^2] \frac{1}{m_1^2} \right\} (\beta_1 - aU)^2. \quad (21) \end{aligned}$$

Für $\beta_2 = 0$ reduzieren sich diese Formeln auf die entsprechenden für reelle Wurzeln der Frequenzgleichung, s. oben S. 91.

Die Formeln (21) sind ganz allgemein. Sie gestatten aber eine große Vereinfachung, indem, wie wir schon gesehen haben, die absoluten Beträge der komplexen Orbitalfrequenzen sehr groß im Verhältnis zu der Rotation sind, wodurch eine Reihenentwicklung der Wurzeln von (19) und (20) unbedenklich wird. Es ergeben sich dann in erster Näherung:

$$\begin{aligned} m_1 = & \pm (\beta_1 - aU) \left(1 - \frac{2\Omega_x^2 + 2\Omega_z^2}{(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2} - \dots \right) \\ m_2 = & \pm \beta_2 \left(1 + \frac{2\Omega_x^2 + 2\Omega_z^2}{(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2} + \dots \right). \quad (22) \end{aligned}$$

Bei der Hinzufügung der Indizes I und II muß erinnert werden, daß das Zeichen vor der Wurzel in den zwei Schichten entgegengesetzt sein soll, wodurch auch für m^I und m^{II} entgegengesetzte Vorzeichen gewählt werden müssen.

Die Lage der Stromlinienebenen und der Orbitalebene relativ zu den kartesischen Achsen ist wieder durch die Angabe der Winkel θ und ψ festgelegt, wobei

$$\lambda = \sin \psi \sin \theta, \quad \mu = -\cos \psi \sin \theta, \quad \nu = \cos \theta$$

sind. Mit den in (17) und (18) gegebenen Werten von λ , μ , ν erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned} \sin \theta = & \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \cos \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\pm (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}, \\ \sin \psi = & \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{\pm \sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(C_1^2 + C_2^2)}}, \quad \cos \psi = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{\pm \sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(C_1^2 + C_2^2)}}. \quad (23) \end{aligned}$$

Von dem doppelten Vorzeichen ist + oder - zu verwenden, je nachdem $A_1 B_2 - A_2 B_1 = M\nu \geq 0$ ist, da θ im ersten Quadranten liegen soll. Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen sind in (17) und (21) ausgerechnet; es fehlt nur noch:

$$C_1^2 + C_2^2 = [(\beta_1 - aU)^2 - \beta_2^2 - 4\Omega_z^2]^2 + 4\beta_2^2(\beta_1 - aU)^2.$$

Für die Orbitalbahn eines Teilchens ergibt sich mit Hilfe der in (18, 18) eingeführten kartesischen Koordinaten ξ, η in der Orbitalebene:

$$\xi = \mp i \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{C_1^2 + C_2^2}} Z e^{i(a x - \beta_1 t) + \beta_2 t + \delta z}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{C_1^2 + C_2^2}} Z e^{i(a x - \beta_1 t) + \beta_2 t + \delta z},$$

oder durch Einführung von Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{C_1^2 + C_2^2}} Z e^{\beta_2 t + \delta_1 z} \tag{24}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \mp (a x - \beta_1 t + \delta_2 z).$$

Wenn schließlich die Koordinaten (x_0, z_0) des Teilchens in der stationären Lage eingeführt werden, wobei angenähert $x = x_0 + Ut, z = z_0$ sind, so kann die letzte Gleichung (24) auch:

$$\varphi = \pm (\beta_1 - aU) t + \varphi_0$$

geschrieben werden. Durch Elimination von t aus dieser und der ersten Gleichung (24) erhalten wir dann die Gleichung der Orbitalbahn, in Polarkoordinaten ausgedrückt. Es wird dies die *logarithmische Spirale*:

$$r = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{C_1^2 + C_2^2}} Z e^{\pm \frac{\beta_2 (r - r_0)}{\beta_1 - aU} + \delta_1 z_0}.$$

Der Radiusvektor wächst exponentiell mit t nach Unendlich ($\beta_2 > 0$); außerdem besteht die gewöhnliche exponentielle Abnahme mit der Entfernung von der Diskontinuitätsfläche. Die Umlaufsrichtung in der Bahn folgt aus der Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm (\beta_1 - aU);$$

wo \pm für $M\nu \geq 0$ zu verwenden ist. Da $M\nu$ nach (21) den Faktor $\beta_1 - aU$ enthält, wird folglich die Umlaufsrichtung negativ oder positiv, je nachdem

$$2\Omega_z (m_1^2 + m_2^2 + 4\Omega_x^2) + 2\Omega_x \beta_2 [(\beta_1 - aU)^2 + \beta_2^2 + 4\Omega_z^2] \frac{1}{m_1} \geq 0$$

ist. Für $\Omega_x = 0$ erhalten wir folglich dieselbe Ungleichung wie bei reellen Wurzeln: $\Omega_z \geq 0$; wenn aber $\Omega_x \neq 0$ ist, liegt die Sache anders. Selbst für $\Omega_z = 0$ wird dann die Orbitalebene eine schräge Stellung zu der Vertikale einnehmen.

§ 23. Die Wellenbewegung in zwei endlichen Schichten.

Wir gehen gleich zur Diskussion der Frequenzgleichung (18, 10) über. Nach den in dem vorigen Paragraphen gewonnenen Erfahrungen schreiben wir sie in der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^I (\beta - a U^I)^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}{(\beta - a U^I)^2}} \cotgh \alpha h^I \frac{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}{(\beta - a U^I)^2}}}{1 - \left(\frac{2\Omega_z}{\beta - a U^I}\right)^2} + \\
& + \varepsilon^{II} (\beta - a U^{II})^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}{(\beta - a U^{II})^2}} \cotgh \alpha h^{II} \frac{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}{(\beta - a U^{II})^2}}}{1 - \left(\frac{2\Omega_z}{\beta - a U^{II}}\right)^2} = \\
& = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta - a U^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta - a U^{II})]. \quad (1)
\end{aligned}$$

Für große absolute Beträge der Orbitalfrequenzen ergibt sich nun hieraus:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^I [(\beta - a U^I)^2 - 2\Omega_x^2 - 2\Omega_z^2] \cotgh \alpha h^I + \varepsilon^{II} [(\beta - a U^{II})^2 - 2\Omega_x^2 - 2\Omega_z^2] \cotgh \alpha h^{II} = \\
& = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta - a U^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta - a U^{II})].
\end{aligned}$$

Für sehr große Werte von a können außerdem noch $\cotgh \alpha h^I = \cotgh \alpha h^{II} = 1$ gesetzt werden, wodurch wir wieder auf die Gleichung (22, 5) geführt sind. Für große Orbitalfrequenzen verhält sich folglich die Frequenzgleichung im Falle endlicher Schichtdicken angenähert wie bei unendlichen Schichten und braucht deshalb nicht weiter berücksichtigt zu werden. Die komplexen Orbitalfrequenzen sind hierin mit einbegriffen.

Wenn eine oder beide Schichten sehr dünn sind, wird das Argument von \cotgh für lange Wellen klein, und die obige Entwicklung nicht mehr gültig. Für ein kleines Argument $\delta_1 h$ kann aber $\cotgh \delta_1 h$ angenähert durch $\frac{1}{\delta_1 h}$ ersetzt werden, wodurch (1) ergibt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon^I}{a h^I} [(\beta - a U^I)^2 - 4\Omega_z^2] + \frac{\varepsilon^{II}}{a h^{II}} [(\beta - a U^{II})^2 - 4\Omega_z^2] = \\
& = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta - a U^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta - a U^{II})].
\end{aligned}$$

Wird hier a durch $\frac{1}{U^{II} - U^I} [(\beta - a U^I) - (\beta - a U^{II})]$ ersetzt, so folgt die quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\varepsilon^I}{h^I} - \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{(U^{II} - U^I)^2} (g_z - 2\Omega_y U^{II}) \right] (\beta - a U^I)^2 + \\
& + 2 \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{(U^{II} - U^I)^2} [g_z - \Omega_y (U^I + U^{II})] (\beta - a U^I) (\beta - a U^{II}) + \\
& + \left[\frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}} - \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{(U^{II} - U^I)^2} (g_z - 2\Omega_y U^I) \right] (\beta - a U^{II})^2 - \left(\frac{\varepsilon^I}{h^I} + \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}} \right) 4\Omega_z^2 = 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Wenn hier, wie auch im vorigen Paragraphen, $\beta - a U^I$ und $\beta - a U^{II}$ als kartesische Koordinaten interpretiert werden, so stellt diese Gleichung einen Kegelschnitt mit Zentrum im Origo dar. Je nachdem

$$\frac{\varepsilon^I \varepsilon^{II} (U^{II} - U^I)^2}{h^I h^{II} (\varepsilon^I - \varepsilon^{II})} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{\varepsilon^I}{h^I} (g_z - 2 \Omega_y U^I) + \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}} (g_z - 2 \Omega_y U^{II}) + (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \Omega_y^2 \quad (3)$$

ist, wird der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein. Wenn der Winkel zwischen der Abszissenachse und der großen Achse des Kegelschnittes mit v bezeichnet wird, so ist:

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{2 \cdot g_z - \Omega_y (U^I + U^{II})}{U^{II} - U^I \left(\frac{\varepsilon^I}{h^I} - \frac{\varepsilon^{II}}{h^{II}} \right) \frac{U^{II} - U^I}{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}} + 2 \Omega_y};$$

für beinahe gleiche Schichtdicken liegt dann v nahe an -45° .

Da Parabeln und Hyperbeln auftreten können, hat es den Anschein, als ob sich in diesen Fällen bloß reelle Orbitalfrequenzen ergeben würden, wie groß auch α wäre. Es muß aber erinnert werden, daß die Gleichung (2) für sehr großes α nicht mehr gültig ist, so daß der Kegelschnitt nur in der nächsten Umgebung von Origo eine brauchbare Annäherung an die genaue Frequenzkurve (1) darstellen wird.

Für Orbitalfrequenzen kleiner als der kritische Wert, $\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$, werden gewöhnliche anstatt hyperbolische Kotangensfunktionen in der Gleichung (1) auftreten, indem dieselbe folgendermaßen geschrieben werden kann (s. § 21):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 \sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^I)^2}} \operatorname{cotg} \alpha h^I \frac{\sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^I)^2}}}{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^I} \right)^2} + \\ & + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 \sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^{II})^2}} \operatorname{cotg} \alpha h^{II} \frac{\sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^{II})^2}}}{1 - \left(\frac{2 \Omega_z}{\beta - \alpha U^{II}} \right)^2} = \\ & = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2 \Omega_y U^{II}) (\beta - \alpha U^I) - (g_z - 2 \Omega_y U^I) (\beta - \alpha U^{II})]. \end{aligned} \quad (4)$$

Liegt nur für die eine Orbitalfrequenz ihr Betrag unterhalb des kritischen Wertes, so bleibt natürlicherweise der hyperbolische Kotangens in dem einen Gliede links bestehen.

Die Diskussion der Gleichung (4) soll nur für $\Omega_y = 0$ durchgeführt werden. Die rechte Seite verschwindet dann für $\alpha = 0$; folglich müssen die zwei Kotangensfunktionen entgegengesetzte Vorzeichen haben, und dies ist für $\alpha = 0$ nur möglich, wenn $\beta = \pm 2 \Omega_z$ ist. Für $h^I > h^{II}$ liegt das Argument I im zweiten, das Argument II im ersten Quadranten, und für $h^I < h^{II}$ ist es umgekehrt; für $h^I = h^{II}$ sind schließlich beide gleich 90° . Die zwei Punkte $(2 \Omega_z, 2 \Omega_z)$ und $(-2 \Omega_z, -2 \Omega_z)$ bleiben aber immer noch Wurzeln von (4), wenn auch die Argumente um $n\pi$ verändert werden (n ganzzahlig); alle Lösungskurven in der Nähe dieser Punkte müssen also durch dieselben hindurchgehen, wodurch sie Knotenpunkte werden.

Es läßt sich außerdem zeigen, daß die Kurvenschar die sechs Asymptoten:

$$\beta - \alpha U^I = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \end{cases}, \quad \beta - \alpha U^{II} = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2} \end{cases}$$

besitzen. Von großer Bedeutung für eine Diskussion des qualitativen Verlaufs der Kurven ist auch die Tatsache, daß die Geraden: $\beta - \alpha U^I = \pm 2 \Omega_z$ und $\beta - \alpha U^{II} = \pm 2 \Omega_z$, außerhalb der Knotenpunkte niemals von einer Kurve geschnitten oder berührt werden können. An diesen »singulären« Geraden wird nämlich das Argument des einen cotg von (4) unendlich, und es kann dann gezeigt werden, daß sie selbst Lösungskurven darstellen.

Hieraus folgt erstens, daß der Kegelschnitt (2), der sich auch bei kleinen Argumenten der \cotg aus (4) ergibt, an seinen Schnittpunkten mit diesen Geraden nicht mehr gelten kann; die genaue Kurve wird deshalb aus den getrennten Kurvenzweigen bestehen, worin der Kegelschnitt zerfällt.

Derjenige Zweig, der durch den Endpunkt der großen Achse des Kegelschnittes geht und in unserer Ebene im vierten Quadranten liegt, wird in der Nähe der Geraden: $\beta - \alpha U^I = |2 \Omega_z|$ und $\beta - \alpha U^{II} = -|2 \Omega_z|$, von dem Kegelschnitte abweichen, und zwar biegt er an der ersteren Gerade nach links, an der letzteren nach rechts um, und entfernt sich immer mehr von Origo, um schließlich die Asymptoten: $\beta - \alpha U^I = \sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$ und $\beta - \alpha U^{II} = -\sqrt{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}$, im Unendlichen zu erreichen. Das Argument von \cotg im ersten, bzw. im zweiten Gliede auf der linken Seite von (4) geht gleichzeitig gegen π (für $U^{II} - U^I > 0$), wodurch die Kurve in großer Entfernung von Origo angenähert durch die Formeln:

$$-\frac{h^I \left[1 + \left(\frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right)^2 \right]}{|U^{II} - U^I|} (\beta - \alpha U^{II}) \sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^I)^2}} = \pi$$

und

$$\frac{h^{II} \left[1 + \left(\frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right)^2 \right]}{|U^{II} - U^I|} (\beta - \alpha U^I) \sqrt{-1 + \frac{4 \Omega_x^2 + 4 \Omega_z^2}{(\beta - \alpha U^{II})^2}} = \pi,$$

gegeben ist. Wie in den vorigen Paragraphen, ist auch hier das Anwachsen des Argumentes auf ein kleines Gebiet in der unmittelbaren Nähe der kritischen Geraden beschränkt, wo die Kurve rasch umbiegt.

Außer diesen Kurvenzweigen, der einer Grundschwingung der Flüssigkeitsschichten entspricht, vgl. S. 83, gibt es noch unendlich viele andere Kurven (Oberschwingungen), die dieselben Geraden als Asymptoten haben, wobei aber der \cotg ein Argument von $n\pi$ im Unendlichen hat ($n=2, 3, 4, \dots$). Diese Kurven verlaufen deshalb den Geraden $\beta - \alpha U^I = |2 \Omega_z|$, $\beta - \alpha U^{II} = -|2 \Omega_z|$ um so näher, je größer n ist, um schließlich für $n=\infty$ mit denselben zusammenzufallen. Die Argumente der zwei Kreisfunktionen ändern sich kontinuierlich längs einer Kurve; solange die gewöhnliche Kotangensfunktion nur in einem Gliede auftritt, muß aber die Änderung des Argumentes von dieser Funktion weniger als π betragen, denn für ein Argument gleich einem Multiplum von π würde ja dann die linke Seite von (4) unendlich werden. Nur in der Nähe des Punktes ($|2 \Omega_z|$, $-|2 \Omega_z|$), wo der gewöhnliche \cotg in beiden Gliedern vorkommt, können die Argumente größere Änderungen aufweisen, wobei sie aber gleichzeitig und auf solche Weise Multipla von π werden, daß die linke Seite dann die unbestimmte Form: $\infty - \infty$ annimmt. Es läßt sich zeigen, daß dies immer möglich ist. Wenn wir z. B. die erste Oberschwingung betrachten, so ändert sich das Argument des ersten Gliedes von $\pi + \eta^I$ bis $\pi - \eta^I$, während das Argument des zweiten Gliedes sich gleichzeitig von $\pi - \eta^{II}$ bis $\pi + \eta^{II}$ ändert (η eine sehr kleine Größe). Wenn beide Argumente den kritischen Wert π annehmen, folgt dann für die linke Seite von (4): $\infty - \infty$.

Die zwei aus dem Kegelschnitte entarteten Kurvenzweige, die durch die Knotenpunkte ($\pm 2 \Omega_z$, $\pm 2 \Omega_z$) hindurchgehen, müssen auch in der Nähe der Geraden: $\beta - \alpha U^I = |2 \Omega_z|$ und $\beta - \alpha U^{II} = -|2 \Omega_z|$, umbiegen, und zwar werden sie hier nicht diesen Geraden ins Unendliche folgen, sondern in umgekehrter Richtung nach dem Punkte ($|2 \Omega_z|$, $-|2 \Omega_z|$) verlaufen, wo sie zusammenstoßen. In der Nähe dieses Punktes, wo der gewöhnliche Kotangens in beiden Gliedern von (4) vorkommt, werden die zwei Argumente — wegen der Nenner — entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn z. B. das eine

Argument $\pi - \eta^I$ ist, wird das andere $-\pi + \eta^{II}$; an der Grenze für $\eta \rightarrow 0$ ergibt sich dann wieder $-\infty + \infty$ an der linken Seite von (4). Je näher wir an den Punkt $(|2\Omega_z|, -|2\Omega_z|)$ rücken, je größer wird das eine Argument und je kleiner das andere; der Zuwachs ist aber vom selben Betrag wie die Abnahme, wodurch ein Argument von $n\pi$ in dem einen Gliede gleichzeitig mit einem Argumente von $-n\pi$ in dem anderen Gliede vorkommt. Die linke Seite von (4) wird deshalb immer endlich bleiben.

Außer dieser Kurve, die zur Grundschwingung führt, gibt es auch unendlich viele andere Kurven, die die Knotenpunkte verbinden. Eine Schar folgt zuerst der Gerade $\beta - aU^I = |2\Omega_z|$ zu ihrer rechten Seite, passiert durch den singulären Punkt $(|2\Omega_z|, -|2\Omega_z|)$ und geht dann an der unteren Seite der Gerade $\beta - aU^{II} = -|2\Omega_z|$ bis zum zweiten Knotenpunkt. Ferner gibt es eine Schar auf der anderen Seite dieser Geraden, die angenähert als gleichseitige Hyperbeln betrachtet werden kann; sie verlaufen den Geraden um so näher, je größer die Argumente sind. Die der Grundströmung entsprechende Kurve ist also dem Origo am nächsten.

Diese zwei Scharen setzen übrigens auch auf der anderen Seite der Knotenpunkte fort, und zwar geht die erstere asymptotisch gegen die positive Ordinaten- und die negative Abszissenachse, während die letztere Schar der Geraden: $\beta - aU^I = \sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$ und $\beta - aU^{II} = -\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}$, zustrebt.

Es sind schließlich noch die durch den singulären Punkt $(|2\Omega_z|, -|2\Omega_z|)$ hindurchgehenden Kurven anzugeben, die den Oberschwingungen entsprechen. Dieselben haben die negative Ordinaten- und die positive Abszissenachse als Asymptoten, verlaufen aber sonst den Geraden: $\beta - aU^I = |2\Omega_z|$ und $\beta - aU^{II} = -|2\Omega_z|$, sehr nahe. Da die Argumente von \cotg im Unendlichen sich dem Werte $-n\pi$ nähern ($n=1, 2, 3, \dots$), wird die Gleichung der Kurvenschar angenähert durch

$$\frac{h^I}{|U^{II} - U^I|} \frac{\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{4\Omega_x^2} (\beta - aU^I) (\beta - aU^{II}) = -n\pi$$

und

$$\frac{h^{II}}{|U^{II} - U^I|} \frac{\sqrt{4\Omega_x^2 + 4\Omega_z^2}}{4\Omega_x^2} (\beta - aU^I) (\beta - aU^{II}) = -n\pi$$

gegeben sein; sie stellt also gleichseitige Hyperbeln dar.

Da der Verlauf der Kurven um Origo symmetrisch ist, und da außerdem — von dem sehr nahe an 1 gelegenen Faktor $\frac{\varepsilon^{II}}{\varepsilon^I}$ abgesehen — noch Symmetrie um die α -Achse (s. S. 87) herrscht, so kann hierdurch die Diskussion des qualitativen Verlaufs der Kurven in der ganzen Ebene als abgeschlossen betrachtet werden.

Eine graphische Darstellung der Frequenzgleichung ist aus der Figur 11 zu ersehen. Es ist dabei $\Omega_y = 0$ und $\Omega_x = \Omega_z$ gewählt worden. Ferner sollen die Flüssigkeitsschichten dieselbe Dicke, gleich 5000 m, haben, während für den Temperatur- und Windsprung die im vorigen Paragraphen verwendeten Werte: $\Delta\theta = 1^\circ$ und $\Delta U = 20 \text{ m sec}^{-1}$, gewählt worden sind. Die durch die singulären Punkte hindurchgehenden horizontalen und vertikalen Geraden — gestrichelt in der Figur — zerlegen die ganze Ebene in rechteckige Gebiete; von den in jedem Gebiet verlaufenden unendlich vielen Lösungskurven sind nur diejenigen, die der Grundschwingung entsprechen, als voll ausgezogene dicke Kurven mitgenommen worden. Mit dem verwendeten Maßstab werden diese zum Teil den gestrichelten Geraden sehr nahe liegen; sie haben aber die voll ausgezogenen dünnen Geraden als Asymptoten. Die den Oberschwingungen entsprechenden Lösungskurven würden noch näher an die gestrichelten Geraden liegen.

In der Figur sind nur die Kurven in der Halbebene für $\alpha(U^{\text{II}} - U^{\text{I}}) > 0$ in Vollständigkeit angegeben worden. Es soll ja immer $\alpha > 0$ sein; sollte nun $U^{\text{II}} - U^{\text{I}} < 0$ sein, so würde die Figur durch eine bloße Umkehrung von der Richtung der Abszissen- und Ordinatenachse noch gültig bleiben. Zum besseren Überblick sind auch ein paar Kurvenzweige in der negativen Halbebene eingezeichnet worden.

In der ganzen Ebene besteht folglich die Lösungskurve aus fünf verschiedenen, getrennten Zweigen. Der erste Zweig (I in der Figur) geht durch die vier singulären Punkte und hält sich in seinem ganzen Verlauf im Endlichen. Der zweite (II) geht durch die Knotenpunkte und verläuft in beiden Richtungen ins Unendliche. Dasselbe gilt auch für seine um Origo symmetrische Kurve (II'). Der dritte Zweig (III) und seine symmetrische Kurve (in der Figur nicht eingezeichnet) haben schließlich ihre Endpunkte im Unendlichen, berühren aber nicht die singulären Punkte.

Es ist leicht einzusehen, daß die für unendliche Schichten sich ergebende Lösungskurve (die Ellipse von Fig. 10) für endliche Schichten in die Zweige II und III übergehen wird. Der Zweig I dagegen, der in seinem ganzen Verlauf mindestens eine Orbitalfrequenz unterhalb des kritischen Wertes aufzuweisen hat, ist neu hinzugekommen.

Mit den gewählten Werten der physikalischen Konstanten wird der Kegelschnitt (2) eine Ellipse darstellen, deren lange Achse angenähert in die α -Achse fällt. In der Figur ist die Kontur der Ellipse aus Teilen der Zweige I und III deutlich zu erkennen. Hätten wir die Schichthöhen größer gewählt, so würde auch die lange Achse der Ellipse größer werden; ihr Maximalwert ist durch die in dem vorigen Paragraphen für unendliche Schichtdicken erhaltenen Werte gegeben.

Aus der Figur folgt nun, daß jedem Wert von α mehrere Wurzeln der Frequenzgleichung (1) entsprechen werden, die als Schnittpunkte zwischen den Zweigen der Figur und einer zur α -Achse senkrechten Gerade hervorgehen. Wenn diese Schnittpunkte reell sind, ergeben sich auch reelle Wurzeln. Durch Verschiebung der Gerade längs der α -Achse wird es aber vorkommen, daß zwei reelle Schnittpunkte aneinanderrücken, um schließlich zusammenzufallen. Die Gerade wird dann eben die Kurve berühren, in welchem Falle die Gleichung (1) eine Doppelwurzel hat. Für noch größere (oder kleinere) Werte von α gehen schließlich die Schnittpunkte ins Komplexe über, wodurch sich zwei konjugiert komplexe Wurzeln ergeben.

Wenn wir uns diese Tatsache vor Augen halten, so ersehen wir sofort aus der Figur, daß jedem Wert von α sechs Wurzeln entsprechen werden.

Wir wollen zuerst das Verhalten dieser Wurzeln bei einer Variation von α von 0 bis ∞ untersuchen.

Für kleines α sind alle sechs Wurzeln reell und verschieden. Wenn wir aber in die Nähe des kritischen Punktes $\alpha = \left| \frac{4\Omega_z}{U^{\text{II}} - U^{\text{I}}} \right|$ gekommen sind, erhalten wir keine reelle Schnittpunkte mit der Kurve II' mehr, wodurch die zwei Wurzeln als konjugiert komplex erscheinen müssen. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Wurzeln wieder ins reelle Gebiet zurückkehren werden, sobald der singuläre Punkt erreicht ist. In Wirklichkeit stimmen sie dann auch mit denjenigen Wurzeln überein, die sich aus dem durch den singulären Punkt gehenden Teil der Kurve I ergeben. Nach Passieren dieses Punktes erhalten wir deshalb wieder sechs verschiedene, reelle Wurzeln. In zwei kleinen Bereichen um die α -Werte ($\Omega_y = 0$ vorausgesetzt):

$$\alpha = \frac{4|\Omega_z|(U^{\text{II}} - U^{\text{I}})}{(U^{\text{II}} - U^{\text{I}})^2 - \frac{\epsilon^{\text{I}} - \epsilon^{\text{II}}}{\epsilon^{\text{II}}} h^{\text{II}} g_z} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{4|\Omega_z|(U^{\text{II}} - U^{\text{I}})}{(U^{\text{II}} - U^{\text{I}})^2 - \frac{\epsilon^{\text{I}} - \epsilon^{\text{II}}}{\epsilon^{\text{I}}} h^{\text{I}} g_z}, \quad (5)$$

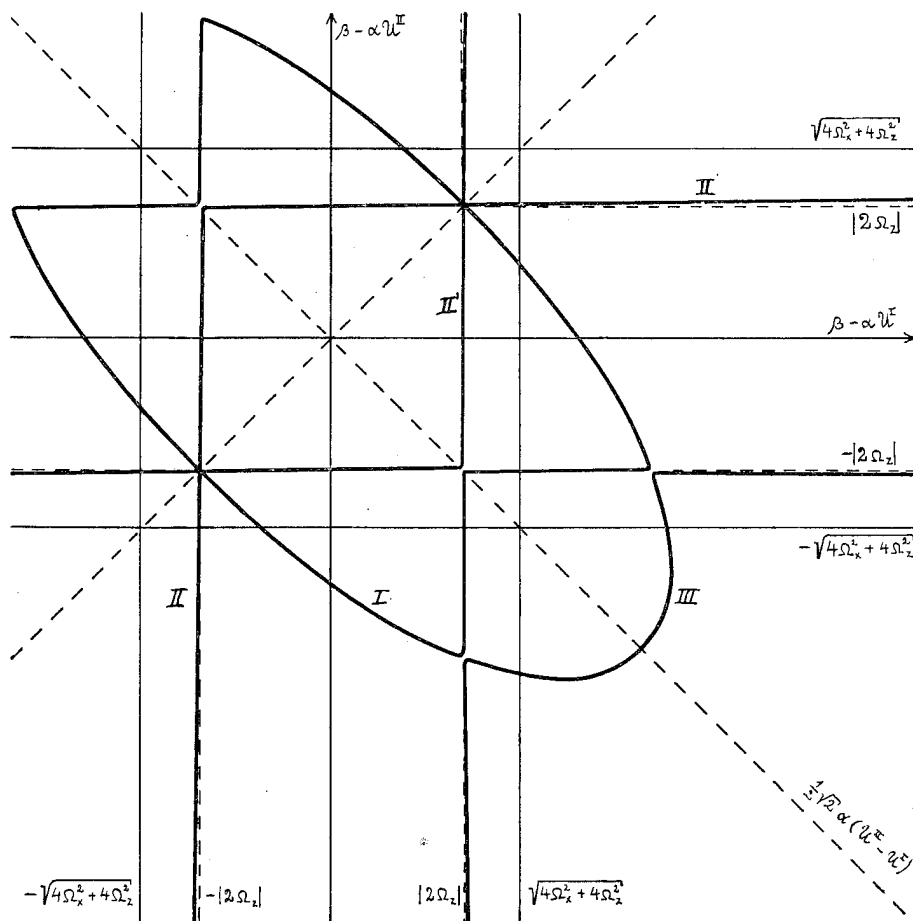


Fig. 11.

d. h. um die Schnittpunkte zwischen der Ellipse (2) und den Geraden: $\beta - \alpha U^I = |2 \Omega_z|$ und $\beta - \alpha U^{II} = -|2 \Omega_z|$, werden je zwei der Schnittpunkte mit dem Zweige I ins Komplexe übergehen, wodurch wieder zwei (für $\frac{h^I}{\epsilon^I}$ angenähert gleich $\frac{h^{II}}{\epsilon^{II}}$ sogar gleichzeitig vier) konjugiert komplexe Wurzeln aufkommen. Der komplexe Teil dieser Wurzeln ist sehr klein und wird auch bald für größere α wieder verschwinden, wo die Wurzeln mit den aus dem Zweige III erhaltenen übereinstimmen. Alle sechs Wurzeln bleiben nun in einem mäßigen Bereiche reell; wie bei unendlichen Schichten, müssen aber auch hier für genügend großes α zwei der Wurzeln wieder konjugiert komplex werden, und sie halten sich so für alle größere Werte von α , unter ständiger Zunahme des komplexen Teiles.

Da komplexe Wurzeln der Frequenzgleichung mit Instabilität der Grundströmung verbunden sind, gibt es folglich im allgemeinen vier verschiedene Bereiche von α zwischen 0 und ∞ , für welche die Wellenbewegung exponentiell anwachsen wird. Der größte Instabilitätsbereich wird auch bei nichtvorhandener Rotation vorkommen, wenn nur der Windsprung und α groß genug sind; die anderen Instabilitätsbereiche dagegen, die dann vorkommen, wenn eine oder beide Orbitalfrequenzen in der unmittelbaren Nähe von $2 \Omega_z$ liegen, sind folglich durch die Corioliskräfte bedingt.

Lassen wir die Rotationskomponenten Ω_x und Ω_z gegen Null gehen, so zieht sich der Zweig I zu einem Punkte (Origo) zusammen; die Zweige II und II' gehen in die Koordinatenachsen über und ergeben die singulären Lösungen: $\beta - \alpha U^I = 0$, $\beta - \alpha U^{II} = 0$,

auf deren Existenz wir schon früher (Kapitel II) bei der Behandlung dieses Spezialfalles ($\Omega_x = \Omega_z = 0$) aufmerksam gemacht haben, während schließlich die Zweige III und III' in die dort diskutierten Lösungen übergehen.

Nach dieser ausführlichen Diskussion der Frequenzgleichung liegt nun alles zurecht, um die Wellenbewegung, die durch (18, 11) gegeben ist, in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge studieren zu können. Da eine vollständig erschöpfende Diskussion, der vielen auftretenden Parameter und der verschiedenen, möglichen Wellentypen halber, ziemlich langwierig — und langweilig — ist und auch den Rahmen dieser Arbeit gänzlich sprengen würde, werden wir deshalb bei dieser Gelegenheit auf eine solche Diskussion verzichten. Die Hauptergebnisse sind übrigens schon am Schluß des § 18 angegeben worden; mehr ausführlich sind sie bei der Diskussion der Wellenbewegung in einer endlichen Schicht zur Darstellung gekommen (§ 21), während diejenigen Modifikationen, die dieser Diskussion, wegen des Vorhandenseins zweier Schichten, noch bedürfen, aus den Ergebnissen des § 22 zu ersehen sind.

Zum Schluß werden wir einige numerische Angaben zu der Frequenzgleichung mitteilen. Zur Vereinfachung werden wir nur den Fall von dünnen Schichten behandeln; es soll deshalb die Frequenzgleichung in der vereinfachten Form (2) zugrundegelegt werden. Wie wir jetzt wissen, wird diese nur zwei von den sechs fundamentalen Wurzeln der vollständigen Gleichung angeben können, indem sie in der verwendeten Koordinatenebene einen Kegelschnitt darstellt. Dieser Kegelschnitt wird auch nur für lange Wellen einen einigermaßen richtigen Ausdruck für die Frequenzgleichung geben (s. S. 97). Auch wird der an den Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit den singulären Geraden stattfindende Übergang der Wurzeln ins Komplexe durch (2) nicht zur Darstellung gebracht werden können.

Es sollen die zwei Schichten von derselben Mächtigkeit ($h^I = h^{II} = h$) und von gleichgroßen, aber entgegengesetzten Grundströmen ($U^{II} = -U^I = U$) sein. Wenn dann die Dichten durch

$$\varepsilon^I = \bar{\varepsilon} \left(1 + \frac{\Delta \vartheta}{2\vartheta} \right), \quad \varepsilon^{II} = \bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{\Delta \vartheta}{2\vartheta} \right)$$

ersetzt (s. § 8, Formel (7) und (10)) und $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, $\beta = 2\pi \frac{c}{L}$ eingeführt werden, so ergibt sich aus (2), wenn noch $\Omega_y = 0$ ist:

$$\left(\frac{c}{U} \right)^2 + \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} \frac{c}{U} + 1 - \left(\frac{\Omega_z L}{\pi U} \right)^2 - \frac{\Delta \vartheta}{2\vartheta} \frac{h}{U^2} g_z = 0. \quad (6)$$

Tabelle III.

$\frac{L}{U}$	$\Delta \vartheta$			
	1	2	5	10
10^4	$-1,7 \cdot 10^{-3} \pm i \cdot 0,39$	$-3,3 \cdot 10^{-3} \pm 0,8$	$-8,3 \cdot 10^{-3} \pm 1,8$	$-1,7 \cdot 10^{-2} \pm 2,7$
10^5	$-1,7 \cdot 10^{-3} \pm 1,6$	$-3,3 \cdot 10^{-3} \pm 1,8$	$-8,3 \cdot 10^{-3} \pm 2,4$	$-1,7 \cdot 10^{-2} \pm 3,1$
10^6	$-1,7 \cdot 10^{-3} \pm 16,4$	$-3,3 \cdot 10^{-3} \pm 16,4$	$-8,3 \cdot 10^{-3} \pm 16,5$	$-1,7 \cdot 10^{-2} \pm 16,6$

$$\left. \begin{array}{l} c/U \\ c/U \end{array} \right\} \text{ als Funktion von } \Delta \vartheta \text{ und } \frac{L}{U}.$$

Diese quadratische Gleichung in $\frac{c}{U}$ ist in der Tabelle III für verschiedene Temperatursprünge $\Delta \vartheta$ und verschiedene Werte des Verhältnisses zwischen der Wellenlänge L und

dem Grundstrome U tabellarisiert worden. Es sind dabei $\bar{\vartheta}=300^\circ$, $2\Omega_z=1,03 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$, $g_z=9,81 \text{m sec}^{-2}$ und $\frac{h}{U^2}=50$ gesetzt worden. Es ergeben sich wachsende Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bei zunehmenden Werten der zwei Parameter $\Delta\vartheta$ und $\frac{L}{U}$. Für $\Delta\vartheta=5^\circ$ und $U=10 \text{m sec}^{-1}$ wird z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Welle von 1000 km Länge gleich 24m sec^{-1} . Für unendliche Wellenlänge wird auch c unendlich.

Der aus dieser vereinfachten Gleichung (2) nicht hervorgehende Instabilitätsbereich wird nach (5) angenähert um den Wert

$$\frac{L}{U} = \frac{\pi}{|\Omega_z|} \left(1 - \frac{\Delta\vartheta}{4} \frac{h}{U^2} g_z \right) \quad (7)$$

liegen. Mit den obigen Werten der Konstanten ergeben sich für $\Delta\vartheta=1^\circ, 2^\circ$ die Werte: $\frac{L}{U}=3,6 \cdot 10^4, 1,1 \cdot 10^4$. Für die größeren Temperatursprünge wird die rechte Seite von (7) negativ; es gibt dann keine Schnittpunkte zwischen dem Kegelschnitt und den kritischen Geraden. Der Kegelschnitt ist dann eine Hyperbel, wie es auch aus (3) zu ersehen ist. Mit den gewählten Werten der Konstanten folgt nämlich aus dieser Gleichung, daß Hyperbeln für $\Delta\vartheta > 1^\circ,22$ auftreten werden.

Die für kleine Wellen vorhandene Instabilität ist in der Tabelle nur für $\Delta\vartheta=1^\circ$ angegeben worden. Für die anderen Temperatursprünge wird die vereinfachte Gleichung (6) nur Stabilität ergeben, da der entsprechende Kegelschnitt (2) eine Hyperbel darstellt. Um auch in diesen Fällen eine Stabilitätsgrenze angeben zu können, werden wir in (1) die Wurzeln entwickeln und die hyperbolischen Kotangens gleich 1 setzen, was für kleine Wellen angenähert richtig ist. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \varepsilon^I (\beta - \alpha U^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II})^2 - (\varepsilon^I + \varepsilon^{II}) (2\Omega_x^2 + 2\Omega_z^2) = \\ = \frac{\varepsilon^I - \varepsilon^{II}}{U^{II} - U^I} [(g_z - 2\Omega_y U^{II}) (\beta - \alpha U^I) - (g_z - 2\Omega_y U^I) (\beta - \alpha U^{II})], \end{aligned}$$

welche Gleichung mit (22,5) identisch ist. Bei vorkommender Doppelwurzel muß außerdem die erste Derivierte nach β verschwinden, d. h. es muß

$$\varepsilon^I (\beta - \alpha U^I) + \varepsilon^{II} (\beta - \alpha U^{II}) = -(\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \Omega_y$$

sein. Durch Elimination von β aus diesen zwei Gleichungen und Einführung der oben angegebenen, vereinfachten Konstanten ergibt sich dann:

$$\frac{L}{U} = 4\pi \frac{\bar{\vartheta}}{\Delta\vartheta} \frac{U}{g_z} \left[1 - 8(\Omega_x^2 + \Omega_z^2) \left(\frac{\bar{\vartheta}}{\Delta\vartheta} \frac{U}{g_z} \right)^2 + \dots \right].$$

Wählen wir hier $U=10 \text{m sec}^{-1}$, so erhalten wir, indem $\Delta\vartheta$ der Reihe nach gleich $1^\circ, 2^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ gesetzt wird:

$$\frac{L}{U} = 3,85 \cdot 10^3, 1,9 \cdot 10^3, 7,7 \cdot 10^2, 3,85 \cdot 10^2.$$

Für diejenigen Werte von $\frac{L}{U}$, die unterhalb dieser kritischen liegen, herrscht dann immer Instabilität.

Hätten wir die genaue Gleichung (1) verwendet, so wäre die Stabilitätsgrenze sogar bei etwas größeren Werten von $\frac{L}{U}$ anzutreffen.

KAPITEL V.

Zur Integration der Störungsgleichungen für keilförmige Schichten auf horizontaler Unterlage.

§ 24. Einleitende Bemerkungen.

Im vorigen Kapitel haben wir die Wellenbewegung in zwei Flüssigkeitsschichten behandelt, die durch zwei parallele, starre Ebenen begrenzt waren. Außerdem ist die Diskontinuitätsfläche in ihrer ungestörten Lage diesen Ebenen parallel gewesen. Dadurch ist eine große Vereinfachung in den Rechnungen möglich geworden, indem die Amplitude der Wellenbewegung in einer Ebene parallel der Diskontinuitätsfläche von konstantem Betrag ist und nur eine Änderung von Ebenen zu Ebenen aufweisen wird. Mit der xy -Ebene in der Diskontinuitätsfläche wird das heißen, daß die in der x -Richtung sich fortpflanzenden Wellen eine von der y -Koordinate unabhängige Konfiguration besitzen.

Bei den meteorologischen Anwendungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die atmosphärischen Diskontinuitätsflächen den Begrenzungsflächen parallel seien. Das wird z. B. mit einer gewissen Annäherung zutreffen, wenn es sich um die Tropopause handelt, wenn auch diese eine geringe Neigung gegen die untere Begrenzungsfläche, die Erde, aufweist, indem ihre Höhe über dem Erdboden im Mittel etwa zwischen den Werten 17 km am Äquator und 9 km an den Polen variiert. Wenn wir aber die Wellenbewegung in einem kleinen Ausschnitt, z. B. von 1000 km Ausdehnung, untersuchen werden, so ist die Änderung der Schichtdicke unbedenklich zu vernachlässigen.

Für die in der unteren Hälfte der Troposphäre beobachteten Diskontinuitätsflächen liegt aber die Sache anders. Zwar ist auch hier die Neigung gegen die Erdoberfläche sehr gering, von der Größenordnung 1:100 oder noch weniger, so daß man vielleicht geneigt wäre, die Formeln des vorigen Paragraphen auch auf diese quasi-horizontalen Flächen anzuwenden, wobei etwa die mittlere Höhe der keilförmigen, unteren Schicht als die konstante Schichtdicke h^1 zu rechnen wäre. Dies würde aber nicht gestattet sein. Denn die Fläche schneidet die Erdoberfläche unter einem endlichen Winkel, wodurch die Höhe der keilförmigen Schicht immer abnehmend ist, um zuletzt gleich Null zu werden.

Wenn die Lagrange'sche Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen auf seichtem Wasser noch Gültigkeit besitze, so würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit dem Abstände von der Keilspitze variieren, d. h. auch von der y -Koordinate abhängen.

Wenn auch nicht zu erwarten ist, daß diese Formel einen quantitativ richtigen Ausdruck für die Fortpflanzung darstellen kann, so zeigt sie doch die zweifellos richtige Tatsache, daß die Wellen an der Keilspitze sich am langsamsten fortpflanzen. Beobachtungen von Wasserwellen, die sich einer flachen Küste parallel fortpflanzen, zeigen zur Genüge, daß die Wellen am Ufer, im Verhältnis zu denjenigen auf tieferem Wasser, nachbleiben.

Schon Helmholtz¹ hat auf diese fundamentale Tatsache hingewiesen. Der Verlauf der Wellenbewegung ist bei ihm folgendermaßen geschildert worden: »Anfangs geradlinige Wellen, die dem Ufer parallel fortlaufen, werden infolge der Verzögerung daselbst sich krümmen müssen, wobei sie die Konvexität ihres Bogens dem Ufer zuwenden; infolgedessen laufen sie auf dieses zu und zerschellen.«

¹ H. von Helmholtz: Über atmosphärische Bewegungen. (Zweite Mitteilung.) Zur Theorie von Wind und Wellen. Sitzber. Berl. Akad. 1889. (S. 766.) Wissenschaftliche Abhandlungen III. Leipzig 1895. (S. 315.)

Auch V. Bjerknes¹ hat sich mit diesem Problem beschäftigt und in einer schematischen Zeichnung die Horizontalprojektion der Stromlinien und der Orbitalbahnen der Wasserteilchen dargestellt.

Bei der Wellenbewegung in zwei Flüssigkeitsschichten, deren Trennungsfläche die Erdoberfläche unter einem endlichen Winkel schneidet, ist auch eine andere, fundamentale Tatsache zu erwähnen. Die Teilchen an den Keilspitzen, die nach der Grenzflächenbedingung an der starren Unterlage nur in horizontale Bahnen herumlaufen können, werden bei Wellenbewegungen in der Fläche kinematisch gezwungen sein, entgegengesetzte Umlaufrichtungen in den zwei Schichten anzunehmen, jedenfalls bei ungedämpften Wellen².

Eine Erklärung dieser Tatsache ist nach der vereinfachten Theorie der vorigen Kapitel nicht möglich und kann erst nach Erschaffung einer Theorie der Wellenbewegung in keilförmigen Schichten gegeben werden.

Die große Schwierigkeit bei der Erschaffung einer solchen Theorie liegt nun in der allmählich erfolgenden Krümmung der ursprünglich geradlinigen Wellenkämme, wodurch die gewöhnlichen Ansätze bei einer Wellenbewegung mit geradliniger Wellenfront hier nicht gemacht werden können.

Dieses Problem der Wellenbewegung einer keilförmigen Wasserschicht mit horizontaler Oberfläche und schräger Unterlage ist mit der Bestimmung der Wellenbewegung in einer rotierenden Flüssigkeitsschicht äquivalent, wenn auch im letzteren Falle die Unterlage horizontal ist und die Flüssigkeitsoberfläche infolge der Coriolis-Beschleunigung sich schräg stellen wird. In beiden Fällen muß die Wellenbewegung von der y -Koordinate abhängen und eine mit der Zeit sich krümmende Wellenfront besitzen³. Der ersten Forderung kann nun ohne allzu viele Mühe Rechnung getragen werden, wie es im folgenden gezeigt wird. Auf alle Einzelheiten, die mit einer Befriedigung der bei weitem schwierigeren zweiten Forderung verbunden sind, können wir aber in dieser Arbeit nicht näher eingehen. Erst bei einer an anderer Stelle zu gebenden Diskussion der hier erhaltenen Integrale soll das Problem in aller Ausführlichkeit aufgenommen werden; es wird sich dann zeigen, inwieweit diese Integrale implizite die vollständige Lösung des Problems geben werden.

Wir gehen jetzt zu der Formulierung des Problems über.

Zwei inkompressible Flüssigkeiten von den Dichten ε^I und ε^{II} bewegen sich mit konstanten Grundströmen U^I und U^{II} auf einer starren, horizontalen Unterlage. Infolge der Coriolis-Beschleunigung wird dann die ebene Trennungsfläche zwischen beiden Flüssigkeiten eine schräge Gleichgewichtslage einnehmen müssen und die Unterlage unter einem endlichen Winkel Θ schneiden. Der Einfachheit halber werden wir von jeder oberen Begrenzung der Flüssigkeiten absehen; sie erfüllen also zusammen den ganzen oberen Halbraum.

Da es mit gewissen rechnerischen Vorteilen verbunden ist, legen wir die xy -Ebene in die untere Grenzfläche und nicht in die Diskontinuitätsfläche, wie es in den vorigen

¹ V. Bjerknes: Dynamics of the Circular Vortex. Geofys. Publ. Vol. II. No. 4. Oslo 1921. (S. 72.)

² V. Bjerknes: Le problème des cyclones. Journ. de phys. et le radium. Paris 1924.

³ Der einzige mir bekannte Versuch, eine Theorie der Wellenbewegung in keilförmigen, rotierenden Flüssigkeitsschichten auszubilden, rührt von H. Ludloff her. In seiner im Druck nicht erschienenen Dissertation: Stabilitätsuntersuchung der Wellenbewegung eines rotierenden Flüssigkeitssystems (Göttingen 1924), werden die kleinen Schwingungen von zwei, zwischen horizontalen, starren Wänden eingeschlossenen, inkompressiblen Flüssigkeiten untersucht, die in stationärer Bewegung auf einer rotierenden Scheibe lagern. In der nächsten Umgebung der schrägen Diskontinuitätsfläche wird die Wellenbewegung als quasistatisch betrachtet, während im ganzen Raume sonst eine Wellenbewegung von der Art der Stokes'schen Randwellen angenommen werden muß, um ein Abklingen der Störung im Unendlichen zu erreichen. Die von ihm untersuchten Wellen haben aber überall geradlinige Wellenfront und können deshalb nicht zu den fundamentalen Störungen gerechnet werden.

Kapiteln immer gemacht worden ist. Die x -Achse soll ferner in die Schnittlinie der Diskontinuitätsfläche mit dem Boden fallen, während die z -Achse vertikal nach oben zeigt. Da wir ein Rechtskoordinatensystem verwenden, ist dann auch die Richtung der y -Achse festgelegt. Durch geeignete Wahl der Richtungen der Grundströme kann es noch bewirkt werden, daß der Neigungswinkel Θ im ersten Quadranten liegt.

Die Gleichungen der Grundströmung bleiben dieselben wie in § 5. Es ist z. B. die Gleichung der ebenen Isobarenflächen:

$$P = -2 \Omega_z \varepsilon U y - (g - 2 \Omega_y U) \varepsilon z + P_0, \quad (1)$$

wodurch die Gleichung der ungestörten Diskontinuitätsfläche durch

$$P^I - P^{II} = -2 \Omega_z (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II}) y - [g (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})] z = 0 \quad (2)$$

gegeben ist.

Der Neigungswinkel Θ ergibt sich folglich aus:

$$\operatorname{tg} \Theta = - \frac{2 \Omega_z (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})}{g (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) - 2 \Omega_y (\varepsilon^I U^I - \varepsilon^{II} U^{II})}. \quad (3)$$

Die Differentialgleichungen der Störungsbewegung bleiben dieselben wie in § 17. Es muß aber daran erinnert werden, daß die Koordinaten x , y , z und die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten u , v , w in diesem Falle andere Bedeutungen haben, indem sie nun zu der Schwerkraft orientiert sind.

Die Randbedingungen ergeben sich aus den generellen Formeln des § 4; sie lauten:

(1) an der unteren Grenzfläche: $z=0$, ist

$$w_{z=0} = 0, \quad (4)$$

(2) an der gestörten Diskontinuitätsfläche von der Gleichung:

$$P^I - P^{II} + (p^I - p^{II})_{z=y \operatorname{tg} \Theta} = 0, \quad (5)$$

ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^I \frac{\partial}{\partial x} \right) (p^I - p^{II})_{z=y \operatorname{tg} \Theta} + v^I_{z=y \operatorname{tg} \Theta} \frac{\partial}{\partial y} (P^I - P^{II}) + w^I_{z=y \operatorname{tg} \Theta} \frac{\partial}{\partial z} (P^I - P^{II}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{II} \frac{\partial}{\partial x} \right) (p^I - p^{II})_{z=y \operatorname{tg} \Theta} + v^{II}_{z=y \operatorname{tg} \Theta} \frac{\partial}{\partial y} (P^I - P^{II}) + w^{II}_{z=y \operatorname{tg} \Theta} \frac{\partial}{\partial z} (P^I - P^{II}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

§ 25. Primitive Integrale der Störungsgleichungen.

Wir betrachten wieder eine periodische Störung, die sich der x -Achse entlang fortpflanzt und von der y -Koordinate abhängig ist. Da wir zuerst die möglicherweise vorkommenden Wellen mit geradliniger Wellenfront bestimmen werden, versuchen wir, mit einer kleinen Verallgemeinerung der Integrale (18, 1), die Störungsgleichungen durch den rein formellen Ansatz:

$$\begin{aligned} u &= A e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y + \delta z} \\ v &= B e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y + \delta z} \\ w &= C e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y + \delta z} \\ p &= \varepsilon D e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y + \delta z} \end{aligned} \quad (1)$$

zu befriedigen. In die Differentialgleichung (17, 1) eingesetzt, ergibt sich dann, indem wir zur Vereinfachung bloß einen vertikalen Rotationsvektor Ω annehmen:

$$\begin{aligned} -i(\beta - \alpha U) A - 2 \Omega B &= -i \alpha D \\ -i(\beta - \alpha U) B + 2 \Omega A &= -\gamma D \\ -i(\beta - \alpha U) C &= -\delta D \\ i \alpha A + \gamma B + \delta C &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Das Verschwinden der Determinante dieses Gleichungssystems gibt nun:

$$-(\beta - aU)^2(-\alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 4 \Omega^2 \delta^2 = 0. \tag{3}$$

Werden α und β als bekannt vorausgesetzt, so stellt diese Gleichung eine quadratische Relation zwischen γ und δ dar. Nach δ aufgelöst, ergeben sich zwei Wurzeln δ und $-\delta$, mit

$$\delta = \frac{(\beta - aU) \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}{\sqrt{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2}}. \tag{4}$$

Entsprechend gibt es zwei primitive Integrale der Form (1) mit dem Faktor $e^{\gamma y + \delta z}$, bzw. $e^{\gamma y - \delta z}$. Da außerdem eine Änderung des Vorzeichens von γ die Gleichung (3) ungeändert läßt, so ergeben sich zwei weitere Integrale derselben Form mit dem Faktor $e^{-\gamma y + \delta z}$, bzw. $e^{-\gamma y - \delta z}$.

Für die willkürlichen Konstanten in (2) erhalten wir ferner, indem dieselben durch C ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} A &= i \frac{\alpha(\beta - aU) + 2 \Omega \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} C} \\ B &= \frac{\gamma(\beta - aU) + 2 \Omega \alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} C} \\ D &= i \sqrt{\frac{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2}{\alpha^2 - \gamma^2}} C. \end{aligned} \tag{5}$$

Das allgemeine Integral als Summe der vier primitiven lautet folglich:

$$\begin{aligned} u &= i \left\{ \frac{\alpha(\beta - aU) - 2 \Omega \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} (C e^{\delta z} - C' e^{-\delta z}) e^{-\gamma y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\beta - aU) + 2 \Omega \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} (C'' e^{\delta z} - C''' e^{-\delta z}) e^{\gamma y} \right\} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v &= \left\{ \frac{-\gamma(\beta - aU) + 2 \Omega \alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} (C e^{\delta z} - C' e^{-\delta z}) e^{-\gamma y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma(\beta - aU) + 2 \Omega \alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} (C'' e^{\delta z} - C''' e^{-\delta z}) e^{\gamma y} \right\} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w &= \{(C e^{\delta z} + C' e^{-\delta z}) e^{-\gamma y} + (C'' e^{\delta z} + C''' e^{-\delta z}) e^{\gamma y}\} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p &= \varepsilon i \sqrt{\frac{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2}{\alpha^2 - \gamma^2}} \{(C e^{\delta z} - C' e^{-\delta z}) e^{-\gamma y} + (C'' e^{\delta z} - C''' e^{-\delta z}) e^{\gamma y}\} e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned}$$

Wir werden nun die Randbedingungen (24, 4—6) berücksichtigen.

Das Verschwinden der Vertikalbewegung für $z=0$ gibt erstens:

$$C + C' = 0, \quad C'' + C''' = 0.$$

Es folgt dann, mit zwei neuen, willkürlichen Konstanten C und C_1 :

$$\begin{aligned} u &= i \left\{ [\alpha(\beta - aU) - 2 \Omega \gamma] C e^{-\gamma y} + [\alpha(\beta - aU) + 2 \Omega \gamma] C_1 e^{\gamma y} \right\} \frac{\cosh \delta z}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v &= \left\{ [-(\beta - aU)\gamma + 2 \Omega \alpha] C e^{-\gamma y} + [(\beta - aU)\gamma + 2 \Omega \alpha] C_1 e^{\gamma y} \right\} \frac{\cosh \delta z}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w &= \{C e^{-\gamma y} + C_1 e^{\gamma y}\} \sinh \delta z e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p &= \varepsilon i \sqrt{\frac{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2}{\alpha^2 - \gamma^2}} \{C e^{-\gamma y} + C_1 e^{\gamma y}\} \cosh \delta z e^{i(\alpha x - \beta t)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Damit die Integrale für $y=\infty$ verschwinden können, muß außerdem entweder C oder C_1 gleich Null gewählt werden, falls sich γ nicht rein imaginär herausstellen sollte.

Wenn nur eine einzige Schicht vorhanden ist, so gibt die Randbedingung an der freien Oberfläche: $z=y \operatorname{tg} \Theta$, nach (24, 6):

$$\begin{aligned} & (\beta - aU) \sqrt{\frac{(\beta - aU)^2 - 4\Omega^2}{\alpha^2 - \gamma^2}} \{ C e^{-\gamma y} + C_1 e^{\gamma y} \} \cosh(\delta y \operatorname{tg} \Theta) - \\ & - 2\Omega U \left\{ [-(\beta - aU)\gamma + 2\Omega\alpha] C e^{-\gamma y} + [(\beta - aU)\gamma + 2\Omega\alpha] C_1 e^{\gamma y} \right\} \frac{\cosh(\delta y \operatorname{tg} \Theta)}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)[(\beta - aU)^2 - 4\Omega^2]}} - \\ & - g(C e^{-\gamma y} + C_1 e^{\gamma y}) \sinh(\delta y \operatorname{tg} \Theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Diese Gleichung kann nur für $\delta=0$ befriedigt werden; aus (4) folgt dann $\gamma=a$. Für α reell, positiv muß ferner, wegen des Verschwindens der Störung für $y=\infty$, $C_1=0$ gewählt werden, und es bleibt die folgende Frequenzgleichung übrig:

$$\sqrt{\frac{\beta - aU - 2\Omega}{\beta - aU + 2\Omega}} [(\beta - aU)^2 + 2\Omega\beta] = 0. \quad (7')$$

Die Bewegung ist für $\delta=0$ horizontal, wodurch die Schwerkraft nicht einwirken kann. Um endliche Horizontalgeschwindigkeiten und Druckkräfte zu erhalten, muß noch C den Faktor $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ enthalten. Die Störungsbewegung kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} u &= i\bar{C} e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y} \\ v &= -\bar{C} e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y} \\ p &= \varepsilon i \frac{\beta - aU + 2\Omega}{\alpha} \bar{C} e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y}. \end{aligned} \quad (6')$$

Die erste Wurzel der Frequenzgleichung (7'):

$$\beta - aU = 2\Omega,$$

wird der reinen Trägheitsbewegung entsprechen.

Die zweite Wurzel gibt:

$$\beta - aU = -\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 2\alpha\Omega U}. \quad (8)$$

Nach Voraussetzung ist das Koordinatensystem so gewählt, daß Θ im ersten Quadranten liegt; nach (24, 3) muß dann $\Omega U < 0$ sein. Da außerdem α reell, positiv ist, so wird der Radikand von (8) immer positiv und folglich die Frequenzen (8) reell werden. Es ergibt sich deshalb immer Stabilität der Gleichgewichtslage.

Für $\Omega=0$ ergibt sich $c=U$; die Fortpflanzung ist dann rein konvektiver Art, indem die Störungen (6') einfach von dem Grundstrom mitgeführt werden.

Für $\Omega \neq 0$ ergeben sich zwei verschiedene Wurzeln (8); von den entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist die eine größer, die andere kleiner als die rein konvektive.

Wenn zwei Schichten vorhanden wären, würden wir die allgemeinere Frequenzgleichung:

$$\varepsilon^I (\beta - aU^I)^2 + \varepsilon^{II} (\beta - aU^{II})^2 + 2\Omega (\varepsilon^I - \varepsilon^{II}) \beta = 0, \quad (9)$$

erhalten, die für $\varepsilon^{II}=0$ in die Formel (7) übergehen.

Auch hier ergibt sich eine rein horizontale Bewegung ohne Eingreifen der Schwere.

Eigentliche Gravitationswellen können folglich nicht durch Integrale der primitiven Form (1), wo γ nur einen einzigen, bestimmten Wert annehmen kann, zur Darstellung gebracht werden. Wir werden deshalb in dem nächsten Paragraphen zu der Aufstellung allgemeinerer Integrale der Störungsgleichungen übergehen.

§ 26. Allgemeinere Integrale der Störungsgleichungen.

Um allgemeinere Integrale aufstellen zu können, greifen wir zu den primitiven Integralen (25, 6) zurück. Wir betrachten z. B. den Ausdruck für den Störungsdruck, der in der Form:

$$p = \varepsilon D e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y} \cosh \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} z}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}}$$

geschrieben werden kann.

Man ersieht nun sofort, daß dieses Integral nicht nur für einen bestimmten Wert der verschiedenen, willkürlichen Konstanten D, α, β, γ zu einer Lösung des Gleichungssystems (17, 1) führen wird, sondern daß dies für alle mögliche Werte von D, α, β, γ der Fall sein muß. Betrachten wir ferner D als Funktion von α, β, γ und drücken wir diese Abhängigkeit dadurch aus, daß wir anstatt dieser Konstante die Funktion $D(\alpha, \beta, \gamma)$ schreiben, so wird, wegen der Superpositionseigenschaft der Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems, der Ansatz

$$p = \varepsilon \sum^{\alpha, \beta, \gamma} D(\alpha, \beta, \gamma) e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y} \cosh \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} z}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}} \quad (1)$$

wieder zu einer Lösung des Systems (17, 1) führen.

Es soll hier über alle mögliche Werte von α, β, γ summiert werden.

Aus der dritten Störungsgleichung (17, 1) folgt ferner, daß in dem der Gleichung (1) entsprechenden Ausdruck für die Vertikalgeschwindigkeit die Koordinate z nur in dem Faktor $\sinh \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} z}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}}$ vorkommen kann. Es wird folglich die Vertikalgeschwindigkeit für $z=0$ verschwinden, wodurch die Randbedingung an der festen Unterlage (24, 4) erfüllt ist.

Es fragt sich nun, ob auch die Randbedingung an der Diskontinuitätsfläche (24, 6) mittels des allgemeineren Integrals (1) zu erfüllen ist. In dieser Randbedingung haben wir dabei die Koordinaten der ungestörten Fläche: $z - y \operatorname{tg} \Theta = 0$, einzuführen. Diese Gleichung enthält nun bloß zwei Koordinaten, y und z , während sie von den zwei übrigen, x und t , unabhängig ist. Die Randbedingung wäre deshalb möglicherweise durch Integrale der Form (1) erfüllbar, wenn es gelänge, eine Summation derjenigen Glieder auszuführen, die y und z enthalten.

Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichung (1) in folgender Form:

$$p = \varepsilon \sum^{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \sum^{\gamma} D(\alpha, \beta, \gamma) e^{\gamma y} \cosh \frac{(\beta - \alpha U) \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} z}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}}.$$

Läßt sich hier die Summation über alle Werte von γ ausführen, so ist damit auch die Summation aller Glieder mit y und z erledigt.

Wir versuchen, über eine kontinuierlich variierende Folge von γ -Werten zu summieren, d. h. wir multiplizieren das Integral mit $d\gamma$ und ersetzen das Summenzeichen durch ein Integralzeichen. Schreiben wir noch zur Abkürzung:

$$p = \varepsilon \sum^{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} f(\alpha, \beta, y, z) \quad (2)$$

und

$$\frac{\beta - \alpha U}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}} = k, \quad (3)$$

so haben wir das Integral

$$f = \int D(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma e^{\gamma y} \cosh(k\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} z) \quad (4)$$

auszuwerten, wo die Integration längs einer kontinuierlichen Kurve in der komplexen γ -Ebene auszuführen ist, deren Endpunkte vorläufig willkürlich gewählt werden können.

Wir werden (4) in etwas veränderter Form schreiben.

Erstens muß das lästige Wurzelzeichen weggeschafft werden, was sich durch Einführung einer neuen Integrationsvariabel erreichen läßt. So können wir z. B.

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)$$

einführen; hieraus folgt nämlich:

$$\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \frac{\alpha}{2i} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right),$$

und das Integral wird:

$$f = \int_C D(\alpha, \beta, \mu) d\mu e^{\frac{1}{2}\alpha y \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)} \cosh \left[\frac{\alpha k z}{2i} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \right].$$

Als Integrationsweg C kann eine in der komplexen μ -Ebene verlaufende, geschlossene Kurve gewählt werden. Damit das Integral von Null verschieden sein soll, ist es dann notwendig, daß die Kurve eine Singularität der Integrandenfunktion einschließt. Wegen des Exponentialgliedes sind nun $\mu=0$ und $\mu=\infty$ irreguläre Singularitäten dieser Funktion; eine um den Nullpunkt geschlossene Integrationskurve wird also jedenfalls ein nicht verschwindendes Integral geben. Setzen wir nun außerdem voraus, daß auch die willkürliche Funktion D nur $\mu=0$ und $\mu=\infty$ als Singularitäten hat, und folglich in eine Laurent'sche Reihe nach μ entwickelbar ist, so kann der Einheitskreis um den Nullpunkt als Integrationskurve verwendet werden. Indem das Argument von μ mit ψ bezeichnet wird, haben wir folglich $\mu=e^{i\psi}$ einzuführen, wo ψ längs der Integrationskurve von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert. Es ergibt sich dann:

$$f = \int_{-\pi}^{\pi} D(\alpha, \beta, \psi) e^{\alpha y \cos \psi} \cosh(\alpha k z \sin \psi) d\psi.$$

Wird das Integral $\int_{-\pi}^{\pi}$ in die zwei Teilintegrale $\int_{-\pi}^0$ und \int_0^{π} verwandelt, und das Vorzeichen von ψ in dem ersten Teilintegral verändert, so folgt hieraus:

$$f = \int_0^{\pi} \left\{ D(\alpha, \beta, \psi) + D(\alpha, \beta, -\psi) \right\} e^{\alpha y \cos \psi} \cosh(\alpha k z \sin \psi) d\psi.$$

Durch die Transformation: $\mu=e^{i\psi}$, ist die Funktion D , die nach Voraussetzung in eine Laurent'sche Reihe entwickelbar war, in eine Fourier'sche Reihe verwandelt worden. Wir können also

$$D(\alpha, \beta, \psi) = \sum_0^{\infty} n \left\{ D_n(\alpha, \beta) \cos n\psi + D'_n(\alpha, \beta) \sin n\psi \right\}$$

setzen, woraus folgt:

$$D(\alpha, \beta, \psi) + D(\alpha, \beta, -\psi) = \sum_0^{\infty} n 2 D_n(\alpha, \beta) \cos n\psi.$$

Unser Integral gibt dann:

$$f = \sum_0^{\infty} n D_n(\alpha, \beta) \int_0^{\pi} e^{\alpha y \cos \psi} 2 \cosh(\alpha k z \sin \psi) \cos n \psi d \psi.$$

Das hier vorkommende bestimmte Integral läßt sich noch in verschiedener Weise umformen.

Schreiben wir für einen Augenblick den hyperbolischen Kosinus in Exponentialform, und wird noch

$$\begin{aligned} y &= r \cos \varphi \\ k z &= r \sin \varphi \end{aligned} \tag{5}$$

eingeführt, so kann das Integral auch in der Form:

$$\int_0^{\pi} \{e^{\alpha r \cos(\psi - \varphi)} + e^{\alpha r \cos(\psi + \varphi)}\} \cos n \psi d \psi$$

geschrieben werden. Durch Veränderung des Vorzeichens von ψ im zweiten Gliede folgt hieraus:

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha r \cos(\psi - \varphi)} \cos n \psi d \psi - \int_0^{-\pi} e^{\alpha r \cos(-\psi + \varphi)} \cos n \psi d \psi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha r \cos(\psi - \varphi)} \cos n \psi d \psi.$$

Einführung der Hilfsvariabel $\omega = \psi - \varphi$ gibt dann:

$$\int_{-\pi - \varphi}^{\pi - \varphi} e^{\alpha r \cos \omega} \cos n(\omega + \varphi) d \omega.$$

Dieses Integral kann in die drei Teilintegrale $\int_{-\pi - \varphi}^{-\pi}$, $\int_{-\pi}^{\pi}$ und $\int_{\pi}^{\pi - \varphi}$ zerlegt werden;

wird dann noch in dem letzten Teilintegral ω durch $2\pi + \omega$ ersetzt, so ergibt sich hieraus das erste Teilintegral mit entgegengesetztem Vorzeichen. Es bleibt also nur das mittlere Integral übrig:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha r \cos \omega} (\cos n \omega \cos n \varphi - \sin n \omega \sin n \varphi) d \omega,$$

das auch in der einfacheren Form:

$$2 \int_0^{\pi} e^{\alpha r \cos \omega} \cos n \omega \cos n \varphi d \omega$$

geschrieben werden kann.

Nach einer bekannten Formel von Hansen läßt sich aber dieses Integral durch die Bessel'sche Funktion n^{ter} Ordnung J_n ausdrücken, indem die Relation:

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha r \cos \omega} \cos n \omega d \omega = \pi i^{-n} J_n(i \alpha r),$$

besteht.

Unsere Funktion f wird dann:

$$f = \sum_0^{\infty} n D_n(\alpha, \beta) 2 \pi i^{-n} J_n(i \alpha r) \cos n \varphi;$$

durch Einführung in (2) und Wegwerfen belangloser Konstanten folgt schließlich:

$$p = \varepsilon \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \sum_0^{\infty} n D_n(\alpha, \beta) J_n(i \alpha r) \cos n \varphi. \tag{6}$$

Um die entsprechenden Ausdrücke der Geschwindigkeitskomponenten zu erhalten, können wir die Störungsgleichungen verwenden. Es kommen dort die ersten Differentialquotienten von p nach y und z vor, die zuerst ausgerechnet werden müssen.

Aus (5) ergeben sich nun:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = k \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k}{r} \cos \varphi. \quad (7)$$

Es folgt deshalb zuerst:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \sum_0^{\infty} n D_n \left[J_n(iar) i\alpha \cos \varphi \cos n\varphi + J_n(iar) \frac{n}{r} \sin \varphi \sin n\varphi \right].$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Relationen zwischen Bessel'scher Funktionen verschiedener Ordnung:

$$J_n(\zeta) = -\frac{1}{2} J_{n+1}(\zeta) + \frac{1}{2} J_{n-1}(\zeta)$$

$$\frac{n}{\zeta} J_n(\zeta) = \frac{1}{2} J_{n+1}(\zeta) + \frac{1}{2} J_{n-1}(\zeta)$$

$$J_{-1}(\zeta) = -J_1(\zeta),$$

ergibt sich aber hieraus:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \frac{i\alpha}{2} \left\{ -D_0 J_1(iar) \cos \varphi + \sum_0^{\infty} n (D_{n+1} - D_{n-1}) J_n(iar) \cos n\varphi \right\}.$$

Entsprechend erhalten wir:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varepsilon \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \frac{i\alpha k}{2} \left\{ D_0 J_1(iar) \sin \varphi + \sum_0^{\infty} n (D_{n+1} + D_{n-1}) J_n(iar) \sin n\varphi \right\}.$$

Es ist hier $D_{-1} = 0$ zu setzen.

Wir machen deshalb versuchsweise den Ansatz:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \left\{ a_1(\alpha, \beta) J_1(iar) \cos \varphi + \sum_0^{\infty} n A_n(\alpha, \beta) J_n(iar) \cos n\varphi \right\} \\ v &= \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \left\{ b_1(\alpha, \beta) J_1(iar) \cos \varphi + \sum_0^{\infty} n B_n(\alpha, \beta) J_n(iar) \cos n\varphi \right\} \\ w &= \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \left\{ c_1(\alpha, \beta) J_1(iar) \sin \varphi + \sum_0^{\infty} n C_n(\alpha, \beta) J_n(iar) \sin n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in die drei ersten Störungsgleichungen (17, 1) und Nullsetzen des Koeffizienten von J_n für alle n erhalten wir dann das folgende, lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -i(\beta - aU) a_1 - 2\Omega b_1 &= 0 \\ -i(\beta - aU) b_1 + 2\Omega a_1 &= \frac{i\alpha}{2} D_0 \\ -i(\beta - aU) c_1 &= \frac{i\alpha k}{2} D_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i(\beta - \alpha U) A_n - 2 \Omega B_n &= -i \alpha D_n \\ -i(\beta - \alpha U) B_n + 2 \Omega A_n &= -\frac{i \alpha}{2} (D_{n+1} - D_{n-1}) \\ -i(\beta - \alpha U) C_n &= \frac{i \alpha k}{2} (D_{n+1} + D_{n-1}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, wenn noch der Wert von k nach (3) eingeführt wird:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i \alpha \Omega}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2} D_0 \\ b_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha (\beta - \alpha U)}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2} D_0 \\ c_1 &= -\frac{\alpha}{2 \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}} D_0, \\ A_n &= \frac{i \alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2} [\Omega (D_{n+1} - D_{n-1}) - i(\beta - \alpha U) D_n] \\ B_n &= \frac{\alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2} \left[\frac{1}{2} (\beta - \alpha U) (D_{n+1} - D_{n-1}) - 2 \Omega i D_n \right] \\ C_n &= -\frac{\alpha}{2 \sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}} [D_{n+1} + D_{n-1}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Ferner berechnen sich die folgenden Ausdrücke aus (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \frac{i \alpha}{2} \left\{ b_1 (J_0 - J_2 \cos 2 \varphi) - B_0 J_1 \cos \varphi + \sum_0^\infty n (B_{n+1} - B_{n-1}) J_n(i \alpha r) \cos n \varphi \right\} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \frac{i \alpha k}{2} \left\{ c_1 (J_0 + J_2 \cos 2 \varphi) - C_0 J_1 \cos \varphi + \sum_0^\infty n (C_{n+1} + C_{n-1}) J_n(i \alpha r) \cos n \varphi \right\}; \end{aligned}$$

werden diese in die vierte Störungsgleichung (17, 1) — die Kontinuitätsgleichung — eingeführt, so zeigt es sich, daß die Gleichung identisch erfüllt ist.

Die Integrale (6) und (8) befriedigen folglich die Bewegungsgleichungen und die Randbedingung an der festen Unterlage: $\varphi = 0$, wenn die Relationen (9) zwischen den Funktionen A, \dots, D erfüllt sind. Die Integrale enthalten also immer noch $n+1$ willkürliche Funktionen D_0, D_1, \dots, D_n . Wenn wir dann schließlich über diese Funktionen in solcher Weise verfügen, daß die Randbedingung an der Diskontinuitätsfläche erfüllt wird, so stellen die Integrale (6) und (8) die Lösung unseres Problems dar.

§ 27. Anwendung auf eine Schicht.

Wir werden die in dem letzten Paragraphen erhaltenen Integrale zur Bestimmung der Wellenbewegung in einer Schicht verwenden.

Wir müssen dann zuerst die Gleichung der ungestörten, freien Oberfläche: $z = y \operatorname{tg} \Theta$, in den neuen Koordinaten r und φ ausdrücken. Nach (26, 5) wird nun diese Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = k \operatorname{tg} \Theta,$$

oder auch durch Einführung des Flächenindex 2 (der Index 1 entspricht, wie immer, der starren Unterlage):

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{2 \Omega U}{g} \frac{\beta - \alpha U}{\sqrt{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2}}. \tag{1}$$

Die Gleichung der gestörten Oberfläche lautet ferner nach (24, 5):

$$2 \Omega U \varepsilon y + g \varepsilon z = p_{\varphi=\varphi_2};$$

durch Einführung des Abstandes \bar{z} von der ungestörten Fläche, wo

$$\bar{z} = -y \sin \theta + z \cos \theta = \frac{2 \Omega U y + g z}{\sqrt{g^2 + 4 \Omega^2 U^2}} \tag{2}$$

ist, ergibt sich hieraus unter Berücksichtigung von (26, 6)

$$\sqrt{g^2 + 4 \Omega^2 U^2} \bar{z} = \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)} \sum_0^\infty D_n(\alpha, \beta) J_n(i \alpha r) \cos n \varphi_2 \tag{3}$$

als Gleichung der gestörten Oberfläche.

Aus der Grenzflächenbedingung (24, 6) an der freien Oberfläche:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) p_{\varphi=\varphi_2} - 2 \Omega U \varepsilon v_{\varphi=\varphi_2} - g \varepsilon w_{\varphi=\varphi_2} = 0,$$

ergibt sich schließlich durch Einführung der Integrale (26, 6) und (26, 8) und Nullsetzen des Koeffizienten von $J_n(i \alpha r)$ für alle n :

$$[-i(\beta - \alpha U) D_n - 2 \Omega U B_n] \cos n \varphi_2 - g C_n \sin n \varphi_2 = 0.$$

Wenn hier die Funktionen B und C mit Hilfe von (26, 9) durch D ersetzt werden, so folgt nach einfacher Rechnung unter Berücksichtigung von (1):

$$\sin(n+1) \varphi_2 D_{n+1} + 2i \frac{(\beta - \alpha U)^3 - 4 \Omega^2 \beta}{2 \Omega U \alpha (\beta - \alpha U)} \sin \varphi_2 \cos n \varphi_2 D_n + \sin(n-1) \varphi_2 D_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Hätten wir hier B oder C als willkürliche Funktion anstatt D behalten, so würde genau dieselbe Rekursionsformel erscheinen.

Aus dieser dreigliedrigen Rekursionsformel lassen sich nun alle D durch D_0 ausdrücken. Setzen wir zur Abkürzung:

$$2i \frac{(\beta - \alpha U)^3 - 4 \Omega^2 \beta}{2 \Omega U \alpha (\beta - \alpha U)} = a, \tag{5}$$

so erhalten wir für die ersten Glieder:

$$\begin{aligned} D_1 &= -a D_0 \\ D_2 &= \frac{a^2}{1 \cdot 2} D_0 \\ D_3 &= -\frac{(1 - 2 \sin^2 \varphi_2) \frac{a^2}{2} - 1}{3 - 4 \sin^2 \varphi_2} a D_0 \\ D_4 &= \frac{(1 - 4 \sin^2 \varphi_2) \frac{a^2}{8} - 1}{3 - 4 \sin^2 \varphi_2} a^2 D_0 \\ &\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Das allgemeine Glied könnte auch angegeben werden. Oft wird wohl übrigens eine Kettenbruchauflösung am vorteilhaftesten erscheinen.

Es wird sich zeigen, daß φ_2 eine kleine Größe ist; die Ausdrücke (6) von D können dann auch in einer Reihe nach steigenden Potenzen der kleinen Größe $\sin^2 \varphi_2$ entwickelt werden.

Wenn $(n+1)\varphi_2$ für keinen positiven, ganzzahligen Wert von n ein Multiplum von π wird, so kann eine unendliche Folge von D -Werten aus der Rekursionsformel (4) be-

rechnet werden. Die Integrale des vorigen Paragraphen enthalten dann eine unendliche Summe von Bessel'schen Funktionen n^{ter} Ordnung ($n=0, 1, 2, \dots$). Es ergibt sich hier keine Frequenzgleichung. Dies wird sonst bei Schwingungsproblemen in unendlich ausgedehnten Räumen immer der Fall sein; denn wenn keine Grenzflächen vorhanden sind, besteht ja kein Grund dafür, daß gerade die Eigenschwingungen aus den unendlich vielen möglichen Schwingungstypen ausgewählt werden sollen.

Wenn dagegen $(n+1)\varphi_2$ für einen positiven, ganzzahligen Wert von n ein Multiplum von π , z. B. gleich $m\pi$, wird, wo m und $n+1$ keinen gemeinsamen Faktor haben, so muß die Reihe der D -Funktionen abbrechen. Aus der Rekursionsformel (4) ergibt sich nämlich in diesem Falle das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 D_1 &+ a \sin \varphi_2 D_0 &= 0 \\ \sin 2 \varphi_2 D_2 &+ a \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 D_1 + 0 \cdot D_0 &= 0 \\ \sin 3 \varphi_2 D_3 &+ a \sin \varphi_2 \cos 2 \varphi_2 D_2 + \sin \varphi_2 D_1 &= 0 \\ \dots &\dots &\dots & (7) \\ 0 \cdot D_{n+1} &+ a \sin \varphi_2 \cos n \varphi_2 D_n + \sin(n-1) \varphi_2 D_{n-1} &= 0 \\ \sin(n+2) \varphi_2 D_{n+2} &+ a \sin \varphi_2 \cos(n+1) \varphi_2 D_{n+1} + \sin n \varphi_2 D_n &= 0 \\ \sin(n+3) \varphi_2 D_{n+3} &+ a \sin \varphi_2 \cos(n+2) \varphi_2 D_{n+2} + 0 \cdot D_{n+1} &= 0 \\ \dots &\dots &\dots \end{aligned}$$

Wenn hier $D_{n+2}=D_{n+3}=\dots=0$ gesetzt werden, so bleiben nur die $n+2$ ersten Gleichungen zwischen den $n+2$ Funktionen D_0, D_1, \dots, D_{n+1} übrig, während sämtliche folgenden Gleichungen identisch erfüllt sind. Aus den $n+2$ Gleichungen können nun erstens die $n+1$ Funktionen D_1, \dots, D_{n+1} durch D_0 ausgedrückt werden, und außerdem ergibt sich die *Frequenzgleichung* durch Nullsetzen der Determinante des Gleichungssystems. Sie lautet folglich:

$$\begin{vmatrix} a \sin \varphi_2 & \sin \varphi_2 & & & & \\ 0 & a \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 & \sin 2 \varphi_2 & & & \\ & \sin \varphi_2 & a \sin \varphi_2 \cos 2 \varphi_2 & \sin 3 \varphi_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \sin(n-1) \varphi_2 & a \sin \varphi_2 \cos n \varphi_2 & 0 \\ & & & & \sin n \varphi_2 & a \sin \varphi_2 \cos(n+1) \varphi_2 \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung stellt eine Relation zwischen α, β und n dar; eine weitere Relation ist durch $(n+1)\varphi_2 = m\pi$ gegeben. Jedem gegebenen Wert von m und n entspricht folglich nicht eine Kurve, sondern ein Punkt in der $\alpha\beta$ -Ebene. Durch Variation von m und n ergibt sich dann eine Punktmenge von Wertpaaren (α, β) , für welche die Randbedingung an der freien Oberfläche erfüllt ist. In den Integralen des vorigen Paragraphen soll dann zuletzt über alle diese Wertpaare (α, β) summiert werden, um die allgemeine Störungsbewegung zu erhalten.

Zur Bestimmung der Funktion $\sum_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x - \beta t)}$ sind noch weitere Grenzbedingungen notwendig, z. B. die genaue Form und Lage der Oberfläche für $t=0$. Für alle Einzelheiten bei der Diskussion der Frequenzgleichung und der Störungsbewegung müssen wir aber auf eine andere Arbeit hinweisen.

Es müssen noch zum Schluß ein paar Worte über die in den Integralen des vorigen Paragraphen vorkommenden Bessel'schen Funktionen und ihr Verhalten im Unendlichen gesagt werden, da unsere Flüssigkeitsschicht nach Voraussetzung sich ins Unendliche erstreckt.

Wie bekannt, verschwindet eine Bessel'sche Funktion erster Art J_n für unendliche Werte des Argumentes nur dann, wenn das Argument rein reell ist. In unserem Falle wird das heißen, daß das Argument

$$i a r = i a \sqrt{y^2 + \frac{(\beta - \alpha U)^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega^2} z^2}$$

reell sein muß, was z. B. für imaginäre Werte von α und β immer zutreffen wird. In dem Exponentialgliede $\sum_{\alpha, \beta} e^{i(\alpha x - \beta t)}$, das in den Integralen vorkommt, wird dann der Exponent reell; dies braucht aber nicht notwendig eine mit der Zeit unendlich anwachsende Störungsbewegung zu bedeuten. Es genügt wohl, in dieser Verbindung auf die Theorie der Einzelwelle hinzuweisen, wo die überall konvergente Stromfunktion der Störungsbewegung auch in eine ähnliche Reihe von Exponentialgliedern: $\sum_{\alpha} e^{-\alpha(x-c t)} f_{\alpha}(z)$, entwickelt werden kann. Es sind hier α und c reell, mit α positiv in der Halbebene: $x > 0$ und negativ in der Halbebene: $x < 0$.

Durch Vertauschung der Bessel'schen Funktionen erster Art mit den entsprechenden halbkonvergenten Hankel'schen Funktionen könnte es zwar erreicht werden, daß die Störungsbewegung im Unendlichen verschwindet, wenn auch α und β reell bleiben; da diese neuen Funktionen unendliche Werte im Nullpunkt ($r=0$) annehmen, können sie aber nicht in der ganzen Flüssigkeitsschicht Verwendung finden. Die Funktionen erster Art dagegen verschwinden sämtlich im Nullpunkt, mit Ausnahme von J_0 , die aber auch endlich bleibt und folglich die Störungsbewegung an der Keilspitze der Flüssigkeitsschicht angeben wird.

§ 28. Transformation der Störungsgleichungen.

Die in § 26 dargestellte Methode zur Bestimmung allgemeinerer Integrale der Störungsgleichungen wird wohl, wegen der Summation unendlicher Reihen, etwas unständig erscheinen und vielleicht auch schwer durchschaubar werden. Wir haben es deshalb für nützlich gehalten, eine einfachere Methode auszuarbeiten, die noch kurz auseinandergesetzt werden soll. Zu dem Zweck muß aber zuerst eine Transformation der Störungsgleichungen durchgeführt werden, die in diesem Paragraphen zur Darstellung kommen soll, während die Integration der transformierten Störungsgleichungen in § 29 erfolgen wird.

Wir kehren zu den vektoriellen Störungsgleichungen (4, 4—5) zurück, die bei einem konstanten Grundstrom vom Skalarwert U und konstanter Dichte ε folgendermaßen lauten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla p, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen werden wir zuerst den Störungsdruck eliminieren, was durch Bildung der curl-Gleichung von (1) erreicht werden kann, da der Rotor eines Potentialvektors bekanntlich gleich Null ist. Wegen der Konstanz von U können dann im ersten Gliede links die Operationen $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)$ und curl vertauscht werden, so daß

sich hierdurch $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \operatorname{curl} \mathbf{v}$ ergibt.

Für die Rotation eines Vektorproduktes gilt ferner im allgemeinen:

$$\operatorname{curl}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A};$$

in diesem Falle, wo \mathbf{A} durch den konstanten Vektor $2 \boldsymbol{\Omega}$ und \mathbf{B} durch \mathbf{v} zu ersetzen sind, ergibt sich dann, unter Berücksichtigung von (2):

$$\operatorname{curl}(2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = -2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Die curl-Gleichung von (1) lautet folglich:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{curl } \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Da zwei verschiedene Vektoren, $\text{curl } \mathbf{v}$ und \mathbf{v} , hier vorhanden sind, so wird die Gleichung in dieser Form für eine Diskussion wenig geeignet sein. Wir versuchen deshalb eine neue vektorielle Differentialgleichung abzuleiten, wo nur noch ein einziger Vektor übriggeblieben ist, während alle anderen vorkommenden Größen Skalare sind. Dies läßt sich auch ziemlich einfach ausführen. Denn aus der obigen curl-Gleichung ist die Äquivalenz der zwei Differentialoperationen $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{curl}$ und $(2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)$ sofort zu ersehen, und dann muß auch eine Gleichung von der Form

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{curl}\right]^2 \mathbf{v} = (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v}$$

bestehen.

Nun ist aber auf der anderen Seite:

$$\text{curl}^2 \mathbf{v} = -\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\text{div } \mathbf{v}),$$

und da das letzte Glied wegen (2) verschwindet, so ergibt sich schließlich:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \nabla^2 \mathbf{v} + (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Wenn ein Integral dieser vektoriellen Differentialgleichung gefunden werden kann, so berechnet sich der Druck aus der inhomogenen, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\epsilon} 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p, \tag{4}$$

die sich aus (1) durch skalare Multiplikation mit $2 \boldsymbol{\Omega}$ ergibt.

Es ist auch möglich, eine entsprechende Elimination des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} aus (1) und (2) auszuführen. Am einfachsten gelingt diese Elimination, wenn wir zuerst aus (1) eine neue, inhomogene Differentialgleichung für den Geschwindigkeitsvektor berechnen, wo kein Vektorprodukt mehr auftritt; aus dieser Gleichung und (2) kann dann nachträglich \mathbf{v} unmittelbar eliminiert werden.

Zu diesem Zwecke multiplizieren wir zuerst (1) vektoriell mit $2 \boldsymbol{\Omega}$. Wegen der Konstanz von $\boldsymbol{\Omega}$ kann dann das erste Glied links in der Form $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (\mathbf{v} \times 2 \boldsymbol{\Omega})$ geschrieben werden, und das hier auftretende Vektorprodukt kann wieder nach (1) eliminiert werden.

Ferner ist nach den Rechnungsregeln der Vektoralgebra:

$$(2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \times 2 \boldsymbol{\Omega} = (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot 2 \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v} - (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}) 2 \boldsymbol{\Omega},$$

so daß wir erhalten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{v} + \frac{1}{\epsilon} \nabla p\right] + 4 \Omega^2 \mathbf{v} - (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}) 2 \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\epsilon} 2 \boldsymbol{\Omega} \times \nabla p.$$

Durch Elimination des skalaren Produktes $2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}$ aus dieser Gleichung und aus (4) ergibt sich dann schließlich:

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 4 \Omega^2\right] \mathbf{v} = & -\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \nabla p + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (2 \boldsymbol{\Omega} \times \nabla p) - (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) 2 \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus dieser inhomogenen Differentialgleichung dritter Ordnung ist die zu einem gegebenen Drucke p gehörige Geschwindigkeitsverteilung leicht zu bestimmen.

Durch Anwendung der Operation div auf (5) erhalten wir auf der linken Seite, wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentialoperationen, einen Ausdruck mit $\text{div } \mathbf{v}$, der nach (2) verschwinden muß. Zur Berechnung der Glieder der rechten Seite verwenden wir die zwei vektoranalytischen Formeln:

$$\text{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \text{curl } \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \text{curl } \mathbf{A}$$

und

$$\text{div} (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A}.$$

Hieraus folgt dann:

$$\text{div} (2 \boldsymbol{\Omega} \times \nabla p) = -2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{curl } \nabla p + \nabla p \cdot \text{curl } 2 \boldsymbol{\Omega} = 0$$

und

$$\text{div} [(2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) 2 \boldsymbol{\Omega}] = (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) \text{ div } 2 \boldsymbol{\Omega} + 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) = (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 p.$$

Schreiben wir noch $\nabla^2 p$ für $\text{div} (\nabla p)$, so erhalten wir schließlich die Differentialgleichung des Druckes in der Form:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \nabla^2 p + (2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 p = 0. \quad (6)$$

Der Druck p befriedigt also eine Differentialgleichung von genau derselben Form wie die Gleichung (3) für den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} .

§ 29. Integration der transformierten Störungsgleichungen.

Wir gehen jetzt zur Integration der transformierten Störungsgleichungen über, indem wir zuerst die Differentialgleichung des Druckes (28, 6) betrachten. Wir schreiben sie folgendermaßen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p + \left(2 \Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + 2 \Omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p = 0. \quad (1)$$

Die Vereinfachungen, die der Rotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ in den §§ 25—27 erfüllen sollte, ($\Omega_x = \Omega_y = 0$), werden wir bei dieser Gelegenheit fallen lassen.

Wir versuchen, die Gleichung durch den Ansatz

$$p = \sum_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x - \beta t) + \gamma y + \delta z} f(y, z) \quad (2)$$

zu befriedigen. In (1) eingeführt, ergibt sich dann, wenn wir über die Konstanten γ und δ in solcher Weise verfügen, daß die Differentialquotienten erster Ordnung $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ verschwinden, was für

$$\gamma = \frac{4 \Omega_x \Omega_y i \alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_y^2 - 4 \Omega_z^2}, \quad \delta = \frac{4 \Omega_x \Omega_z i \alpha}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_y^2 - 4 \Omega_z^2} \quad (3)$$

eintrifft:

$$\begin{aligned} & [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_y^2] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 8 \Omega_y \Omega_z \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + [-(\beta - \alpha U)^2 + 4 \Omega_z^2] \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \\ & + \alpha^2 (\beta - \alpha U)^2 \frac{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_y^2}{(\beta - \alpha U)^2 - 4 \Omega_y^2 - 4 \Omega_z^2} f = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

γ und δ verschwinden also mit Ω_x .

In der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) führen wir eine Koordinatentransformation aus. Dabei werden wir versuchen, die neuen unabhängigen Variablen in solcher Weise zu wählen, daß je eine derselben längs der Begrenzungsfläche der Flüssigkeitsschicht, bzw. längs der einzelnen Flächenstücke derselben einen konstanten Wert annimmt; läßt sich dann außerdem das Integral als ein Produkt von zwei Funk-

tionen darstellen, deren jede nur von einer Koordinate abhängt, so erfolgt die Lösung der Randwertaufgabe besonders einfach.

Wie schon angegeben, ist die Flüssigkeitsschicht von den Ebenen $z=0$ und $z=y \operatorname{tg} \Theta$ begrenzt. Dadurch würde die Einführung von Polarkoordinaten anstatt der kartesischen naheliegender erscheinen; es wird sich aber zeigen, daß die Lösung von (4), in Polarkoordinaten ausgedrückt, nicht als ein Produkt von einer Funktion des Radiusvektors und einer Funktion des Argumentes dargestellt werden kann, und dann ist mit Hilfe dieser Koordinatentransformation gar nichts erreicht worden.

Wir können aber zuerst eine lineare Transformation der Koordinaten y, z ausführen und dann die Polarkoordinaten r, φ verwenden, wodurch sich ergibt:

$$\begin{aligned} y &= \lambda r \cos(\varphi - \varphi_0) \\ z &= r \sin \varphi; \end{aligned} \tag{5}$$

λ und φ_0 stellen vorläufig willkürliche Konstanten dar, die nachträglich zu bestimmen sind. In diesen neuen Koordinaten r und φ ausgedrückt, ist die Gleichung der starren Unterlage durch

$$\varphi_1 = 0 \tag{6}$$

und die Gleichung der Diskontinuitätsfläche durch

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\lambda \operatorname{tg} \Theta \cos \varphi_0}{1 - \lambda \operatorname{tg} \Theta \sin \varphi_0} \tag{7}$$

gegeben. Das Argument φ ist folglich längs den zwei Begrenzungsebenen konstant.

Aus (5) ergeben sich nun zuerst:

$$\begin{aligned} \lambda \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial y} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} \\ \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} &= \sin(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{\partial r} + \cos(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{r \partial \varphi}; \end{aligned}$$

hieraus erhalten wir dann für die Differentialquotienten zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} \right) \\ \lambda \cos^2 \varphi_0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} &= \cos \varphi \sin(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin \varphi \cos(\varphi - \varphi_0) \left(\frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + \cos(2\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} \right) \\ \cos^2 \varphi_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \sin^2(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2(\varphi - \varphi_0) \left(\frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + \sin 2(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sollen nun in (4) substituiert werden. Wenn wir dann über die noch willkürlich gebliebenen Konstanten λ und φ_0 in solcher Weise verfügen, daß die Koeffizienten von $\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$ und $\cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$ verschwinden, wodurch sich

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_y^2}{(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_z^2}}, \quad \sin \varphi_0 = - \frac{4 \Omega_y \Omega_z}{\sqrt{[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_y^2][(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_z^2]}} \tag{8}$$

ergeben, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 f = 0, \tag{9}$$

wo zur Abkürzung:

$$\kappa^2 = \frac{a^2(\beta - aU)^2 [(\beta - aU)^2 - 4 \Omega^2]}{[(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_z^2][(\beta - aU)^2 - 4 \Omega_y^2 - 4 \Omega_z^2]} \tag{10}$$

gesetzt ist.

Unter der Annahme, daß sich die Lösung der Gleichung (9) in Form eines Produktes von einer Funktion von r und einer Funktion von φ darstellen läßt, führen wir

$$f = R(r) \Phi(\varphi) \quad (11)$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$\left[R'' + \frac{1}{r} R' + \kappa^2 R \right] \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' = 0,$$

oder auch

$$\frac{1}{R} [r^2 R'' + r R' + \kappa^2 r^2 R] = -\frac{1}{\Phi} \Phi''.$$

Da die linke Seite eine Funktion von r allein und die rechte Seite eine Funktion von φ allein darstellt, so muß diese Funktion gleich einer Konstante sein; wählen wir für diese Konstante den Wert n^2 , so erhalten wir die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi'' + n^2 \Phi &= 0, \\ r^2 R'' + r R' + (\kappa^2 r^2 - n^2) R &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Die erste Gleichung gibt sofort:

$$\Phi = \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}.$$

Die zweite Gleichung (12) ist eine Bessel'sche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung; sie hat als partikuläre Integrale die Bessel'schen Funktionen erster Art von der Ordnung n und $-n$: $J_n(\kappa r)$ und $J_{-n}(\kappa r)$, vorausgesetzt, daß n nicht Null oder ganzzahlig ist, in welchem Falle das eine Integral logarithmenbehaftet wird (Funktion zweiter Art). Da aber sowohl die Funktion J_{-n} ($n > 0$), wie auch die logarithmenbehaftete Neumann'sche Funktion im Nullpunkt ($r=0$) unendlich werden, können nur die Funktionen mit positiver Ordnungszahl in Frage kommen.

Aus der Randbedingung an der Unterlage: $\varphi_1=0$, ergibt sich ferner, daß für Φ nur die eine Lösung: $\cos n\varphi$, behalten werden darf.

Die Gleichung (11) gibt folglich:

$$f = J_n(\kappa r) \cos n\varphi.$$

Die Konstante n kann eine willkürliche positive Zahl sein; eine allgemeinere Lösung ist folglich durch die Summe

$$f = \sum^n J_n(\kappa r) \cos n\varphi \quad (13)$$

gegeben. Damit die Störungsbewegung im Nullpunkt nicht verschwinden soll, muß der Wert $n=0$ mit enthalten werden. Um schließlich ein Verschwinden der Störung im Unendlichen zu erhalten, muß noch κ reell sein.

Die Geschwindigkeitskomponenten müssen von derselben Form wie die Ausdrücke (2) und (13) für den Störungsdruck sein, denn sie ergeben sich aus der zu (1) identischen Differentialgleichung (28, 3). Die Relationen zwischen den Konstanten A , B , C der Geschwindigkeiten und der in (2) vorkommenden Konstante D des Druckes erhalten wir aus (28, 5).

Um die Grenzflächenbedingung an der Diskontinuitätsfläche, bezw. freien Oberfläche im Falle einer Schicht befriedigen zu können, wird es sich übrigens zeigen, daß n bloß positive, ganzzahlige Werte annehmen darf. Wir haben also nur eine kleine Verallgemeinerung der Integrale des § 26 erreicht, insofern als Ω_x und Ω_y hier nicht vernachlässigt worden sind. Sonst wird aber diese Lösung der dortigen ganz ähnlich sein, auch die Frequenzgleichung bleibt äußerlich dieselbe, nur haben die Konstanten andere Werte. Da eine Diskussion der Störungsbewegung und der Frequenzgleichung an dieser Stelle nicht beabsichtigt ist, sollen auch nicht die allgemeinen Gleichungen hier hingeschrieben werden. Es genügt schon, auf die entsprechenden Gleichungen der §§ 26 und 27 hinzuweisen.

