



## BEZEICHNUNGEN

Die Intensität einer Strahlung, sowie jede andere Zufuhr bzw. Abgabe von Wärme, wird durch den äquivalenten Wärmestrom ausgedrückt, und zwar je nach den Bedürfnissen in cal/cm<sup>2</sup> sec oder cal/cm<sup>2</sup> Stunde gemessen.

Es bedeuten:

- $I$  direkte Sonnenstrahlung.
- $I_r$  reflektierte Sonnenstrahlung.
- $I_m$  in das betreffende Medium eindringende Sonnenstrahlung.
- $D, D_r$  und  $D_m$  die entsprechenden Grössen der diffusen Himmelsstrahlung auf eine horizontale Fläche.
- $Q, Q_r$  und  $Q_m$  die entsprechenden Grössen der gesamten Sonnen- und Himmelsstrahlung auf eine horizontale Fläche.
- $S_T$  Strahlung eines schwarzen Körpers von absoluter Temperatur  $T$ .
- $S_g$  Gegenstrahlung der Atmosphäre.
- $s$  effektive Wärmeausstrahlung einer schwarzen horizontalen Fläche von absoluter Temperatur  $T$  bei klarem Himmel.
- $cR$  effektive Wärmeausstrahlung des Wassers bzw. des Eises bei der Temperatur der Luft.
- $d$  Korrektion derselben infolge der Temperaturdifferenz Wasser — Luft bzw. Eis — Luft
- $s_N = cR + d$  effektive Wärmeausstrahlung des Wassers bzw. des Eises bei Bewölkung  $N$ .
- $s_1$  Wärmestrom durch Verdunstung von der Oberfläche.
- $s_2$  Wärmestrom durch Austausch mit der Luft.
- $S_w$  gesamter Wärmestrom von einer Wasserfläche.
- $S_{ow}$  dasselbe bei 0° C.
- $S_e$  gesamter Wärmestrom von einer Eisfläche.
- $S_{oe}$  dasselbe bei 0° C.
- $k = \frac{S_e}{S_{ow}}$  Verhältniszahl der Wärmeströme von Eis und von nullgradigem Wasser = relativer Wärmestrom einer Eisdecke.
- $s_b$  Wärmestrom durch Wärmeleitung vom Flussboden.
- $s_d$  Wärmestrom durch Umsatz der potentiellen Energie des Wassers.
- $a$  Absorptionskoeffizient.
- $l$  Wärmeleitvermögen (Temperaturleitvermögen =  $k$ ).
- $H$  Dicke des Eises.
- $L, b, F$  Länge, Breite und Fläche des Wasserlaufes.
- $t$  Zeit in Sekunden.
- $n$  Zeit in Stunden.
- $d_0$  Anzahl Stunden mit Tageslicht.
- $N$  Bewölkung (0—10).
- $v, B$  Windgeschwindigkeit m/sec bzw. Windstärke (Beaufort 0—12).
- $f, f_0$  Druck bzw. Sättigungsdruck des Wasserdampfes in der Luft.
- $t, T$  Temperatur °C bzw. °K.
- $p$  Luftdruck.
- $q$  Wasserführung (m<sup>3</sup>/sec).

# THERMISCHE UND DYNAMISCHE BEDINGUNGEN DER EISBILDUNG IN WASSERLÄUFEN AUF NORWEGISCHE VERHÄLTNISSE ANGEWANDT

VON  
*OLAF DEVIK*

(Eingeliefert am 10. Juni 1930).

## 1. Einleitung.

Obwohl der Eisbildungsprozess in der Natur im Laufe der Jahre Gegenstand sehr zahlreicher Untersuchungen gewesen ist, liegt eine quantitative Analyse des recht komplizierten Vorganges nur sehr unvollständig vor. Im Jahre 1928 wurde der Verfasser als Mitglied einer norwegischen Studienkommission beauftragt, einige schwere Eisgänge, die während der Winter 1926—27 und 1927—28 im Fluss Glomma stattgefunden hatten, vom physikalischen Gesichtspunkt aus zu studieren. Es zeigte sich bald, dass eine quantitative Behandlung nicht möglich war ohne umfassende Analyse der einzelnen Teile des Wärmeprozesses und neue Untersuchungen einzelner Probleme. Die vorliegende Arbeit gibt die Resultate dieser Untersuchungen in der Form, dass einerseits die Probleme der Eisbildung physikalisch behandelt und andererseits die Analyse auf praktische Beispiele angewandt werden, vorzugsweise auf norwegische Verhältnisse.

Ein vollständiges Abtrennen der theoretischen Behandlung von der praktischen Anwendung ist jedoch nicht immer möglich gewesen, da die mathematische Behandlung in vielen Fällen durch die Kenntnis der Grössenordnung der verschiedenen Faktoren wesentlich modifiziert wird. Die Methoden werden also für den vorhandenen Stoff bis zu einem gewissen Grade zugeschnitten.

Dies dürfte aber die praktische Anwendung der vorliegenden Arbeit wesentlich erleichtern.

## Kap. I. ÜBERSICHT ÜBER EISBILDUNG UND WÄRMEUMSATZ

### 2. Verschiedene Formen der Eisbildung.

Um bei der Diskussion der einzelnen Wärmeprozesse auf die verschiedenen Formen der Eisbildung Rücksicht nehmen zu können, wird hier eine kurze Übersicht derselben gegeben.

Bei der Abkühlung *stehender* Gewässer im Winter bildet sich das Eis bekanntlich in folgender Weise: von festen Kristallisationszentren am Ufer oder in der Wasseroberfläche selbst wachsen die Eiskristalle innerhalb der unterkühlten Oberflächenschicht des Wassers als breite, anfänglich aber sehr dünne, Kristalläste. Unter günstigen Umständen (bei ruhiger, kalter und klarer Luft) kann man direkt sehen, wie die Kristalläste vorwärts schiessen; in erstaunlich kurzer Zeit kann dann die erste dünne Eisschicht ge-

bildet werden. Bei Wind wird der Prozess verlangsamt, die Bildung einer zusammenhängenden Eisdecke ist jedoch die typische Form.

Die Eisbildung an der Oberfläche *fließender* Gewässer geschieht im wesentlichen in derselben Weise, wenn die Wassergeschwindigkeit so klein ist, dass die Bewegung des Wassers im wesentlichen wirbelfrei ist. Das entstehende Eis setzt sich zuerst als Randeis an den Ufern oder an Steinen und anderen festen Objekten ab, die die Wasseroberfläche durchsetzen, und nach und nach überzieht sich diese mit einer Eisdecke, die dann nach unten wächst.

Wie der Wärmedurchgang einer Eisdecke von den meteorologischen Verhältnissen abhängt, werden wir in den Abschnitten 21 bis 29 behandeln, dabei werden wir auch den Einfluss einer Schneedecke berücksichtigen.

Ganz anders kann die Eisbildung werden, wenn das Gefälle des Wasserlaufes so gross wird, dass *Wirbelbildung* eintritt. Unter Bedingungen, die wir näher diskutieren werden, wird das Eis teils am Boden des Wasserlaufes als Bodeneis auskristallisiert, teils wird es als schwebende und schwimmende Kristallnadeln gebildet, die sich leicht zusammenballen und mit dem Wasser fortbewegen. Die Struktur des Bodeneises kann recht verschieden sein. Da jedoch eine Untersuchung der Strukturformen ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt, werden wir kurzweg vom Bodeneis oder Grundeis sprechen. Uns interessieren vor allem die Bedingungen der Bildung und der Auflösung des Grundeises.

Dabei werden wir auch die eigentümliche Stabilisierung der Eisbildung analysieren, welche in Gebirgsländern mit strengen Wintern regelmässig vorkommt, wie in Norwegen und Schweden. Eine kurze Übersicht dürfte hier am Platze sein. Bei Wasserläufen mit einem Gefälle grösser als etwa 2 m/km (vgl. Abschnitt 32), wo die Tiefe klein und die Breite gross ist, wird die wirbelnde Bewegung des Wassers die Bildung einer zusammenhängenden Eisdecke verhindern. Zwar wächst allmählich das Randeis vom Ufer und von festen Gegenständen im Wasser aus, viel wichtiger ist aber die Bildung von Grundeis. Die Hauptmasse bildet sich am Boden des Wasserlaufes, nicht als kompakte Masse, sondern als ein Kristallgefüge, das durchdringlich wie ein Filter ist. Bei anhaltender Kälte kann das Grundeis eine dicke Schicht im Flussbett bilden, mit grünlicher Farbe. Das Wasser wird dadurch gehoben und überflutet das Randeis, welches dann auf der Oberseite wächst und schnell verstärkt wird. Gleichzeitig bilden sich fortwährend schwimmende Eisnadeln, die sich sehr leicht zu grösseren Massen zusammenkitten. Bei der Unebenmässigkeit der Flusssohle setzen sich diese Massen leicht fest und bilden Verstopfungen, die Aufstauung des Wassers bewirken. Ein kleiner Überlauf wird dadurch gebildet, und die Bildung einer Eisbarre beginnt, die allmählich von der Grundeisschicht aufwärts wächst. Solche Eisdämme können mehrere Meter Höhe erreichen und grosse Wassermagazine bilden. Wir werden in Abschnitt 31 durch Abbildungen zeigen, wie in dieser Weise eine Umbildung des Wasserlaufes stattfindet: das Profil wird treppenförmig, das Gefälle wird auf kurze Strecken konzentriert, und auf den relativ ruhigen Wasserflächen der Eisdämme wächst die Eisdecke von den Ufern nach der Mitte zu.

Durch diesen Prozess wird die Eisbildung stabilisiert und die Wärmeabgabe schnell herabgesetzt. Unter der gebildeten Eisdecke löst sich das festsitzende Grundeis auf durch die Zufuhr von Wärme, die sich jetzt geltend macht. Wenn dann auch die Schwelle des Überlaufes der Eisbarre aufgelöst worden ist, wird das Wasser in dieser Weise wieder einen tieferen Lauf unterhalb der Eismassen einnehmen.<sup>1)</sup>

Wir werden später auf diesen Stabilisierungsprozess zurückkommen. Dann werden wir auch derartige Fälle behandeln, in denen der Prozess unterbrochen wird; unter Umständen können dann auf Strecken mit genügendem Gefälle die ganzen Eismassen des Wasserlaufes durch einen Eisgang gelöst und nach Strecken ruhigeren Laufes geführt werden.

<sup>1)</sup> «Das Wasser hat sich hinunter geschnitten» ist die Ausdrucksweise im Tal der Glomma (Österdalen, Norwegen).

### 3. Die Wärmeprozesse eines Wasserlaufes im Winter.

Eine quantitative Analyse der Eisbildung eines Wasserlaufes muss berücksichtigen, dass der Wärmeaustausch durch folgende Wärmeprozesse allgemeinen Charakters bedingt wird:

- 1) Strahlungsprozesse,
- 2) Verdunstung und Austausch (Konvektion),
- 3) Wärmeleitung vom Material der Flusssohle,
- 4) Erwärmung des Wassers durch Umsatz der potentiellen Energie.

Für den gesamten Wärmeaustausch kommen alle diese Prozesse in Betracht. Für verschiedene Formen der Eisbildung oder Eislösung spielen jedoch die einzelnen Prozesse eine höchst verschiedene Rolle, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Für die quantitative Behandlung der Verdunstung und des Austausches muss der Wärmestrom der Strahlungsprozesse bekannt sein, daher wird dieser zuerst behandelt.

## Kap. II. REFLEXION UND ABSORPTION DER LICHT- UND WÄRMESTRAHLUNG IM WASSER UND IM EIS

### 4. Die Ein- und Ausstrahlung an der Erdoberfläche.

Diese Strahlung umfasst bekanntlich zwei Hauptgruppen:

- A. Eine *kurzwellige Strahlung* vom Typus des Sonnenspektrums, in dem Gebiet etwa  $0,2 \mu - 3 \mu$ , dessen Energieverteilung der Hauptsache nach die des normalen Sonnenspektrums ist (Abb. 1, Kurve A—B), mit ihrem Maximum bei etwa  $0,6 \mu$ .

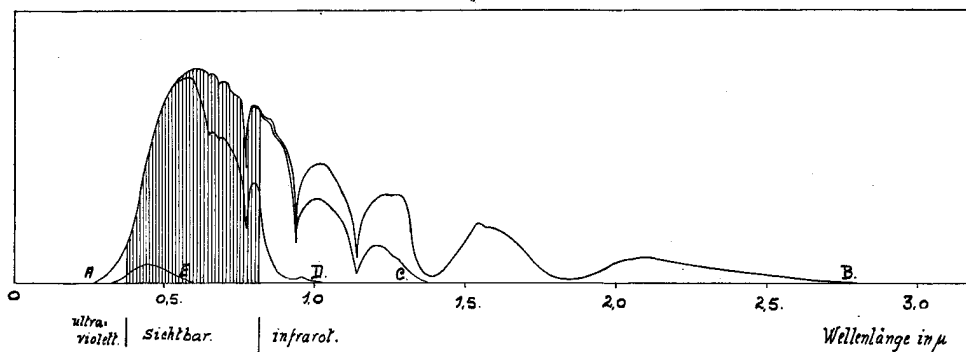


Abb. 1.

A—B	Energieverteilung	des normalen	Sonnenspektrums	(nach Langley).
A—C	»	»	nach dem Durchgang von 1 cm Wasser.	
A—D	»	»	»	» 1 m »
A—E	»	»	»	» 100 m »

(nach Schmidt).

Die Strahlung umfasst:

- a) Die direkte Sonnenstrahlung,
- b) die zerstreute Sonnenstrahlung (diffuse Himmelsstrahlung).

Wir werden im folgenden der Kürze halber diese Strahlung oft als *Lichtstrahlung* bezeichnen, obwohl wir das ganze Gebiet  $0,2 \mu - 3 \mu$  dabei zusammenfassen ohne auf dessen sichtbaren Teil besondere Rücksicht zu nehmen.

- B. Eine *langwellige Strahlung* vom Typus der Temperaturstrahlung eines schwarzen Körpers von der Temperatur der Erdoberfläche. Das Spektrum umfasst das Gebiet etwa  $3,5 \mu - 60 \mu$  mit dem Energiemaximum bei etwa  $10 \mu$  (Abb. 2). Diese Strahlung umfasst:

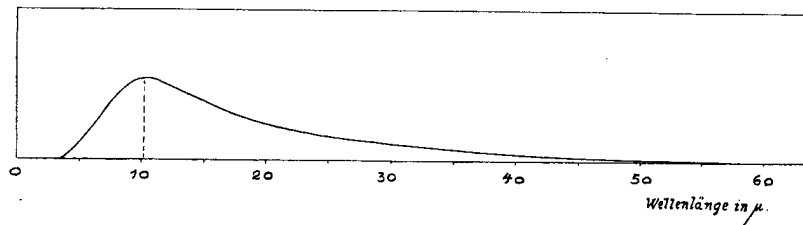


Abb. 2.  
Energieverteilung der Temperaturstrahlung bei 0° C.

- a) Die Ausstrahlung der Erdoberfläche,
- b) die Gegenstrahlung der Atmosphäre.

Wenn wir im folgenden von *Wärmestrahlung* reden, wird diese Strahlung gemeint.

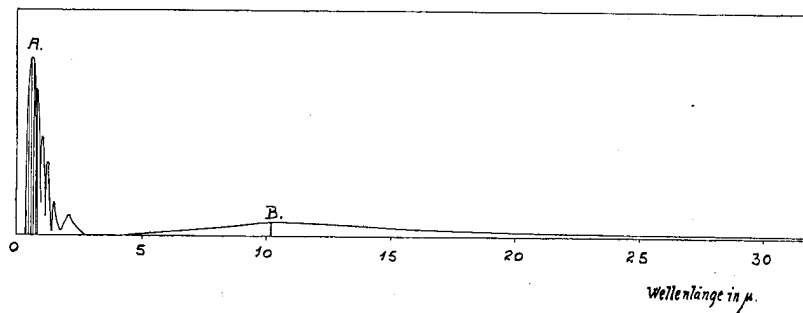


Abb. 3.  
Energieverteilung der Sonnenstrahlung (A) und der Temperaturstrahlung (B) von 0° C bei gleicher Totalenergie.

Der spektrale Unterschied dieser Strahlungsgruppen A und B wird in der Skizze, Abb. 3, illustriert, die die beiden typischen Energiespektren in derselben Skala und mit gleicher Totalenergie darstellt. Diesem Unterschied gemäss verhalten sich diese Gruppen in bezug auf Reflexion und Absorption sehr verschieden, wie die folgenden Abschnitte auseinandersetzen. Eine schematische Übersicht gibt Abb. 4, die die Einstrahlung und Ausstrahlung einer Wasserfläche bei Tage darstellt.

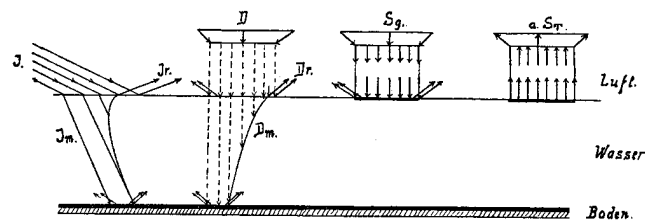


Abb. 4.  
Schematische Darstellung der Einstrahlung und Ausstrahlung an einer Wasserfläche bei Tage.

- a) Von der direkten *Sonnenstrahlung*  $I$  wird ein Teil  $I_r$  an der Oberfläche reflektiert, ein anderer Teil  $I_m$  dringt hinein, erleidet Absorption auf dem Wege zum Boden, und der Rest wird dort im wesentlichen absorbiert.
- b) Der *einfallenden diffusen Lichtstrahlung*  $D$  geht es in der Hauptsache ebenso.
- c) Von der *einfallenden Gegenstrahlung der Atmosphäre*,  $S_g$ , wird ein unbedeutender Anteil reflektiert, der Rest wird in der Oberflächenschicht des Wassers vollständig absorbiert.

- d) Die *Ausstrahlung des Wassers*,  $a \cdot S_T$  (vgl. (11,2)), geht von derselben Oberflächenschicht aus.

Bei Nacht kommen nur die Gegenstrahlung der Atmosphäre (c) und die Ausstrahlung des Wassers (d) in Betracht, die linke Hälfte der Abb. 4 fällt dann weg.

### 5. Die Reflexion an der Wasseroberfläche.

Dass sichtbares Licht in bedeutendem Grade von einer Wasserfläche reflektiert wird, und zwar um so mehr, je kleiner der Neigungswinkel der Strahlen ist (d. h. je grösser der Einfallswinkel), wird jedermann beobachtet haben. Blickt man z. B. von einer Brücke aus auf die Spiegelbilder der Wolken im Wasser, so ist die Intensität der nahen Spiegelbilder bedeutend kleiner als die der entfernteren. Wenn ein Windstreifen die Wasserfläche kräuselt, tritt er als heller Streifen auf dunklem Hintergrund hervor, es werden eben grosse Einfallswinkel an den Wellen auftreten. Auf offener See kann bei leicht bewölktem Himmel die Horizontlinie kaum unterschieden werden.

Fällt eine unpolarisierte Strahlung auf eine Fläche, die keine Metallreflexion zeigt, so ist das Intensitätsverhältnis der reflektierten und der einfallenden Strahlung durch die Fresnelsche Formel gegeben:

$$\frac{I_r}{I} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \frac{1}{2} \frac{\text{tg}^2 (i - r)}{\text{tg}^2 (i + r)} \quad (5,1)$$

( $i$  = Einfallswinkel,  $r$  = Brechungswinkel, verbunden durch die Relation zum Brechungsindex,  $n = \frac{\sin i}{\sin r}$ ).

Mit genügender Genauigkeit kann man für die *direkte Sonnenstrahlung*  $n = 1,33$  (Na-Linie) setzen. Für Neigungswinkel der Strahlen ( $= 90^\circ - i$ ) zwischen  $90^\circ$  und  $0^\circ$  ist die nach (5,1) berechnete relative Intensität der reflektierten Strahlung in Prozenten der einfallenden in der Tabelle 1, erste Linie, gegeben.

Tabelle 1.

		90° - i												
		90°	70°	50°	30°	25°	20°	15°	10°	8°	6°	4°	2°	0°
1.	Ber. Fresnel	2	2	2	6	9	13	21	35	43	53	65	79	100
2.	Beob. Ångström	—	—	—	8	10	15	28	49	56	70	—	—	—
3.	$\frac{I_r}{I} \cdot 100$	2	3	5	8	10	15	25	45	60	70	80	90	100
4.	$\frac{I_m}{I} \cdot 100$	98	97	95	92	90	85	75	55	40	30	20	10	0

W. Schmidt<sup>1)</sup> hat die Fresnelsche Formel experimentell bestätigt gefunden, Lunelund<sup>2)</sup> und Dufour<sup>3)</sup> fanden etwas kleinere Werte für eine blanke Wasserfläche, Ångström<sup>4)</sup> hat für gekräuselte Wasserfläche bedeutend höhere Werte gefunden; seiner

<sup>1)</sup> W. Schmidt: Wiener Ber. 47, S. 75, 1908.

<sup>2)</sup> H. Lunelund: Scient. Fenn. Bd. II, Nr. 11, 1924.

<sup>3)</sup> J. Dufour: Referat: Met. Z. S. 234, 1909.

<sup>4)</sup> A. Ångström: Geogr. Ann. S. 323, 1925.

Messungen sind die Zahlen der zweiten Linie der Tabelle 1 entnommen. Mit etwas ausgeglichenen Werten werden wir die reflektierte Intensität wie in der dritten Linie (Tab. 1) annehmen. Die relative Intensität der eindringenden Strahlung  $I_m$  ist dann durch die Differenz, Linie 4, gegeben.

Die *diffuse Sonnenstrahlung*, die von der Streuung der Atmosphäre und der Wolken herrührt, wird die Wasserfläche unter allen möglichen Einfallswinkeln treffen.

Die Abweichung der spektralen Zusammensetzung dieser diffusen Strahlung von derjenigen der direkten Sonnenstrahlung ist für unsere Berechnung ohne Belang, aber die Intensitätsverteilung am Himmel ist so starken Schwankungen unterworfen, dass eine Berechnung der gesamten reflektierten Intensität unter speziellen Voraussetzungen ohne Interesse ist. Es liegen aber Messungen nach Ångström vor (l. c.), nach denen eine Wasserfläche 10 % der *diffusen Himmelsstrahlung reflektiert*. Für die Intensität der reflektierten  $D_r$  und der eindringenden diffusen Strahlung  $D_m$  ist demnach zu setzen:

$$\begin{aligned} D_r &= 0,1 \cdot D \\ D_m &= 0,9 \cdot D \end{aligned} \quad (5,2)$$

Über die Reflexion der *langwelligen Gegenstrahlung der Atmosphäre* sei bemerkt, dass man nach den Berechnungen von Schmidt<sup>1)</sup> und Messungen von Ångström<sup>2)</sup> und G. Falchenberg<sup>3)</sup> annehmen kann, dass 5 % der einfallenden Wärmestrahlung von der Wasseroberfläche reflektiert werden. Dieser Anteil wird bei der Berechnung der effektiven Ausstrahlung (Abschnitt 11) berücksichtigt.

## 6. Die Absorption im Wasser.

Das Absorptionsspektrum des Wassers ist in den klassischen Arbeiten von E. Aschkinass, F. Paschen und H. Rubens für den Bereich  $0,2 \mu$  bis  $314 \mu$  untersucht worden, allerdings liegen für  $\lambda > 18 \mu$  nur vereinzelte Messungen vor.<sup>4)</sup> Die Messungen zeigen, dass die Absorption beim Übergang vom sichtbaren ins infrarote Gebiet sehr schnell zunimmt. Der Absorptionskoeffizient (definiert durch die Gleichung  $I = I_0 e^{-kx}$ ) ist im sichtbaren Gebiet von der Grössenordnung  $k = 10^{-4}$ , in dem Gebiet  $2 \mu - 18 \mu$  dagegen  $10^6$  bis  $10^7$  mal grösser, wobei eine Reihe relativer Maxima auftritt.

Für das Gebiet des normalen Sonnenspektrums hat Schmidt<sup>5)</sup> die Absorption durch Wasserschichten verschiedener Dicke berechnet. Wir entnehmen seiner Arbeit die Abb. 1<sup>6)</sup>, die die Änderung der Energieverteilung des normalen Sonnenspektrums veranschaulicht. Die Kurve A—B stellt die Energieverteilung an der Wasseroberfläche dar, A—C bzw. A—D und A—E nach dem Durchgang von 1 cm bzw. 1 m und von 100 m Wasser. Die Absorption der Gesamtenergie des normalen Sonnenspektrums kann unter Anwendung der Absorptionstabellen von Schmidt (l. c.) leicht berechnet werden, und es ergibt sich die Tabelle 2, in der die absorbierte und weitergehende Strahlung in Prozenten der einfallenden angegeben ist (senkrechte Inzidenz vorausgesetzt).

Die langen Wellenlängen, die einen bedeutenden Teil der Energie tragen, werden besonders stark absorbiert, und darum ist die Absorption der Gesamtenergie in den oberen Wasserschichten am stärksten: 1 mm Wasser absorbiert 14 % der einfallenden Energie, während eine gleich grosse Schwächung erst nach dem Durchgang von weiteren

<sup>1)</sup> W. Schmidt: Met. Z., S. 111 u. S. 257, 1916.

<sup>2)</sup> A. Ångström: Met. Z., S. 529, 1916 u. S. 14, 1917.

<sup>3)</sup> G. Falchenberg: Met. Z., S. 334, 1928.

<sup>4)</sup> Eine Übersicht über die betreffende Literatur und die Messresultate gibt Kayser, Handb. d. Spektroskopie, Leipzig 1905, Bd. III, S. 389, und International Critical Tables, 1929, Vol. V, S. 269—271.

<sup>5)</sup> W. Schmidt: Wiener Ber. 47, S. 237, 1908.

<sup>6)</sup> l. c. S. 241.



Tabelle 2.

Wasserschicht . . . . .	0,01 mm	0,1 mm	1 mm	1 cm	10 cm	1 m	2 m	5 m	10 m
Absorbierte Sonnenstrahlung . . . . .	0,6	4,8	14	27	45	64	72	78	82 %
Weitergehende Sonnenstrahlung . . . . .	99,4	95,2	86	73	55	36	28	22	18 %

10 mm erreicht wird. Das Wasser bewirkt sozusagen eine Filtration der Strahlung, welche hauptsächlich die kürzeren Wellen passieren lässt.

Um dieses Resultat anwenden zu können, berechnen wir die Absorption bei verschiedenen Einfallswinkeln der Strahlung, wobei ein Brechungsindex von  $n = 1,33$  angenommen wird. Die Tabelle 3 gibt die Resultate für die Tiefen 0,5 m, 1 m, 2 m und 5 m unterhalb der Wasseroberfläche. Diese brauchen wir nicht als horizontal vorauszusetzen, lokal wie in einer Stromschnelle oder einem Wasserfall kann ja jede beliebige Neigung auftreten. Der Einfallswinkel ( $i$ ), die Neigung der Strahlen ( $90^\circ - i$ ) und der Brechungswinkel ( $r$ ) beziehen sich auf diese lokale Wasseroberfläche.

Tabelle 3.

Neigung der Strahlen ( $90^\circ - i$ )	$i$	$r$	Weitergehende Strahlung (%) in der Wassertiefe von			
			0,5 m	1 m	2 m	5 m
90°	0°	0°	48 %	36 %	28 %	22 %
50	40	28,8	45	34	27	21
30	60	40,5	43	32	26	21
20	70	44,8	41	32	26	20
10	80	47,6	40	31	25	20
5	85	48,5	40	31	25	20
0	90	48,6	40	31	25	20

Diese Tabelle zeigt, dass innerhalb der wirklich vorkommenden Einfallswinkel die relative Schwächung der eindringenden Strahlung nur von der Tiefe abhängig ist. Ohne bedeutende Fehler können wir dann dieses Resultat auch für das diffuse Himmelslicht anwenden und mit, für unseren Zweck, ausreichender Genauigkeit annehmen:

*Derjenige Teil der direkten Sonnenstrahlung und der diffusen Himmelsstrahlung, der ins Wasser eindringt, erleidet die stärkste Absorption in den oberen Wasserschichten, deren erster Zentimeter 27 % absorbiert. Nach dem Durchgang durch 0,5 m bzw. 1 m, 2 m und 5 m Wassertiefe werden 40 bzw. 30, 25 und 20 % der eindringenden Strahlung weitergehen.*

Die Gegenstrahlung der Atmosphäre, deren Energieverteilung hauptsächlich die einer Temperaturstrahlung mit Intensitätsmaximum bei etwa  $10 \mu$  ist, wird nach den oben besprochenen Messungen durch eine dünne Wasserschicht vollständig absorbiert. Es wird z. B. eine Wasserschicht von nur 0,01 mm

- bei  $4,7 \mu$  42 %
- 10  $\mu$  51 %
- 15  $\mu$  97 %
- 18  $\mu$  95 % der Strahlung absorbieren.

Es liegen keine Absorptionsmessungen vor, die eine selektive Durchlässigkeit in diesem langwelligen Gebiet andeuten. Das Wasser ist für die Wärmestrahlung der Atmosphäre und der Erdoberfläche als undurchdringlich zu betrachten. Es kann also, wie es früher u. a. Altberg<sup>1)</sup> betont hat, auch keine Abkühlung des Wassers durch Ausstrahlung von den tieferen Wasserschichten stattfinden. Wenn H. T. Barnes<sup>2)</sup> dennoch glaubt eine solche selektive Ausstrahlung annehmen zu müssen um seine Temperaturmessungen zu erklären, so ist zu bemerken, dass diese Messungen gar nicht die Temperatur der unterkühlten dünnen Wasserhäutchen geben, die von der Oberfläche als Wirbelflächen hinuntertauchen (vgl. Abschnitt 15 u. 16). Durch die starke Mischung wird nur ein Durchschnittswert der Temperatur gemessen (vgl. auch Altberg, l. c.).

### 7. Die Reflexion und Absorption des Eises.

Für das sichtbare Licht haben die Brechungsindices des Eises und des Wassers beinahe denselben Wert, der Unterschied ist kleiner als 1%. Das Reflexionsvermögen und das Absorptionsvermögen des Eises sind dann (vgl. Abschnitt 5) für sichtbares Licht praktisch genommen denen des Wassers gleich.

Für das infrarote Gebiet ergaben Messungen der Absorption von Bode<sup>3)</sup>, dass die Absorption des Eises grösser ist als diejenige des Wassers, dagegen fand E. K. Plyler<sup>4)</sup>, in Übereinstimmung mit früheren Messungen von Saunders<sup>5)</sup>, dass die Absorption von Eis und Wasser in dem Gebiet bis  $3,2 \mu$  sich wenig unterscheiden. Für grössere Wellenlängen liegen keine Messungen vor, da aber die Dielektrizitätskonstante für kurze elektrische Wellen denselben Wert (80) sowohl für Eis als auch für Wasser hat, ist man berechtigt anzunehmen, dass die Absorption der Wärmestrahlung für Eis kaum anders ist als für Wasser.

Demnach darf man die Berechnungen der vorhergehenden Abschnitte ohne weiteres auch für Eis geltend machen, einerlei ob das Eis als Oberflächeneis, Grundeis oder schwimmende Eisnadeln vorkommt. Vorausgesetzt ist allerdings, dass das Eis homogen und frei von Luftblasen ist. Die Luftblasen, die immer in einer natürlichen Eisdecke vorkommen, bewirken eine Streuung der eindringenden Strahlung und erhöhen in dieser Weise sowohl die Reflexion als auch die Absorption der oberen Schichten. Noch mehr ist dies der Fall bei einer Schneedecke, die nach Ångström<sup>6)</sup> 70 % der direkten Sonnenstrahlung reflektiert. Wir werden später darauf zurückkommen (Abschnitt 27).

Für die *Wärmestrahlung* der Atmosphäre und der Erdoberfläche dagegen ist nach Obigem sowohl das Eis als auch der Schnee als undurchdringlich («schwarz») anzusehen. Der Wärmeumsatz durch Ausstrahlung und Einstrahlung findet in einer sehr dünnen Oberflächenschicht statt.

## Kap. III. BERECHNUNG DES WÄRMEAUSTAUSCHS DURCH STRAHLUNG

### 8. Der Wärmestrom der direkten Sonnenstrahlung.

Wo keine Registrierungen der direkten Sonnenstrahlung vorliegen, kann die Intensität mit einer gewissen Annäherung berechnet werden. Für das vielseitige Problem einer Berechnung im allgemeinen verweisen wir auf die zusammenfassende Darstellung von

<sup>1)</sup> W. Altberg: Ann. d. Hydr. u. m. Met. LII, Jahrg. 1924, Hft. X.

<sup>2)</sup> H. T. Barnes: Ice Engineering, Montreal 1928.

<sup>3)</sup> G. Bode: Ann. d. Phys. 30, S. 326, 1909.

<sup>4)</sup> E. K. Plyler: Journ. Opt. Soc. Amer. and Rev. Sc. Instr. 9, S. 545, 1924.

<sup>5)</sup> Saunders: John Hopkins Univ. Circ. No. 140, 1899.

<sup>6)</sup> A. Ångström: Geogr. Ann. S. 323, 1925.

Pernter-Exner<sup>1)</sup>, Dorno<sup>2)</sup> und Milch<sup>3)</sup>. Im praktischen Falle wird man womöglich die Berechnung an Messungen anschliessen, die unter ähnlichen atmosphärischen Bedingungen ausgeführt worden sind.

In dieser Arbeit werden die Wasserläufe der Glomma und z. T. des Nidelven behandelt; hauptsächlich wird die Strecke Koppang—Bellingmo in Österdalen (61° 33'—62° 4' n. Br.) behandelt, nebenbei auch kürzere Strecken bei Aursunden (Röros 62° 40' n. Br.) und bei Nidaros (Trondhjem) (63° 26' n. Br.).

Als Grundlage der Berechnungen werden wir Messungen bei klarem Himmel in Schweden und Finnland heranziehen. Die Arbeiten von J. Westmann<sup>4)</sup> und F. Lindholm<sup>5)</sup> geben u. a. Messungen in Nyköping und in Uppsala, und H. Lunelund<sup>6)</sup> hat u. a. Messungen von Helsingfors gegeben.

Im mittelschwedischen Ostseegebiet kann nach den Messungen Westmanns in Nyköping die Stärke der direkten Sonnenstrahlung (auf mittlere Entfernung der Sonne reduziert) durch folgende Formel dargestellt werden:

$$I_1 = 1,61 \cdot 10^{-0,05675 m + 0,00088 m^2} - (0,0114 + 0,0020 m) (f - 6) \text{ cal/cm}^2\text{Min}, \quad (8,1)$$

worin

$$1,4 \leq m \leq 6,0 \text{ Atmosphäre und } 2,0 \leq f \leq 12,0 \text{ mm.}$$

Dabei ist  $m$  die relative Dicke der von den Strahlen durchlaufenen Luftmasse, die nach Bemporads Tabellen<sup>7)</sup> berechnet wird, und  $f$  ist der Dampfdruck des Wasserdampfes an der Erdoberfläche. Die Differenzen zwischen den von Westmann gemessenen und den nach (8,1) berechneten Werten der Strahlung betragen im Mittel nur 2 % (die grösste Abweichung betrug 4 %). Die Messungen Lunelunds (l. c.) in Finnland werden durch die folgende Formel mit einer mittleren Abweichung von etwa 3,5 % dargestellt:

$$I_1 = 1,72 \cdot 10^{-0,07088 m + 0,00241 m^2} - 0,020 (f - 6) \text{ cal/cm}^2\text{Min.} \quad (8,2)$$

Wir werden nach den Formeln (8,1) und (8,2) die Strahlungsintensität bei den Sonnenhöhen  $h = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$  vergleichen. Diesen Sonnenhöhen entsprechen nach Bemporads Tabellen (l. c.) die Luftmassen  $m = 5,600, 2,904, 1,995$  bei normalem Luftdruck. Danach ergeben sich folgende Werte, wenn wir  $f = 3$  mm annehmen:

Sonnenhöhe	10°	20°	30°		
Westmann (8,1) . . . . .	$I_1 = 0,87$	1,16	1,28	$\pm 2\%$	cal/cm <sup>2</sup> Min
Lunelund (8,2) . . . . .	$I_1 = 0,88$	1,18	1,33	$\pm 3,5\%$	

Der Unterschied beträgt also nur einige Prozent, und wir dürfen die Formel Westmanns (8,1) auch für das Gebiet Koppang—Bellingmo (d. h. bei 61°,8 n. Br.) anwenden. Nehmen wir dabei eine mittlere Höhe von rund 400 m an, so wird die entsprechende relative Dicke der durchstrahlten Schicht mit dem Faktor  $\frac{p}{760}$  zu multiplizieren sein,

<sup>1)</sup> J. N. Pernter u. F. M. Exner: Meteorologische Optik, 2. Aufl., 1922.

<sup>2)</sup> C. Dorno: Physik der Sonnen- und Himmelstrahlung, Braunschweig 1919.

<sup>3)</sup> Handbuch der Experimentalphysik, Lpz. 1928, Bd. XXV, I, Optik der Atmosphäre von W. Milch.

<sup>4)</sup> J. Westmann: Medd. f. Statens Met.-Hydr. Anst. Bd. 1, 1920.

Kungl. Sv. Vet. Akad. Handl. Bd. 58, No. 8, 1918.

<sup>5)</sup> F. Lindblom: Kgl. Sv. Vet. Akad. Handl. Bd. 60, No. 2, 1919.

<sup>6)</sup> H. Lunelund: Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Math. II, No. 11, 1924.

<sup>7)</sup> A. Bemporad: Mitt. d. Grossherzog. Sternwarte zu Heidelberg, 1904.

dessen Wert wir im Mittel = 0,95 setzen. Es ergibt sich dann die folgende Tabelle 4. Dabei haben wir einen mittleren Dampfdruck von 3 mm (für die eigentlichen Wintermonate) angenommen.

Tabelle 4. *Wärmestrom der direkten Sonnenstrahlung bei klarem Himmel. Koppang—Bellingmo in Österdalen ( $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br.).*

Sonnenhöhe	10°	20°	30°	
Auf Fläche senkrecht zur Strahlung.....	0,89	1,18	1,31	cal/cm <sup>2</sup> Min
	53	71	78	cal/cm <sup>2</sup> Stunde
Auf eine horizontale Fläche	0,15	0,40	0,65	cal/cm <sup>2</sup> Min
	9,2	24	39	cal/cm <sup>2</sup> Stunde

In der Tabelle 4 sind die Wärmeströme auch in der Einheit cal/cm<sup>2</sup>Stunde angegeben. In unseren Tabellen und praktischen Anwendungen werden wir diese Einheit durchweg benutzen, wenn nichts Besonderes bemerkt wird.

Tabelle 5. *Maximale Sonnenstrahlung (cal/cm<sup>2</sup>) bei  $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br. (Österdalen).*

$I_1$  auf Fläche senkrecht zur Strahlung.

$I_2$  auf horizontale Fläche.

Deklination Tag	A		B		C		D		E		F		G	
	0° 23. Sept. 21. März		−5,5° 8. Okt. 7. März		−11,5° 24. Okt. 19. Febr.		−16,3° 8. Nov. 5. Febr.		−20° 23. Nov. 22. Jan.		−22,6° 8. Dez. 6. Jan.		−23,5° 23. Dez.	
Lokale Zeit	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$
6—7 17—18	22	2,6	2	0,2										
7—8 16—17	52	10	35	5	10	0,6								
8—9 15—16	66	20	56	11	41	6	10	0,6	0,6					
9—10 14—15	72	28	66	20	57	12	40	4,9	24	1,5	6	0,4	1	
10—11 13—14	75	33	71	25	64	17	52	8,7	40	4,8	29	2,4	23	1,5
11—12 12—13	77	36	73	28	66	20	56	11	46	7	36	3,5	32	2,8
Tagessumme .....	728	259	606	198	476	111	316	50	221	27	142	13	112	9

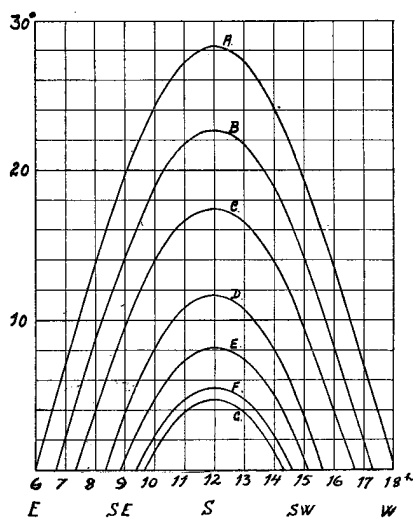
Bei  $L$  % Sonnenscheindauer ist  $I_L = \frac{L}{100} \cdot I$

Bei Bewölkung  $N$  ist  $I_N = \frac{10 - N}{10} \cdot I$  (vgl. unten).

Abb. 5.

Sonnenhöhe bei  $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br. (Österdalen).

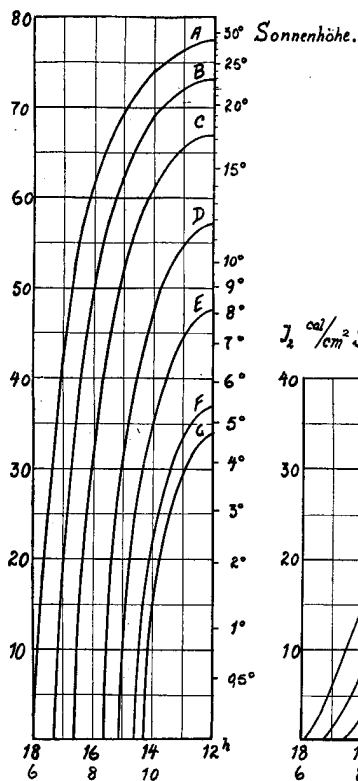
A	Deklination	0°	23. Sept.	21. März
B		-5,5	8. Okt.	7. März
C		-11,5	24. Okt.	19. Febr.
D		-16,3	8. Nov.	5. Febr.
E		-20,0	23. Nov.	22. Jan.
F		-22,6	8. Dez.	6. Jan.
G		-23,5		23. Dez.



In der graphischen Tabelle Abb. 5 (vgl. Abschnitt 10) ist die Sonnenhöhe als Funktion von Deklination und lokaler Tageszeit (für  $\varphi = 61^{\circ},8$ ) gegeben; mit Hilfe dieser Tabelle und der oben angegebenen Beziehung der Sonnenstrahlung zur Sonnenhöhe ist dann die graphische Tabelle Abb. 6 berechnet worden. Die Kurven links geben den

Wärmestrom  $I_1$  der Sonnenstrahlung auf eine Fläche senkrecht zur Strahlung. Die Kurven rechts geben den Wärmestrom  $I_2$  auf eine horizontale Fläche. Auf beiden Figuren ist auch eine Skala der Höhenwinkel angegeben.

$J_1$  cal/cm<sup>2</sup> Stunde.



$J_2$  cal/cm<sup>2</sup> Stunde.

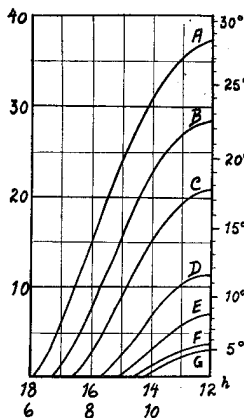


Abb. 6.

Maximale Sonnenstrahlung (cal/cm<sup>2</sup> Stunde) bei  $61^{\circ},8$  n. Br. (Österdalen).

- $I_1$  auf Fläche senkrecht zur Strahlung
- $I_2$  auf horizontale Fläche.

Den Kurven der Abb. 6 entnehmen wir die Tabelle 5 (S. 14), die die maximale Sonnenstrahlung gibt.

Von dieser Strahlung wird ein Teil vom Wasser bzw. vom Eis reflektiert. Dieser Betrag ergibt sich bei Anwendung der Abschnitte 5 und 7 in Verbindung mit der graphischen Tabelle Abb. 6 und Tabelle 5.

In der Weise bekommt man die folgende Tabelle 6 (S. 16), die die Wintermonate umfasst.

Unter Anwendung der Absorptionszahlen des Abschnittes 6 wird dann die maximale Sonnenstrahlung berechnet, die nach dem Durchgang durch eine Wasser- oder Eischicht von der Dicke 0,5, 2, und 5 m noch übrig bleiben würde. Die Resultate gibt die Tabelle 7 (S. 17).

Bei der Berechnung der Tabellen (5), (6) und (7) ist klarer Himmel, d. h. die grösstmögliche Sonnenscheindauer vorausgesetzt. Ist die tatsächliche Sonnenscheindauer  $L$  Prozent der grösstmöglichen, so sind die Zahlen der Tabellen (5), (6) und (7) mit  $\frac{L}{100}$  zu multiplizieren.

Tabelle 6.

Maximale Sonnenstrahlung (cal/cm<sup>2</sup>) bei klarem Himmel, die durch eine Wasser- oder Eisfläche eindringt. ( $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br. Österdalen.)

$I_{m_1}$  durch Fläche senkrecht zur Strahlung.

$I_{m_2}$  durch horizontale Fläche.

	C		D		E		G	
Deklination Tag	—11°,5 24. Okt. 19. Febr.		—16°,3 8. Nov. 5. Febr.		—20° 23. Nov. 22. Jan.		—23°,5 23. Dez.	
Lokale Zeit	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$
7—8 16—17	10	0,1						
8—9 15—16	39	2,1	10	0,1	0,6			
9—10 14—15	55	7,3	39	1,6	24	0,2	1	
10—11 13—14	63	13,0	51	4,5	39	1,6	23	0,4
11—12 12—13	65	15,6	55	6,3	45	2,8	31	0,6
Tagessumme.....	464	79	310	25	217	9	110	2

Bei  $L$  % Sonnenscheindauer ist  $I_L = \frac{L}{100} \cdot I$

Bei Bewölkung  $N$  ist  $I_N = \frac{10 - N}{100} \cdot I$  (vgl. unten).

Wo keine Beobachtung der Sonnenscheindauer vorliegt, ist man auf die Terminbeobachtungen der Bewölkung  $N$  angewiesen. In erster Annäherung kann dann

$$\frac{L}{100} = \frac{10 - N}{10}$$

gesetzt werden. Bei der Bewölkung  $N$  sind also die Zahlen der Tabellen (5), (6) und (7) mit  $\frac{10 - N}{10}$  zu multiplizieren.

Wenn die Zahlen der Tabellen 6 und 7 auch für Eis gültig sein sollen, ist homogenes Eis vorausgesetzt. Da natürliches Eis immer lufthaltig ist, repräsentieren die Zahlen in der Tat eine obere Grenze, welche immerhin einen Anhaltspunkt für die Diskussion im einzelnen Falle gibt.

Man sieht z. B. aus der Tabelle 7, dass zur Zeit der Wintersonnenwende (G) das Verhältnis  $\frac{I_{m_1}}{I_{m_2}}$  um Mittag herum 40 bis 50 sein wird, d. h. der Wärmestrom  $I_{m_1}$ , der durch eine Schicht senkrecht zur Strahlung hindurchgeht, ist 40 bis 50 mal grösser als der Wärmestrom  $I_{m_2}$  durch eine ebenso dicke horizontale Schicht. Diese Verhältniszahl dürfte in der Hauptsache von der Streuung und der Absorption unabhängig sein, die auf  $I_{m_1}$  und  $I_{m_2}$  in derselben Weise wirken. Es ist daher wohl zu erwarten, dass z. B.

Tabelle 7.

Maximale Sonnenstrahlung (cal/cm<sup>2</sup>) nach dem Durchgang durch 0,5, 2 und 5 m Wasser oder Eis, bei klarem Himmel. ( $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br. Österdalen.)

$I_{m_1}$  durch Fläche senkrecht zur Strahlung.

$I_{m_2}$  durch horizontale Fläche.

		C		D		E		G	
Deklination Tag		-11°,5 24. Okt. 19. Febr.		-16°,3 8. Nov. 5. Febr.		-20° 23. Nov. 22. Jan.		-23°,5 23. Dez.	
Lokale Zeit	Schicht- dicke	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$	$I_{m_1}$	$I_{m_2}$
7-8 16-17	0,5 m 2 5	4,0 2,5 2,0							
8-9 15-16	0,5 m 2 5	16 10 8	0,8 0,5 0,4	4,0 2,5 2,0		0,2 0,2 0,1			
9-10 14-15	0,5 m 2 5	22 14 11	2,9 1,8 1,5	16 10 8	0,6 0,4 0,3	10 6 5	0,1 0,1 0,0	0,4 0,3 0,2	
10-11 13-14	0,5 m 2 5	25 16 13	5,2 3,2 2,6	20 13 10	1,8 1,1 0,9	16 10 8	0,6 0,4 0,3	9 6 5	0,2 0,1 0,1
11-12 12-13	0,5 m 2 5	26 16 13	6,2 3,9 3,1	22 14 11	2,5 1,6 1,3	18 11 9	1,1 0,7 0,6	12 8 6	0,3 0,2 0,1
Tages- summe	0,5 m 2 5	186 117 94	30 17 15	124 79 62	9,6 6,2 5,0	88 54 44	3,6 2,4 1,8	43 29 22	1,0 0,6 0,4

Bei  $L$  % Sonnenscheindauer ist  $I_L = \frac{L}{100} I$

Bei Bewölkung  $N$  ist  $I_N = \frac{10 - N}{100} I$  (vgl. unten).

Eisdämme, deren Frontseite steil und der Sonnenstrahlung ausgesetzt sein können, unter Umständen eine viel grössere Strahlungsintensität bis zum Dammfusse hindurchlassen können als auf der horizontalen Strecke.

An dieser Stelle möchten wir auch bemerken, dass der Reduktionsfaktor  $\frac{10 - N}{10}$

bei der Bewölkung  $N$  nur als Durchschnitt gültig sein kann; in der Tat ist ja der Sonnenschein bei  $N < 10$  immer *intermittierend*; die direkte Einstrahlung wechselt also zwischen niedrigen Werten oder Null und dem maximalen Wert. *Je kleiner die Bewölkung ist, um so grösser wird die gesamte Zeit sein können, innerhalb derer die Einstrahlung ihren Maximalwert erreicht.*

Wir werden später, bei der Diskussion einzelner Eisgänge, auf diese Fragen zurückkommen.

### 9. Der Wärmestrom der totalen Einstrahlung.

Am Tage empfängt die Erdoberfläche ausser der direkten Sonnenstrahlung auch die zerstreute, diffuse Himmelsstrahlung. Die Summe dieser beiden Komponenten, welche als *totale Einstrahlung*  $Q$  bezeichnet wird, steht nach Ångström<sup>1)</sup> in der folgenden einfachen Relation zu der totalen Einstrahlung  $Q_0$  bei klarem Himmel:

$$Q = Q_0 (0,25 + 0,75 \frac{L}{100}) \quad (9,1)$$

wo  $\frac{L}{100}$  das Verhältnis der Sonnenscheindauer zur höchstmöglichen ist. ( $L$  = Prozent Sonnenscheindauer.) Diese empirische Formel ergibt sich auf Grund des Registriermaterials von Stockholm und stellt eine Durchschnittsregel dar, von der nicht nur der einzelne Tag, sondern auch der einzelne Monat erhebliche Abweichungen zeigen kann. In dem Falle, wo keine Beobachtung der Sonnenscheindauer vorliegt, wird man bei der Bewölkung  $N$  annähernd

$$\frac{L}{100} = \frac{10 - N}{10}$$

setzen können und erhält dann

$$Q = Q_0 (1 - 0,075 N) \quad (9,2)$$

Für unseren Zweck benutzen wir die Daten, die Ångström für die totale Einstrahlung  $Q_{01}$  an klaren Tagen in Stockholm 1922—23 angegeben hat. Aus einer Kurve seiner Arbeit (l. c.) entnehmen wir folgende Zahlen:

Tabelle 8. Stockholm ( $\varphi_1 = 59,3$  n. Br.).

Deklination	Tag	Totale Einstrahlung $Q_{01}$ an einem klaren Tage (cal/cm <sup>2</sup> Tag)	Berechnet nach (9,7)
— 8,3	15. Okt.	222	(230)
— 18,3	15. Nov.	128	(128)
— 23,2	15. Dez.	76	(77)
— 21,3	15. Jan.	76	(98)
— 13,0	15. Febr.	208	(172)

Wenn  $Q_{01}$  als Funktion der Deklination  $\delta$  der Sonne dargestellt wird, zeigt es sich, dass die Abhängigkeit annähernd linear ist.

Wir schreiben daher

$$Q_{01} = a_1 + b_1 \delta \quad (9,3)$$

Infolge der Verbindung

$$\delta = h - (90^\circ - \varphi_1) \quad (9,4)$$

wo  $h$  die Mittagshöhe der Sonne und  $\varphi_1$  die Polhöhe ist, wird auch

$$Q_{01} = a_1 + b_1 (h - (90^\circ - \varphi_1)) \quad (9,5)$$

Bei *konstanter Polhöhe*  $\varphi_1$  würde bei einer Mittagshöhe  $h = 0$  — die allerdings in Stockholm nicht erreicht wird — die Einstrahlung sehr klein sein. Wir dürfen demnach

$$a_1 - b_1 (90^\circ - \varphi_1) = 0 \quad (9,6)$$

annehmen. Der Tabelle 8 entnehmen wir bei  $\delta = -18,3^\circ$  den Wert  $Q_{01} = 128$ ; wird ferner  $\varphi_1 = 59,3$  eingesetzt, so werden  $a_1$  und  $b_1$  durch (9,3) und (9,6) bestimmt. Man findet so:

$$Q_{01} = 316 + 10,3 \delta \quad \text{bei } \varphi_1 = 59,3 \quad (9,7)$$

<sup>1)</sup> A. Ångström, Ymer, S. 1, 1924. Geogr. Ann. S. 122, 1925.



Für die ersten Wintermonate, Oktober bis Dezember, welche für unsere Anwendung in Betracht kommen, werden die Messungen durch diese Gleichung befriedigend dargestellt, wie die eingeklammerten Zahlen rechts in der Tabelle 8 zeigen.

Für die Reduktion auf andere Polhöhen bemerken wir, dass bei *konstanter Deklination*  $\delta$  der Sonne nach (9,4) die Mittagshöhe  $h$  in demselben Mass abnehmen wird wie die Polhöhe  $\varphi$  zunimmt. Bei der Polhöhe  $\varphi_0 = 90^\circ + \delta$  wird die Mittagshöhe = 0 und die totale Einstrahlung sehr gering sein. Nehmen wir in erster Annäherung eine lineare Abnahme auf der Strecke von  $\varphi_1$  über  $\varphi_2$  bis  $\varphi_0$  an, so wird dann sowohl

$$Q_{01} = k (\varphi_0 - \varphi_1) \quad \text{als auch} \quad Q_{02} = k (\varphi_0 - \varphi_2) \quad (9,8)$$

Es ist somit  $k = \frac{Q_{01}}{\varphi_0 - \varphi_1} = \frac{Q_{01}}{90^\circ + \delta - \varphi_1}$  oder nach Anwendung der Gl. (9,3) und (9,6):

$$k = \frac{a_1 + b_1 \delta}{\frac{a_1}{b_1} + \delta} = b_1 \quad (9,9)$$

Somit ergibt sich aus den beiden Gleichungen (9,8) die Reduktionsformel

$$Q_{02} = Q_{01} - b_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (9,10)$$

als eine erste Annäherung.

In unserem Falle wird also die totale Einstrahlung  $Q_0$  bei der Polhöhe  $\varphi$  durch die Formel

$$Q_0 = 316 + 10,3 \delta - 10,3 (\varphi - 59,3) \quad (9,11)$$

gegeben sein.

Wir berechnen demnach für unsere Anwendung die folgende Tabelle,<sup>1)</sup> unter Anwendung der Gleichungen (9,1) und (9,2):

Tabelle 9.

*Totale Einstrahlung* auf eine horizontale Fläche während der Wintermonate in cal/cm<sup>2</sup>Tag.

$$\text{I. } \varphi = 61,8 \text{ Österdalen} \quad \begin{aligned} Q &= (290 + 10,3 \cdot \delta) \left( 0,25 + 0,75 \frac{L}{100} \right) \\ Q &= (290 + 10,3 \cdot \delta) (1 - 0,075 N) \end{aligned}$$

$\delta$	L = Tag	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	Prozent Sonnen- schein
		N = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Be- wölkung
-11,5	24. Okt. (19. Febr.)	171	158	145	133	120	107	94	81	68	56	43	
-16,3	8. Nov. (5. Febr.)	122	113	104	95	85	76	67	58	49	40	30	
-20,0	23. Nov. (22. Jan.)	84	78	71	65	59	52	46	40	34	27	21	
-22,6	8. Dez. (8. Jan.)	57	53	49	44	40	36	31	27	23	19	14	
-23,5	23. Dez.	48	44	41	37	34	30	26	23	19	16	12	

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, dass unsere Tabellen eine gewisse zahlenmässige Toieranz haben, weil wir bei der Berechnung einen ausgedehnten Gebrauch des Rechenschiebers gemacht haben.

$$\text{II. } \varphi = 62^{\circ},6 \text{ Rörörs } Q = (282 + 10,3 \cdot \delta) \left( 0,25 + 0,75 \frac{L}{100} \right) \\ Q = (282 + 10,3 \cdot \delta) (1 - 0,075 N)$$

$\delta$	Tag	$L =$	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	Prozent Sonnen- schein
		$N =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Be- wölkung
-11°,5	24. Okt. (19. Febr.)		163	151	139	126	114	102	90	77	65	53	41	
-16,3	8. Nov. (5. Febr.)		114	105	97	88	80	71	63	54	46	37	29	
-20,0	23. Nov. (22. Jan.)		76	70	65	59	53	48	42	36	30	25	19	
-22,6	8. Dez. (8. Jan.)		49	45	42	38	34	31	27	23	20	16	12	
-23,5	23. Dez.		40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	

$$\text{III. } \varphi = 63^{\circ},3 \text{ Nidaros (Trondhjem) } Q = (275 + 10,3 \cdot \delta) \left( 0,25 + 0,75 \frac{L}{100} \right) \\ Q = (275 + 10,3 \cdot \delta) (1 - 0,075 N)$$

$\delta$	Tag	$L =$	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	Prozent Sonnen- schein
		$N =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Be- wölkung
-11°,5	24. Okt. (19. Febr.)		156	144	133	121	109	98	86	74	62	51	39	
-16,3	8. Nov. (5. Febr.)		107	99	91	83	75	67	59	51	43	35	27	
-20,0	23. Nov. (22. Jan.)		69	64	59	53	48	43	38	33	28	22	17	
-22,6	8. Dez. (8. Jan.)		42	39	36	33	29	26	23	20	17	14	11	
-23,5	23. Dez.		33	31	28	26	23	21	18	16	13	11	8	

Da die Formeln für  $Q$  linear sind, werden diese Tabellen auch bequem graphisch dargestellt.

Der Wärmestrom der *diffusen Einstrahlung* ergibt sich als Differenz der totalen Einstrahlung und der direkten Sonnenstrahlung:  $D = Q - I$ . Für Österdalen ( $\varphi = 61^{\circ},8$ ) wird  $Q$  aus der Tabelle 9,I und  $I = \frac{L}{100} I_2$  oder  $I = \frac{10 - N}{10} \cdot I_2$  aus der Tab. 5 gefunden.

Von besonderem Interesse ist der Teil  $D_m$ , der ins Medium (Wasser oder Eis) hindringen wird. Da die Reflexion der diffusen Strahlung (vgl. Abschnitt 5) an der Oberfläche 10 % ist, kann man setzen:

$$D_m = 0,9 (Q - I) \quad (9,12).$$

Für Österdalen,  $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br., erhalten wir dann für die eindringende diffuse Strahlung (Tabelle 10):

$$D_m = 0,9 \left[ (290 + 10,3 \cdot \delta) \left( 0,25 + 0,75 \frac{L}{100} \right) - \frac{L}{100} \cdot I_2 \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag} \quad (9,13)$$

bezw.

$$D_m = 0,9 \left[ (290 + 10,3 \cdot \delta) \left( 1 - 0,075 N \right) - \frac{10 - N}{10} \cdot I_2 \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag.}$$

Tabelle 10.

*Diffuse Einstrahlung*, die durch eine Wasser- oder Eisfläche hineindringt. (cal/cm<sup>2</sup>Tag.)  
 $\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br., Österdalen.

$\delta$	Tag	$L =$	100	80	60	40	20	0	Prozent Sonnen- schein
		$N =$	0	2	4	6	8	10	Be- wölkung
-11,5	24. Okt. (19. Febr.)		55	52	49	45	42	39	
-16,3	8. Nov. (5. Febr.)		65	57	50	42	35	27	
-20,0	23. Nov. (22. Jan.)		51	45	38	32	25	19	
-22,6	8. Dez. (8. Jan.)		40	34	29	24	18	13	
-23,5	23. Dez.		35	30	25	20	16	11	

Addiert man zu dieser eindringenden diffusen Strahlung  $D_m$  die eindringende direkte Sonnenstrahlung, die aus der Tabelle 6 berechnet wird, so erhält man die *eindringende totale Strahlung  $Q_m$  durch eine horizontale Fläche von Wasser oder Eis*:

$$\left. \begin{aligned} Q_m &= D_m + \frac{L}{100} \cdot I_{m_2} \\ Q_m &= D_m + \frac{10 - N}{10} \cdot I_{m_2} \end{aligned} \right\} \quad (9,14)$$

Für Österdalen,  $\varphi = 61^{\circ},8$ , erhalten wir dann nach (9,14) unter Benutzung der Tabellen 10 und 6 die unten gegebene Tabelle 11.

Wendet man endlich auf die Zahlen dieser Tabelle die Reduktionszahlen der Absorption nach den Abschnitten 6 und 7 an, so erhält man *denjenigen Teil der totalen Einstrahlung, der in eine gegebene Tiefe hineindringen wird*, wie unterhalb der Tabelle 11 angegeben ist. (Dabei ist allerdings, wie früher betont, homogenes Eis vorausgesetzt, dessen Verteilung im Wasser aber willkürlich sein kann.)

Betreffs der Tabellen, welche in diesen Abschnitten gegeben sind, müssen gewisse Reservationen betont werden. Erstens können, wie es die Registrierungen in Stockholm während der letzten Jahre<sup>1)</sup> zeigen, grosse Schwankungen der Einstrahlung stattfinden ohne den ausgeprägten Zusammenhang mit der Sonnenscheindauer zu zeigen, welcher durch die Formel (9,1) ausgedrückt ist. (Eine Registrierung der Sonnenscheindauer kann also eine Registrierung des Wärmestromes der Einstrahlung nicht ersetzen.) Zweitens kommt

<sup>1)</sup> Statens Meteorologisk-Hydrografiske Anstalt, Årsbok 1925, 1926, 1927.

Tabelle 11.

*Totale Einstrahlung*  $Q_m$ , die durch eine horizontale Wasser- oder Eisfläche eindringt.  
(cal/cm<sup>2</sup>Tag.)

$\varphi = 61^{\circ},8$  n. Br. Österdalen.

$\delta$	Tag	$L =$	100	80	60	40	20	0	Prozent Sonnen- schein
		$N =$	0	2	4	6	8	10	Be- wölkung
-11,5	24. Okt. (19. Febr.)		134	115	96	77	58	39	
-16,3	8. Nov. (5. Febr.)		90	77	65	52	40	27	
-20,0	23. Nov. (22. Jan.)		60	52	44	35	27	19	
-22,6	8. Dez. (8. Jan.)		44	38	32	25	19	13	
-23,5	23. Dez.		37	32	27	21	16	11	

Wärmestrom in der Tiefe 0,5 m ist =  $0,40 \cdot Q_m$   
 » » » » 1,0 » » =  $0,30 \cdot Q_m$   
 » » » » 2,0 » » =  $0,25 \cdot Q_m$   
 » » » » 5,0 » » =  $0,20 \cdot Q_m$

hierzu, dass an solchen Stellen, wo nur die Bewölkung an drei Observationsterminen beobachtet wird, die Unsicherheit natürlich noch grösser sein wird, und die berechneten Zahlen sind nur der Grössenordnung nach als brauchbar zu bezeichnen. Dass jedoch die Grössenordnung richtig gegeben wird, zeigt ein Vergleich des bisher publizierten Stockholm-Materials (l. c.) mit den Zahlen, die (auf Stockholm reduziert) aus den Tabellen 5 und 9 berechnet werden.

Für die Anwendung ist die erwähnte Unsicherheit jedoch von geringer Bedeutung, da im allgemeinen die Einstrahlung während der Wintermonate, im Vergleich zu den Wärmeverlusten durch Ausstrahlung und Konvektion, klein ist. Nur unter besonderen Umständen, wo senkrechte Inzidenz der direkten Sonnenstrahlung möglich ist, wird das Grössenverhältnis ein anderes, wie am Schluss des vorigen Abschnitts behandelt wurde.

#### 10. Einfluss der Topographie auf die lokale Sonnenscheindauer.

Der natürliche Horizont eines Ortes wird die direkte Sonnenstrahlung abschirmen, wenn der Höhenwinkel der Sonne kleiner ist als der Höhenwinkel des Horizontes für den betreffenden Azimut. Für das Gebiet Koppang—Bellingmo in Österdalen werden wir eine quantitative Darstellung dieser topographischen Abschirmung des Wasserlaufes folgendermassen geben. In der Abb. 7 ist eine vereinfachte topographische Karte dieser Strecke gegeben. Die Längenteilung (in km) gibt die Länge des Wasserlaufes, vom Meer aus gemessen, an. Die Angaben der Abb. 8 und 9 beziehen sich auf diese Längenteilung.

a. Für jeden Kilometer der Längenteilung wird der Höhenwinkel des Horizontes für verschiedene Azimuts (Stundenwinkel) auf der Karte<sup>1)</sup> ausgemessen. Man benutzt dabei zweckmässig eine Zelluloidscheibe mit radialer Winkelteilung für je 15° von Ost bis

<sup>1)</sup> Norges Geografiske Opmåling: Topografisk kart over Norge. Bl. 32 C, 38 A, 37 B, 38 C.

West (den Stunden 6 Uhr bis 18 Uhr entsprechend) und mit zirkulärer Längenteilung zur Messung der Abstände. Die Abbildungen 8 a, 8 b, 8 c geben eine synoptische Darstellung der in dieser Weise gemessenen Horzonhöhe für alle Punkte des Wasserlaufes auf der Strecke 375—425 km. Als Ordinate sind die Azimuts (in Stunden gemessen) eingetragen, als Abszisse die Kilometerdistanz, und Punkte gleicher Horzonhöhe sind durch äquiskalare Kurven miteinander verbunden.

b. Durch Anwendung der Gleichung der Sonnenhöhe

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (10,1)$$

( $h$  = Sonnenhöhe,  $\varphi$  = Polhöhe,  $\delta$  = Deklination,  $t$  = Stundenwinkel der wahren Sonne) kann eine entsprechende synoptische Darstellung der Sonnenhöhe als Funktion von Azimut und Ort in der folgenden Weise gegeben werden.

Wir wählen folgende Zeitpunkte und Deklinationen:

Tabelle 12.

	Deklination	Zeitpunkt
A	0°	23. Sept. 21. März
B	— 5,5	8. Okt. 7. März
C	—11,5	24. Okt. 19. Febr.
D	—16,3	8. Nov. 5. Febr.
E	—20,0	23. Nov. 22. Jan.
F	—22,6	8. Dez. 6. Jan.
G	—23,5	23. Dez.

Für das erwähnte Gebiet kann mit dem Mittelwert der Polhöhe  $\varphi = 61^{\circ}48' = 61^{\circ},8$  gerechnet werden. Die Formel (10,1) gibt dann die Sonnenhöhe als Funktion der Zeit und der Deklination, wie die Kurven der Abb. 5 es darstellen. Eine synoptische Karte der Sonnenhöhe in dem betreffenden Gebiet wird dann einfach durch Linien parallel zur Längenteilung dargestellt, deren Ordinaten (Azimut) von der betrachteten Kurve in Abb. 5 direkt zu entnehmen sind. Im ganzen werden in dieser Weise 7 synoptische Karten der Sonnenhöhe für die Zeitpunkte A—G (Tabelle 12) gezeichnet.

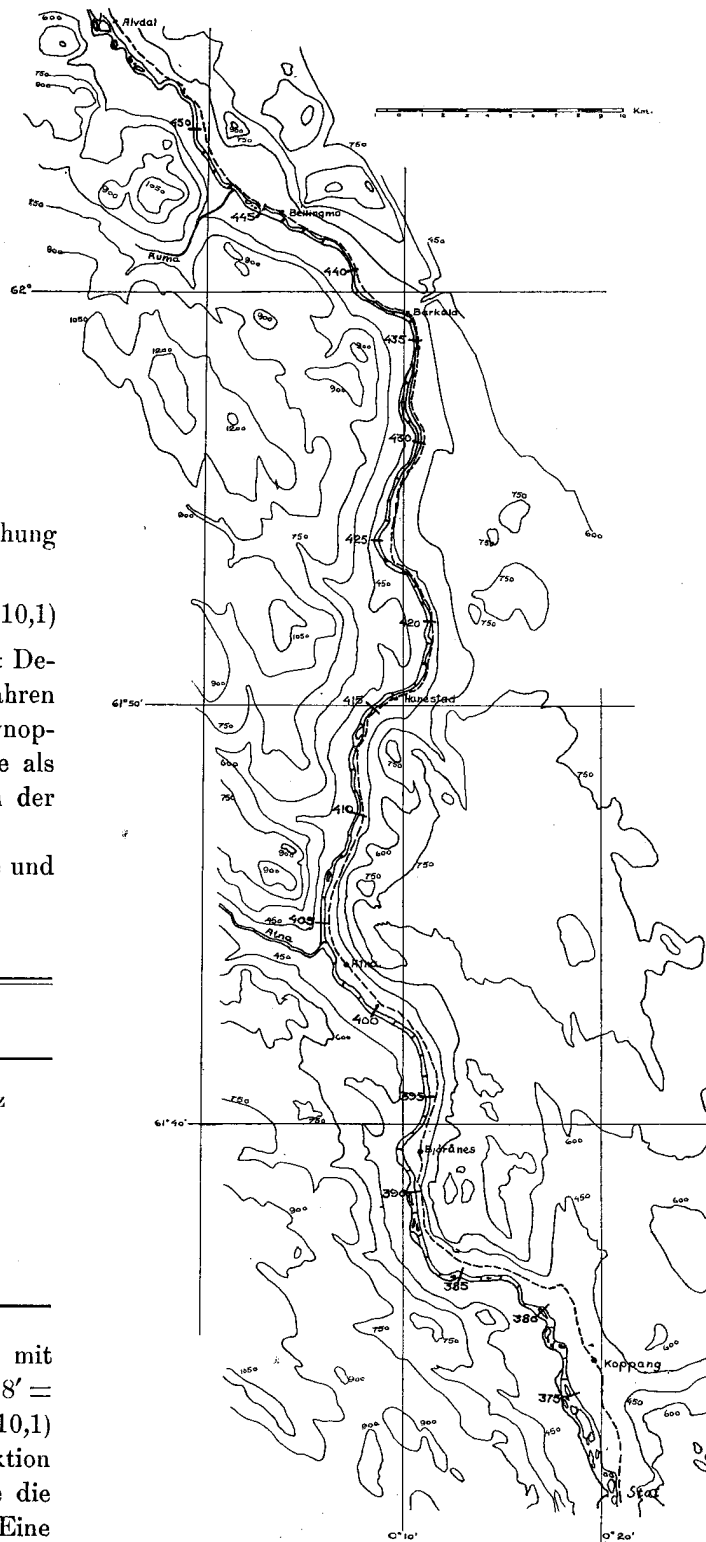


Abb. 7. Topographische Karte der Strecke Koppang—Bellingmo in Österdalen. Höhe in m.

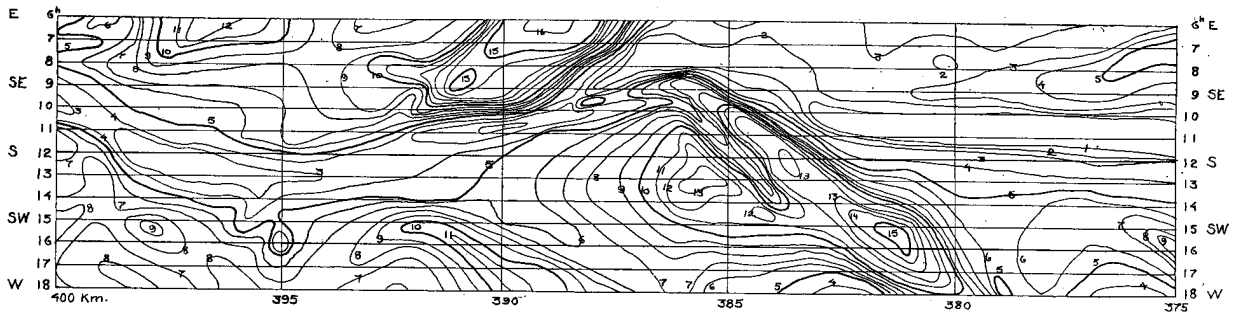


Abb. 8a.

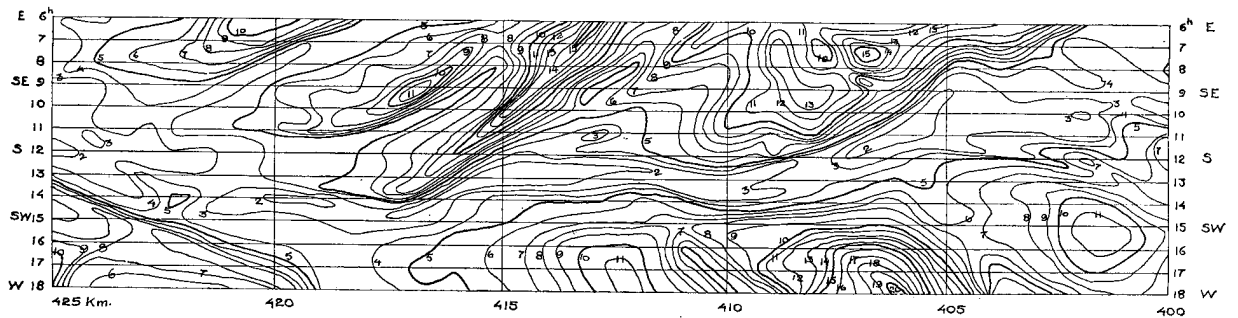


Abb. 8b.

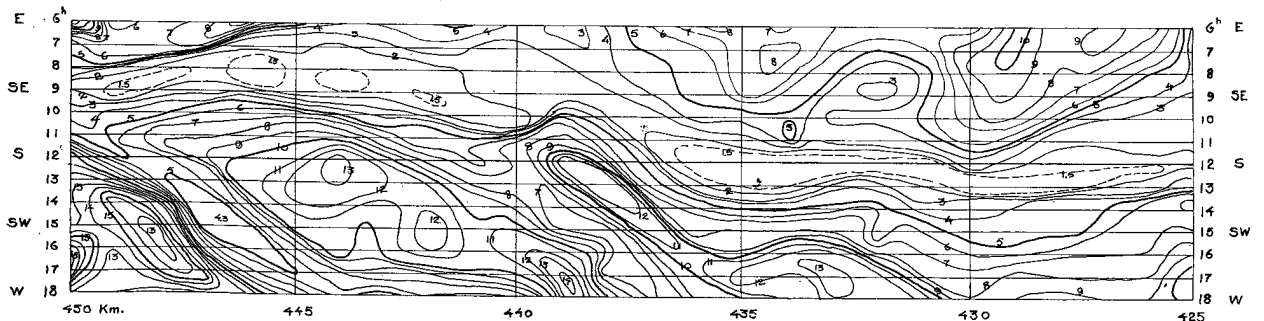


Abb. 8c.

c. Durch graphische Subtraktion der nach a) synoptisch dargestellten Horizonthöhe von der nach b) dargestellten Sonnenhöhe werden die Null-Kurven gezogen. Diese geben dann für die Zeitpunkte A—G (Tabelle 12) die *synoptische Darstellung der wirklichen Sonnenscheindauer bei klarem Himmel* für das Gebiet Koppang—Bellingmo und sind in den Abbildungen 9 a, 9 b und 9 c wiedergegeben. Zum Vergleich mit den entsprechenden Werten der *astronomischen* Sonnenscheindauer kann diese an der Grundlinie ( $h = 0$ ) in der Abb. 5 direkt abgelesen werden. Auf diese Darstellung der höchstmöglichen Einstrahlungszeit werden wir später bei der Diskussion der Eisgänge zurückkommen.

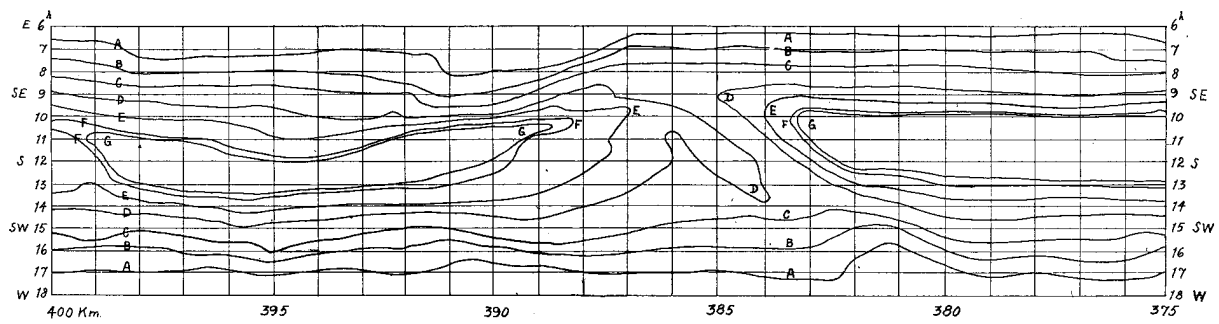


Abb. 9 a.

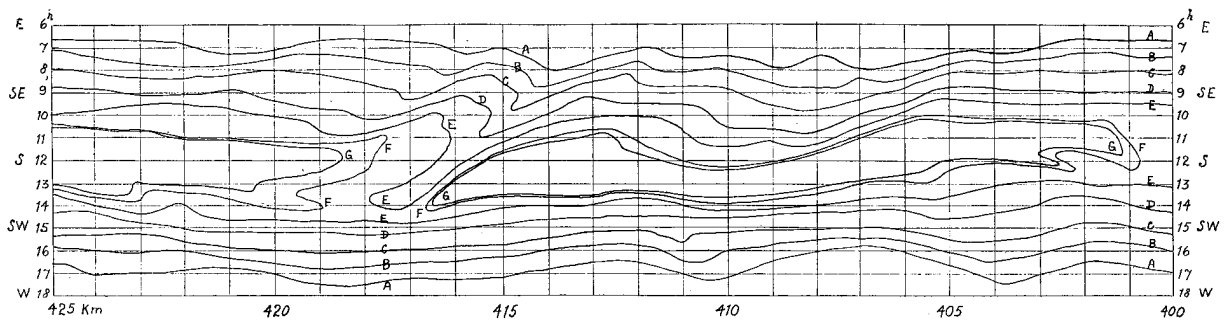


Abb. 9 b.

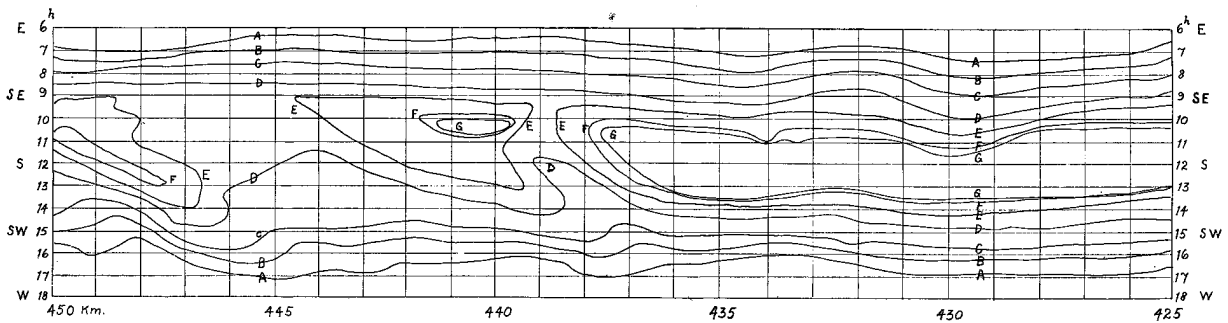


Abb. 9 c.

Abb. 9 a, 9 b, 9 c.

Maximaler Sonnenschein an der Glomma.

A	23. Sept.	21. März
B	3. Okt.	7. März
C	24. Okt.	19. Febr.
D	8. Nov.	5. Febr.
E	23. Nov.	22. Jan.
F	8. Dez.	6. Jan.
G	23. Dez.	

### 11. Der Wärmestrom der Ausstrahlung.

Die Strahlung  $S_T$  eines vollkommen schwarzen Körpers bei der absoluten Temperatur  $T$  ist (nach Stefan—Boltzmann):

$$S_T = 4,91 \cdot 10^{-9} T^4 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,1)$$

deren spektrale Verteilung für  $T = 273$  in der Abb. 2 gegeben ist.

Die Ausstrahlung einer Wasserfläche von Temperatur  $T$  ist ein gewisser Bruchteil  $a$  der schwarzen Strahlung. Das Emissionsvermögen  $a$  ist nach Kirchhoff dem Absorptionsvermögen für Strahlung derselben Zusammensetzung gleich, und es wurde von Schmidt<sup>1)</sup> unter der Voraussetzung berechnet, dass die Strahlung des Wassers eine reine Temperaturstrahlung sei. Später sind Messungen von Ångström<sup>2)</sup> und G. Falchenberg<sup>3)</sup> ausgeführt, nach welchen  $a = 0,95$  ist. Die Ausstrahlung des Wassers ist also:

$$a \cdot S_T = 4,66 \cdot 10^{-9} \cdot T^4 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,2)$$

Von der langwelligen Gegenstrahlung der Atmosphäre (vgl. Abschnitt 4) würden demnach auch 95 % vom Wasser absorbiert werden. Die Differenz der Ausstrahlung und der absorbierten Gegenstrahlung bildet die *effektive Ausstrahlung*, deren Berechnung wir im folgenden behandeln.

Auf der Grundlage zahlreicher Messungen hat Ångström<sup>4)</sup> gefunden, dass bei klarem Himmel die effektive Ausstrahlung von einer schwarzen Fläche ( $a = 1$ ), die die absolute Temperatur  $T$  der Erdoberfläche hat, in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$s = 4,91 \cdot 10^{-9} \cdot T^4 (0,255 + 0,322 \cdot 10^{-0,069f}) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,3)$$

wo  $f$  der Dampfdruck am Orte ist. Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Formel ist vor allem, dass der Wasserdampf in der Atmosphäre in «normaler» Weise verteilt ist. (Vgl. z. B. die empirische Formel von Hann.<sup>5)</sup> In dem Abschnitte 32 werden wir Fälle behandeln, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt wird. In diesem Abschnitte werden wir sie aber annehmen.

Die Gegenstrahlung der Atmosphäre,  $S_g$ , ist dann:

$$S_g = S_T - s \quad (11,4)$$

Dabei ist  $S_T$  die schwarze Strahlung von der Temperatur der Erdoberfläche. In der Tat wird die Erdoberfläche eine fast schwarze Strahlung haben, besonders ist dies der Fall für eine Schneedecke, die nach Falchenberg<sup>6)</sup> mehr als 99,5 % der Strahlung eines schwarzen Körpers emittiert. Für Wärmestrahlung ist mithin der Schnee als ein fast vollkommen schwarzer Körper zu betrachten. Wir können daher während der Winterzeit ohne Bedenken das Emissionsvermögen der Erdoberfläche als 1 annehmen. Die Temperatur der Erdoberfläche werden wir gleich der Lufttemperatur  $T_l$  setzen müssen, nicht gleich der Temperatur des Wasserlaufes, denn der Zustand der Atmosphäre wird ja von der Erdoberfläche im weiten Kreis bestimmt und nicht von der relativ verschwindenden Fläche des Wasserlaufes. Es ist also die Gegenstrahlung der Atmosphäre

<sup>1)</sup> W. Schmidt: Met. Z. 1916, S. 111 u. 257.

<sup>2)</sup> A. Ångström: Met. Z. 1918, S. 90.

<sup>3)</sup> G. Falchenberg: Met. Z. 1928, S. 334.

<sup>4)</sup> A. Ångström: I Astrophys. Journ. 37, 305, 1913 u. II 39, 95, 1914.  
Smithson. Misc. Coll. 65 Nr. 3, 1915.

Met. Z. 1916, S. 529 u. 1917, S. 14.

Medd. från Statens Met.-Hydr. Anst. Bd. 3 Nr. 12, 1927.

<sup>5)</sup> Vgl. Hann-Süring, Lehrb. d. Met.

<sup>6)</sup> G. Falchenberg: Met. Z. 1928, S. 234.



$$S_g = 4,91 \cdot 10^{-9} \cdot T_l^4 - s \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,5)$$

Von dieser Gegenstrahlung werden, wie oben erwähnt, 95 % von der Wasseroberfläche absorbiert, 95 % von der Wasseroberfläche absorbiert. Die effektive Ausstrahlung  $s_0$  der Oberfläche eines Wasserlaufes bei der Wassertemperatur  $T_w$  und der Lufttemperatur  $T_l$  wird dann bei klarem Himmel:

$$s_0 = a(S_T - S_g), \text{ wo das Emissionsvermögen } a = 0,95 \quad (11,6)$$

Unter Benutzung der Beziehungen (11,1) und (11,4) wird dann der folgende Ausdruck erhalten:

$$s_0 = 4,66 \cdot 10^{-9} T_l^4 (0,255 + 0,322 \cdot 10^{-0,069 f}) + 4,66 \cdot 10^{-9} (T_w^4 - T_l^4) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.} \quad (11,7)$$

Wir tabellieren diese Grösse in zwei Tabellen, erstens

$$R = 4,66 \cdot 10^{-9} T_l^4 (0,255 + 0,322 \cdot 10^{-0,069 f}) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,8)$$

die in der Abb. 10 gegeben ist, und zweitens das Korrektionsglied

$$d = 4,66 \cdot 10^{-9} (T_w^4 - T_l^4) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,9)$$

das in der Abb. 11 gegeben ist.

Es ist also

$$s_0 = R + d \quad (11,10)$$

die effektive Strahlung des Wassers bei klarem Himmel.

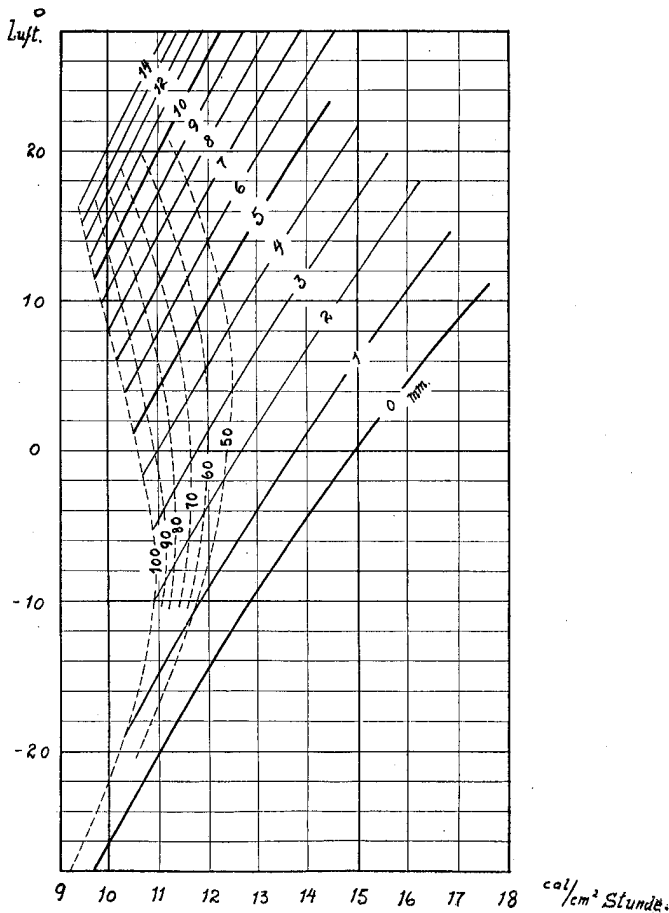


Abb. 10.

Effektive Ausstrahlung  $R$  des Wassers bzw. des Eises bei der Temperatur der Luft und bei klarem Himmel, nach (11,8). (Die gestrichelten Kurven geben die relative Feuchtigkeit an.)

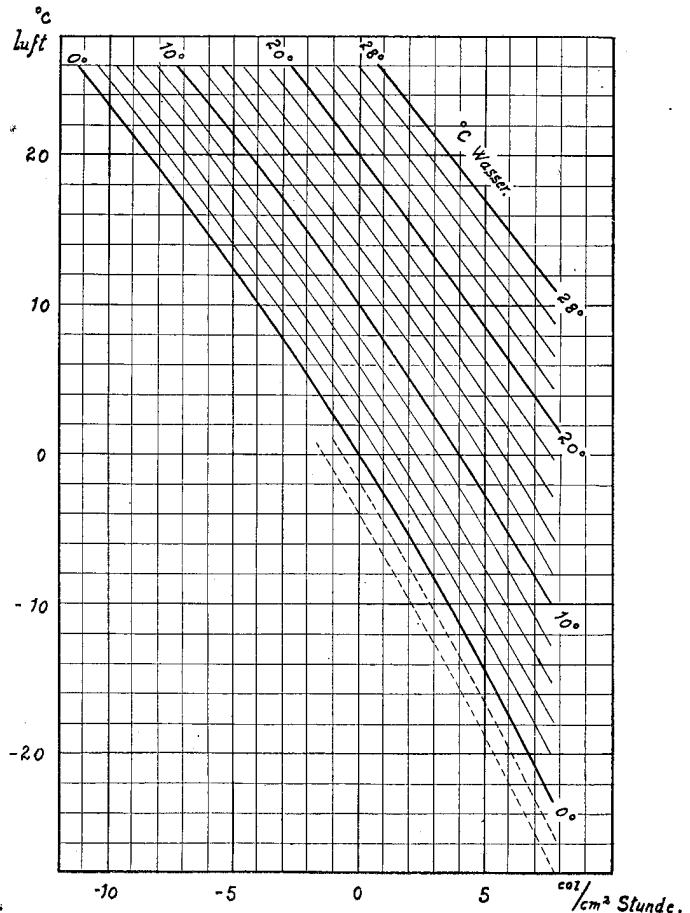


Abb. 11.

Korrektion  $d$  der effektiven Ausstrahlung, nach (11,9).

Zum Vergleich mit der effektiven Ausstrahlung einer schwarzen Fläche von der Temperatur der Erdoberfläche sei auf die Abb. 9 in der Monographie R. Geigers, «Das Klima der bodennahen Luftschicht»<sup>1)</sup>, hingewiesen. Das Problem der atmosphärischen Strahlung behandeln wir hier nur mit Rücksicht auf unsere praktische Aufgabe, daher können wir auch auf eine ausführliche Angabe der betreffenden umfangreichen Literatur verzichten. Wir verweisen für diese z. B. auf das Verzeichnis, das R. Geiger in dem eben erwähnten Buch gegeben hat.

Der Ausdruck (11,10),  $s_0 = R + d$ , ist zunächst nur für klaren Himmel gültig. Die effektive Ausstrahlung wird herabgesetzt, sobald der Himmel bedeckt ist; einerseits ist dabei die Bewölkung ( $N = 0$  bis 10) ausschlaggebend, andererseits aber auch die Art und Höhe der Wolken, wie die Messungen von Ångström<sup>2)</sup> und Asklöf<sup>3)</sup> zeigen. Es wurde von Ångström (l. c.) gefunden, und von Defant<sup>4)</sup> theoretisch begründet, dass die effektive Ausstrahlung, welche durch (11,3) gegeben ist, bei der Bewölkung  $N$  auf den Bruchteil  $(1 - kN)s$  herabgesetzt wird. Messungen von Asklöf (l. c.) ergaben, dass der Koeffizient  $k$  für leichte Wolken (*Ci, Cistr*) etwa 0,02 ist und für dichte Wolken (*Str, Nb*) den Wert 0,09 erreicht<sup>5)</sup>. Bei den telegraphierenden Stationen des Norwegischen Wetterdienstes wird sowohl die gesamte Bewölkung  $N$  als auch die Menge  $L$  der niederen Wolken in der Skala 0—10 geschätzt, die Menge der sichtbaren hohen Wolken ist demnach  $N - L$ . Nehmen wir den Durchschnittswert  $k = 0,09$  für niedere und  $k = 0,03$  für hohe Wolken an, können wir den Reduktionsfaktor in der Form

$$c = 1 - 0,09 \cdot L - 0,03 (N - L)$$

setzen, d. h.

$$c = 1 - 0,03 \cdot N - 0,06 \cdot L \quad (11,11)$$

Diese Formel ist in der Tabelle 13 tabelliert.

Tabelle 13.

Reduktionsfaktor  $c$  der effektiven Ausstrahlung, nach (11,11), bei Bewölkung  $N$ , (0—10), wovon  $L$  die Menge der niederen Wolken angibt.

		$L$										
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$N$	10	0,10	0,16	0,22	0,28	0,34	0,40	0,46	0,52	0,58	0,64	0,70
	9		0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,49	0,55	0,61	0,77	0,73
	8			0,28	0,34	0,40	0,46	0,52	0,58	0,64	0,70	0,76
	7				0,37	0,43	0,49	0,55	0,61	0,67	0,73	0,79
	6					0,46	0,52	0,58	0,64	0,70	0,76	0,82
	5						0,55	0,61	0,67	0,73	0,79	0,85
	4							0,64	0,70	0,76	0,82	0,88
	3								0,73	0,79	0,85	0,91
	2									0,82	0,88	0,94
	1										0,91	0,97
	0											1,00

<sup>1)</sup> Die Wissenschaft, Bd. 78, Braunschweig 1927, S. 41.

<sup>2)</sup> A. Ångström, Ark. f. Mat. Astr. och Fysik, 13, 1919, Nr. 21.

<sup>3)</sup> A. Asklöf: Geogr. Ann. 1920, Hft. 3.

<sup>4)</sup> A. Defant: Geogr. Ann. 1922, Hft. 1.

<sup>5)</sup> Bei Asklöf ist der Zahlenwert von  $k$  zehnmal grösser, da  $N$  in der Skala 0,1—1,0 angegeben wird.

Wenn wir dies auf die effektive Ausstrahlung eines Wasserlaufes nach (11,7) und (11,10) anwenden wollen, so ist zu bemerken, dass die Korrektur  $d$  (11,9) von der Bewölkung unabhängig ist. Um dies einzusehen, brauchen wir nur den extremen Fall zu berücksichtigen, dass die effektive Ausstrahlung der ausgedehnten Erdoberfläche (von der Temperatur  $T_i$ ) Null ist. Dann ist die effektive Ausstrahlung des Wasserlaufes (von der Temperatur  $T_w$ ) offenbar  $4,66 \cdot 10^{-9} (T_w^4 - T_i^4)$ , was eben die Korrektur  $d$  darstellt. Als Resultat wird also erhalten, dass die *effektive Ausstrahlung des Wasserlaufes bei bewölktem Himmel*

$$s_N = cR + d \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,12)$$

ist, wo  $c$ , bzw.  $R$  und  $d$ , durch die Tabelle 13 bzw. die Kurven der Abb. 10 und 11 gegeben sind.

Falls die Beobachtung nur die gesamte Bewölkung  $N$  gibt, können wir summarisch  $c = 1 - 0,09 \cdot N$  setzen und bekommen dann

$$s_N = (1 - 0,09 \cdot N) \cdot R + d \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,13)$$

( $N$  in der Skala 0—10 gegeben).

#### *Angenäherte Berechnung.*

Für Übersichtsrechnungen können die Ausdrücke (11,8) und (11,9) vereinfacht werden. Die Kurven der Abb. 10 zeigen, dass bei Lufttemperaturen zwischen  $0^\circ \text{ C}$  und  $-20^\circ \text{ C}$  und Dampfdruck in der Nähe der Sättigung  $R = 10,8 \pm 0,6 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  ist. Man kann also in der Winterzeit ohne grosse Fehler

$$R = 10,8 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,14)$$

und nach (11,13)

$$cR = 10,8 (1 - 0,09 \cdot N) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$$

setzen. Ferner kann die Korrektur (11,9) wegen  $T = 273 + t$  folgendermassen geschrieben werden:

$$d = 4,66 \cdot 10^{-9} \cdot 273^4 \left[ \left( 1 + \frac{t_w}{273} \right)^4 - \left( 1 + \frac{t_i}{273} \right)^4 \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}$$

Bei Berücksichtigung der Glieder nur erster Ordnung wird dann

$$d = 4,66 \cdot 10^{-9} \cdot 273^3 \cdot 4 (t_w - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde,}$$

d. h.

$$d = 0,38 (t_w - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,15)$$

Die effektive Ausstrahlung wird dann im allgemeinen, wenn wir nach (11,13) auch die Bewölkung  $N$  berücksichtigen:

$$s_N = cR + d = 10,8 (1 - 0,09 \cdot N) + 0,38 (t_w - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (11,16)$$

#### *Die effektive Ausstrahlung von Eis und Schnee.*

Nach dem Abschnitt 7 ist die Absorption der Wärmestrahlung im Eis gleich derjenigen im Wasser anzusehen, d. h. 0,95. Für frischen Schnee ist die Absorption, wie oben erwähnt, als 1 zu betrachten; wenn wir im praktischen Falle anstatt 1 den Wert 0,95 annehmen, können wir demnach die oben gegebene Berechnung für Wasser ohnehin auch für Eis oder Schnee anwenden, wobei  $T_w$  bzw.  $t_w$  die Temperatur der Oberfläche bedeuten. Auf die Abweichung dieser Temperatur von der Lufttemperatur werden wir bei der Berechnung des Wärmedurchganges einer Eis- oder Schneedecke im Kap. VII zurückkommen.

*Bemerkung.* Die oben angegebene Berechnung der Ausstrahlung ist nicht mehr gültig, wenn die Temperaturdifferenz Wasser—Luft so gross ist, dass Kondensation in der Übergangsschicht stattfindet. Bei der Bildung einer Nebelschicht wird eine starke Her-

absetzung der Ausstrahlung bewirkt (vgl. Rauchschutz gegen Frost), und es ist auch die Erfahrung gemacht worden, dass die Eisproduktion eines offenen Wasserlaufes bei starker Kälte als Folge der Nebelbildung kleiner sein kann als bei mässiger Kälte<sup>1)</sup>.

Die Berechnung der Ausstrahlung muss auch modifiziert werden, wenn eine Temperaturinversion die Gegenstrahlung erhöht. Darauf werden wir im Abschnitt 32 zurückkommen.

#### Kap. IV. DER WÄRMESTROM DURCH VERDUNSTUNG UND AUSTAUSCH

##### 12. Berechnung des Wärmestromes durch Verdunstung und Austausch.

Diejenigen Prozesse, die sich in der an eine Wasserfläche grenzenden Luftschicht abspielen, sind unter gewöhnlichen Verhältnissen der unmittelbaren Beobachtung entzogen, und ihr Charakter muss indirekt durch Messungen und theoretische Erwägungen gefunden werden. Unter günstigen Umständen aber kann man die Bewegungen der Luftschicht direkt beobachten, wie es der Fall ist, wenn die Temperaturdifferenz Wasser—Luft so gross ist, dass Nebelbildung eintritt. Bei günstiger Beleuchtung können dann die typischen Merkmale der Luftbewegung beobachtet werden. Da es auch gleichzeitig die Probleme klar vor Augen führt, wollen wir zuerst eine solche Beobachtung beschreiben. Als Beispiel wählen wir eine Beobachtung vom 10. März 1928, 9 Uhr morgens in Nidaros (Trondhjem) an einem offenen Kanal, dessen Breite etwa 100 m beträgt. Das Wasser im Kanal war offen, nur hier und da kamen treibende Eisschollen vor. Senkrecht zum Kanal wehte ein trockener Landwind (Richtung S, Stärke 1—3 Beaufort) bei einer Temperatur von etwa  $-12^{\circ}$  C. Es tritt dadurch eine lebhafte Nebelbildung in der Grenzschicht ein, und dank einer günstigen Beleuchtung durch die Sonnenstrahlen, die unter einem kleinen Winkel auf die Wasserfläche fielen, wurden die Wassertröpfchen der Nebelschicht auf dem dunklen Hintergrund des Wassers deutlich sichtbar, und die Einzelheiten der Bewegung konnten schön beobachtet werden. An der Wasserfläche selbst war eine ganz dünne «Nebelhaut» von einigen Millimetern Dicke sichtbar. Diese dünne Nebelschicht wurde auf der Wasserfläche wie treibender feinkörniger Schnee von den Windstössen getrieben; dabei traten sehr deutliche Konvergenzlinien auf. Durch die Windstösse auf die Nebelschicht trat die Unruhe des Windes zu Tage. Man konnte auch in grösserer Höhe über dem Wasser an zerrissenen Nebelschwaden die Luftbewegung verfolgen und dabei die durchschnittliche Zunahme der Windgeschwindigkeit mit wachsendem Abstand von der Wasserfläche beobachten. Wenn man der dünnen Nebelschicht genauer zusah, war deutlich wahrzunehmen, dass der Nebel durch die turbulente Luftbewegung zerrissen, weggeführt und dadurch schnell aufgelöst wurde. Dieser Prozess war der vorherrschende und fand an dem weitaus grössten Teil der Wasserfläche ununterbrochen statt. Mehr ins Auge fallend und für diesen Fall sehr typisch waren aber die «Mikrozyklone» die in erheblicher Zahl gebildet wurden, besonders an den erwähnten Konvergenzlinien. Ein solcher Wirbel saugte am Fuss den Frostnebel in dünner Schicht (einige Millimeter Dicke) hinein, und der aufsteigende Strom bewegte sich als ein rotierender Zylinder oder Schlauch vorwärts, mit wachsender Höhe mehr und mehr nach vorne in der Richtung des Windes geneigt. Diese Wirbel waren an Grösse sehr verschieden, von solchen, die durch eine Kräuselung der Nebelschicht angedeutet wurden bis zu rotierenden Schläuchen von 7—8 cm Querschnitt und 2—3 m Höhe. Die Lebensdauer dieser Mikrozyklonen war daher auch sehr wechselnd; die grösseren Wirbel konnten während 10—20 Sekunden beobachtet werden, bis sie am Kanalufer verschwanden. An einem gut ausgebildeten Wirbel konnte man daher viele Einzelheiten der Bewegung beobachten. Das Schicksal dieser Wirbel war in allen Fällen dasselbe: durch den turbulenten Wind wurde der rotierende

<sup>1)</sup> Vgl. Ruths, Elektroteknisk Tidsskrift, Oslo 1925, S. 177.

Teil hin und her geworfen, die Rotation verlangsamt, und besonders an dem oberen Ende eines solchen Wirbels konnte man oft direkt die Auflösung der Rotation in turbulenter Bewegung beobachten. Die dadurch bewirkte Mischung führte dann schnell zur Auflösung des Nebels, und die weitere Bewegung wurde unsichtbar<sup>1)</sup>.

Wie oben bemerkt, musste diese interessante Bildung der Mikrozyklonen in bezug auf den Austausch zwischen Wasser und Luft als eine Nebenerscheinung betrachtet werden, denn im Durchschnitt wurde nur ein kleiner Teil der Fläche von diesen Mikrozyklonen bedeckt. Durch sie wurden aber Nebeltröpfchen auch in die Höhe geführt, und dadurch konnte die Luftbewegung durch diese Indikatoren auch dort beobachtet werden, wobei der unruhige und turbulente Charakter der Luftströmung zu Tage trat.

Bei dem hier gebildeten Vorgang tritt zwar eine Kondensation in der Grenzschicht ein, in den wesentlichen Zügen aber ist unser Beispiel nach unserer gegenwärtigen Kenntnis der bodennahen Luftschicht als charakteristisch zu betrachten. Und dies ist nicht nur für den Fall gültig, dass die Luft kälter ist als die Oberfläche, sondern auch für den umgekehrten Fall.

Der Wärmeübergang Wasser—Luft ist demnach auf zwei wesentlich verschiedene Prozesse verteilt:

Erstens ist eine *Grenzschicht* vorhanden, die schon bei kleinen Windgeschwindigkeiten sehr dünn ist. (Ob eine wohl definierte Schicht auch bei sehr schwachem Wind existiert, ist allerdings fraglich.) In dieser Schicht haben wir eine in der Hauptsache geordnete Strömung, parallel zur Wasserfläche, anzunehmen. Nach den bekannten Untersuchungen *P r a n d t l s* über die Eigenschaften der Grenzschichten dürfen wir annehmen, dass diese Grenzschicht einen ungefähr linearen Geschwindigkeitsanstieg hat. Der Wärmetransport in dieser Schicht erfolgt wesentlich durch Leitung nach den Gesetzen der Wärmeleitung in Platten, und der Temperaturanstieg ist ungefähr linear anzunehmen. In ähnlicher Weise wird der Transport des in dieser Schicht verdampften Wassers durch Diffusion besorgt, und die Abnahme des Dampfdruckes in der Schicht ist als ungefähr linear anzunehmen.

Zweitens ist über dieser Grenzschicht ein *turbulentes* Gebiet vorhanden. Hier wird sowohl die Wärmeübertragung als auch der Transport des verdampften Wassers von der Turbulenz stark erhöht, wie es bekanntlich *W. S c h m i d t* zuerst nachgewiesen hat. Es werden bei der turbulenten Bewegung Geschwindigkeitskomponenten vorkommen, die vertikal sind, die also die Richtung des grössten Temperaturgefälles bzw. des grössten Dampfdruckgefälles haben, und dadurch wird der Transport von Wärme und Wasserdampf durch Mischung erhöht. Mit wachsendem Abstand von der begrenzenden Fläche müssen innerhalb dieses Gebietes die vertikalen Komponenten zunehmen. Die Folge für den Wärmestrom ist, dass bei einem stationären solchen der Temperaturgradient mit wachsender Höhe abnehmen wird, und die Temperatur wird sich derjenigen der freien Luft asymptotisch nähern. In ganz entsprechender Weise wird der Wasserdampftransport beeinflusst; der Dampfdruckgradient wird unter stationären Verhältnissen mit wachsender Höhe abnehmen, und der Dampfdruck wird sich demjenigen der freien Luft asymptotisch nähern.

Eine Temperaturverteilung wie die eben beschriebene ist bekanntlich typisch für die bodennahe Luftschicht. Wir erinnern z. B. an die Untersuchungen *G. H e l l m a n n s*<sup>2)</sup>. Nur wird die Grenzschicht der geordneten Strömung selten in den Messungen bemerk-

<sup>1)</sup> Durch den Einfluss des Windes wird der Prozess in der Regel noch mehr verwaschen. Daher wird man gewöhnlich bei solcher Nebelbildung nur eine unregelmässige Bewegung zusammengeballter Nebelschwaden beobachten; diese dürfen wir aber nach dem Obigen wenigstens zum Teil als deformierte und entartete Mikrozyklonen betrachten.

<sup>2)</sup> Vgl. hierüber z. B. die Übersicht bei *R. G e i g e r*: Das Klima der bodennahen Luftschicht, Die Wissenschaft, Bd. 78, 1927.

<sup>3)</sup> *G. Hellmann*, Sitzsber. d. pr. Akad. 38, 806, 1918.

bar sein wegen der technischen Schwierigkeit, einwandfreie Messungen in der dünnen Grenzschicht vorzunehmen.

In einer Reihe von Arbeiten hat W. Schmidt<sup>1)</sup> die Bedeutung des turbulenten Mischungsvorgangs für den Austausch verschiedener Eigenschaften der Luft untersucht. Er zeigte, dass man in der bodennahen Luftschicht in den meisten Fällen die Wärmeleitung verglichen mit dem Wärmetransport durch Austausch vernachlässigen kann; für die Ausbreitung des Wasserdampfs kann man ebenso die Diffusion vernachlässigen.

Im Austauschgebiet selbst wird ein Ausgleich der Temperaturdifferenzen und der Dampfdruckdifferenzen durch die turbulente Bewegung der Luft angestrebt; wenn ein stetiger Wärmestrom oder Wasserdampfstrom besteht, bewirkt der Austausch ein Gefälle der Temperatur bzw. des Dampfdruckes, dessen Verlauf wir oben angegeben haben. Es ist aber wichtig hervorzuheben: Der Austausch wirkt sowohl auf Temperaturdifferenzen als auch auf Dampfdruckdifferenzen in *derselben* Weise ausgleichend. Faktoren, die den Austausch ändern, müssen daher im grossen und ganzen in derselben Weise auf den Wärmetransport wirken wie auf den Wasserdampftransport. Von diesen Faktoren ist vor allem die Windgeschwindigkeit zu nennen. Wenn wir den nach aussen gehenden Wasserdampfstrom durch den äquivalenten (latenten) Wärmestrom der Verdampfung repräsentieren, können wir demnach folgern: *Der Wärmestrom durch Austausch und der Wärmestrom durch Verdampfung werden in derselben Weise von der Windgeschwindigkeit beeinflusst* (solange nicht Kondensation eintritt). Wie wir unten sehen werden, wird dies auch in anderer Weise bestätigt.

Wenn wir die Wärmeübertragung durch Austausch proportional zum Temperaturgradienten setzen, so wird der Ausdruck formal mit dem der gewöhnlichen Wärmeleitung übereinstimmen. Der Proportionalitätsfaktor ist aber keine Materialkonstante wie das Wärmeleitvermögen, sondern eine zusammengesetzte Funktion. Schreiben wir (nach Schmidt)<sup>1)</sup>

$$s_2 = -A''\sigma \frac{dT}{dz} \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad \sigma = 0,238 \text{ cal/g} \quad (12,1),$$

so wird dadurch bei gegebenem Wärmestrom  $s_2$  und gegebener vertikaler Temperaturverteilung  $\frac{dT}{dz}$  der Verlauf des «Austauschkoeffizienten»  $A''$  in dem betrachteten Höhenintervall bestimmt. Aus dem früher angegebenen allgemeinen Verlauf des Temperaturgradienten  $\left(\frac{dT}{dz}\right)$  ist zu schliessen, dass der Austauschkoeffizient in der turbulenten Schicht mit abnehmender Höhe abnehmen muss, um in der Grenzschicht den Wert des Wärmeleitvermögens zu erreichen. Im übrigen aber ist der Verlauf des Austauschkoeffizienten grossen Änderungen unterworfen, und dies bewirkt entsprechende Änderung des Temperaturgradienten. Vor allem ist in dem Austauschkoeffizienten der Einfluss der Windgeschwindigkeit und deren Zunahme mit der Höhe verborgen<sup>2)</sup>. Die Grössenordnung von  $A''$  in der bodennahen Luftschicht betreffend wollen wir hier — mit Rücksicht auf späteren Vergleich — einige Messungen von Ångström<sup>4)</sup> zitieren, der gleichzeitig den Temperaturgradienten und den von einer Schneefläche ausgehenden Wärmestrom gemessen hat. Bei  $\Delta z = 60$  cm und bei schwachem Wind ( $v < 2$  m/sec) wurden Werte von  $A''$  zwischen 0,13 und 0,56 gefunden.

<sup>1)</sup> Zusammenfassende Darstellung in «Probleme der kosmischen Physik» Bd. VII, Hamburg 1925.

<sup>2)</sup> W. Schmidt: Wiener Ber. 126, 757, 1917.

<sup>3)</sup> Man vergleiche hierzu die Untersuchung Th. Hesselbergs, Ann. d. Hydr. u. Mar. Met. Okt. 1929.

<sup>4)</sup> A. Ångström: Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. 13, 1919, nr. 21.

In ganz ähnlicher Weise konnten wir für den Wärmestrom durch Verdunstung<sup>1)</sup>

$$s_1 = -A'L \frac{df}{dz} \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad (L = \text{latente Verdampfungswärme}) \quad (12,2)$$

setzen und dadurch bei gegebener Wärmeabgabe  $s_2$  und gegebener vertikaler Dampfdruckverteilung  $\frac{df}{dz}$  den Verlauf des Austauschkoefizienten  $A'$  der Verdampfung bestimmen.

Aus dieser Übersicht wird hervorgehen, dass der Wärmeübergang durch Verdunstung und Austausch ein komplizierter Prozess ist. Bei unserer praktischen Aufgabe, den Wärmestrom aus den gewöhnlichen meteorologischen Beobachtungen zu berechnen, werden wir offenbar darauf hingewiesen sein, gewisse vereinfachende Annahmen zu machen.

Betrachten wir zuerst den *Wärmestrom durch Austausch*, welchen wir in der Schicht zwischen Wasserfläche und gewöhnlicher Beobachtungshöhe ( $\sim 1,5$  m) als *stationär* betrachten. In der Gleichung (12,1) ist dann  $s_2$  als konstant zu betrachten, und wir erhalten bei der Integration

$$s_2 \int_0^z \frac{1}{A''} dz = \sigma (T_w - T_z),$$

d. h.

$$s_2 = \frac{\sigma}{\int_0^z \frac{1}{A''} dz} (T_w - T_z) \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad (12,3)$$

Dabei ist  $T_w$  die Temperatur der Wasserfläche und  $T_z$  die der Luft in der Höhe  $z$ .

Bezeichnen wir den mittleren Wert von  $\frac{1}{A''}$  auf der Strecke  $z$  als  $\left(\frac{1}{A''}\right)_m$ , so wird

$$s_2 = \frac{\sigma}{z \cdot \left(\frac{1}{A''}\right)_m} (T_w - T_z) \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad (12,4)$$

Bei konstanter Beobachtungshöhe  $z_0$  kann (12,4) demnach so geschrieben werden:

$$s_2 = \alpha (T_w - T_{z_0}) \text{ cal/cm}^2\text{sec} \quad (12,5)$$

Dies ist die bekannte Form, die gewöhnlich für die Wärmeübertragung durch Konvektion angenommen wird. Der Zusammenhang der «Wärmeübergangszahl»  $\alpha$  mit der Verteilung des Austauschkoefizienten ist durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{\sigma}{z_0 \left(\frac{1}{A''}\right)_m} \text{ cal/cm}^2\text{sec grad} \quad (12,6)$$

gegeben.

In der bodennahen Luftschicht können wir in erster Annäherung annehmen, dass

<sup>1)</sup> Der Austausch betrifft eigentlich die Wasserdampfmenge; in dem Temperaturbereich, den wir behandeln, ist aber die Wasserdampfmenge dem Dampfdruck annähernd proportional:

$t$	Gesättigter Wasserdampf	
	mm	g/m <sup>3</sup>
10	9,21	9,45
0	4,58	4,88
-10	1,95	2,14
-20	0,77	0,88

der Austausch proportional zu dem Abstand von der Grenzfläche ist (vgl. oben) und ebenso zu der absoluten Temperatur<sup>1)</sup>, also

$$A'' = f(v) \cdot T \cdot z \quad (12,7)$$

Die Berechtigung den Proportionalitätsfaktor als eine Funktion  $f(v)$  der Windgeschwindigkeit zu bezeichnen, werden wir unten begründen. Wird (12,7) in die Gleichung (12,1) eingeführt, ergibt sich in derselben Weise wie oben dargestellt

$$s_2 = \frac{\sigma f(v)}{\lognat z} \frac{(T_w^2 - T_z^2)}{2} \quad (12,8)$$

oder

$$s_2 = \frac{\sigma}{\lognat z} f(v) \cdot T_m (T_w - T_z) \quad (12,9)$$

wo  $T_m = \frac{T_w + T_z}{2}$  ist. In diesem Falle ist also die Temperatur in der Höhe  $z$  durch die logarithmische Funktion

$$T_z = T_w - \frac{s_2}{\sigma \cdot f(v) \cdot T_m} \lognat z \quad (12,10)$$

gegeben, und der Temperaturgradient

$$\frac{dT_z}{dz} = - \frac{s_2}{\sigma \cdot f(v) \cdot T_m} \frac{1}{z} \quad (12,11)$$

wird umgekehrt proportional zur Höhe. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Bedingung (12,7) bis zur Höhe  $z$  gültig ist.

Für die Schicht zwischen Boden (bezw. Wasserfläche) und gewöhnlicher Beobachtungshöhe  $z_0$  ( $\sim 1,5$  m) wird dies annähernd der Fall sein. In der Gleichung (12,9) können wir demnach  $z$  als konstant  $= z_0$  betrachten und die Lufttemperatur  $T_l = T_{z_0}$  setzen. Es ergibt sich somit, wenn die konstanten Glieder in die Konstante  $C_2$  zusammengefasst werden, wobei wir gleichzeitig zu cal/cm<sup>2</sup> Stunde übergehen, der Ausdruck

$$s_2 = C_2 f(v) T (T_w - T_l) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (12,12)$$

für den Wärmestrom mittels Austausch. Dabei ist  $T = T_m$  die mittlere absolute Temperatur der Bodenschicht.

Zur Beurteilung der Form der Funktion  $f(v)$  ziehen wir einige wärmetechnische Untersuchungen über Konvektion heran. I. Langmuir<sup>2)</sup> hat für plane Flächen

$$f(v) = \sqrt{v + 0,33} \quad (12,13)$$

gefunden ( $v$  in m/sec gemessen). Auch bei der Wärmeabgabe dünner Drähte wurde fast

<sup>1)</sup> Der Austauschkoeffizient wird in der Grenzschicht mit dem Wärmeleitvermögen identisch (vgl. oben), und in erster Annäherung dürfen wir daher annehmen, dass die Temperaturabhängigkeit für beide Größen dieselbe ist. Diese ist für das Wärmeleitvermögen der Luft durch den Faktor  $\left(\frac{T}{T_0}\right)^n \sim \left(1 + \frac{n}{273} \cdot t\right)$  gegeben. Von Maxwell wurde theoretisch  $n=1$  abgeleitet, während experimentelle Bestimmungen  $n \sim 0,7$  für Luft ergaben (vgl. Winkelmanns Handb. der Phys., 2. Aufl. 1906, Bd. III, S. 529). Da der Faktor  $\left(\frac{T}{T_0}\right)^n$  nur eine Korrektur des Wärmestromes bewirkt, wird die Annahme  $n=1$  unwesentliche Fehler bewirken. Bei  $n=1$  ergibt sich derselbe Temperaturfaktor  $\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{273} t\right)$ , wie er von Traibert (Met. Zschr. 1896, S. 261) und von Gallenkamp (Met. Zschr. 1917, S. 24) für die Verdunstung gefunden wurde, und es wird dabei auch die unten gegebene Bedingungsgleichung (12,23) erfüllt.

<sup>2)</sup> I. Langmuir: Trans. Amer. Electrochem. Sec. Vol. 23, 1913.  
Trans. Amer. Inst. Electr. Engineers, Vol. 32, 1913, S. 301.



derselbe Wert ( $\sqrt{v + 0,25}$ ) gefunden. Die Untersuchungen wurden im Laboratorium ausgeführt. W. Jürgens<sup>1)</sup> hat die Wärmeabgabe einer erwärmten Kupferplatte (Grösse  $0,5 \times 0,5$  m, vertikal gestellt) untersucht und findet für die Übergangszahl den folgenden empirischen Zusammenhang:

$$\left. \begin{array}{ll} v \leq 5 \text{ m/sec} & v > 5 \text{ m/sec} \\ \text{bei polierter Fläche, } \alpha = 0,48 + 0,34 \cdot v & \alpha = 0,612 \cdot v^{0,78} \\ \text{bei gerauhter Fläche, } \alpha = 0,43 + 0,36 \cdot v & \alpha = 0,647 \cdot v^{0,78} \end{array} \right\} \quad (12,14)$$

Dabei haben wir  $\alpha$  in  $\text{cal/cm}^2 \text{ Stunde Grad}$  angegeben (durch Multiplikation mit 10 erhält man die gewöhnliche Wärmeübergangszahl der Wärmetechnik).

Natürlich dürfen wir diese Erfahrungen nicht ohne weiteres auf die Verhältnisse in der Natur anwenden, einige Anhaltspunkte über  $f(v)$  erhalten wir jedoch. Wenn wir von der ersten Kolonne (12,14) absehen, wo der Auftrieb der erwärmten Luft offenbar störend gewirkt hat (die Platte war ja vertikal gestellt), so ist nach den Versuchen von Jürgens  $f(v) = v^{0,78}$ , während nach Langmuir  $f(v) = (v + 0,3)^{0,5}$  war. Setzen wir für die Bodenschicht der freien Luft

$$f(v) = (v + 0,3)^n \quad (12,15)$$

so schliesst sich diese Form einerseits den erwähnten wärmetechnischen Messungen an, andererseits ist die Verdunstung von derselben Funktion abhängig (vgl. weiter unten), und dadurch ist ihre Bestimmung erleichtert. Die meisten Untersuchungen über den Einfluss des Windes auf die Verdunstung<sup>2)</sup> ergeben das Resultat, dass die Verdunstungsgeschwindigkeit in erster Annäherung proportional zu  $f(v) = v^{0,5}$  zunimmt. Dabei muss bemerkt werden, dass eine einfache Proportionalität nicht bis zur Grenze  $v = 0$  gültig sein kann, denn die Verdunstung verschwindet nicht bei solchen meteorologischen Verhältnissen, die mit der Windgeschwindigkeit  $v = 0$  bezeichnet werden.

Setzen wir

$$f(v) = \sqrt{v + 0,3} \quad (12,16)$$

so ist  $f(0) = \sqrt{0,3}$ , also von Null verschieden und schliesst sich (12,15) an; ausserdem nähert sich  $f(v)$  dem Wert  $\sqrt{v}$  bei zunehmender  $v$ . Wir werden daher die Beziehung (12,16) als gültig annehmen.

Als Zusammenfassung ergibt sich dann *der Wärmestrom des Austausches*:

$$s_2 = C_2 \cdot T \sqrt{v + 0,3} (t_w - t_l) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (12,17)$$

wo  $t_w - t_l$  die Temperaturdifferenz Wasser—Luft,  $v$  die Windgeschwindigkeit in m/sec und  $T$  die (mittlere) absolute Temperatur bezeichnet.  $C_2$  ist eine Konstante, die noch zu bestimmen ist.

Bei der Behandlung der *Verdunstung* ist der eigentliche Verdampfungsprozess an der Oberfläche von dem nachfolgenden Hinwegführen des Wasserdampfes zu unterscheiden. Die Verdampfung ist umgekehrt proportional zu dem Luftdruck. Das Hinwegführen des Wasserdampfes, was als ein *latenter* Wärmestrom der Verdunstung zu betrachten ist, wird vorwiegend durch Austausch in der turbulenten Schicht bewirkt, wie früher auseinandergesetzt. Mit Hilfe der Gleichung (12,2) können wir den Austauschkoeffizienten der Verdunstung definieren und dann eine ganz ähnliche Betrachtung durchführen, wie wir oben für den Wärmestrom durch Austausch gemacht haben. Wir haben schon oben die Abhängigkeit der Verdunstung von der Windgeschwindigkeit behandelt, und es ergibt sich dann zusammenfassend der folgende Ausdruck für die Wärmeabgabe durch Verdunstung, die wir als den (latenten) *Wärmestrom der Verdunstung* bezeichnen:

<sup>1)</sup> W. Jürgens: Beihefte z. Gesundheitsing. Reihe I, H. 19.

<sup>2)</sup> Vgl. die Übersicht über Verdunstungsformeln bei *Hann* u. *Süring*, Lehrb. d. Met. IV. Aufl. 1926. Vgl. ferner die Diskussion bei *H. Köhler*, Gerlands Beitr. z. Geoph. 24, 1929, S. 94.

$$s_1 = C_1 L \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (12,18).$$

$f_0$  ist der Dampfdruck des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur der Wasseroberfläche,  $f$  ist der Dampfdruck der Luft in gewöhnlicher Beobachtungshöhe,  $v$  die Windgeschwindigkeit (in m/sec),  $T$  die mittlere absolute Temperatur der Bodenschicht,  $p$  der Luftdruck,  $L$  die latente Verdampfungswärme und  $C_1$  eine Konstante, die noch zu bestimmen ist.

Bei der Beurteilung der so aufgestellten Gleichungen (12,17) und (12,18), deren Zusammenhang mit dem Austausch wir oben behandelt haben, muss man darauf aufmerksam sein, dass bei gegebenen meteorologischen Verhältnissen den Wärmeströmen durch Austausch und durch Verdunstung ein verhältnismässig enger Spielraum gesetzt ist: Durch die Oberflächentemperatur ist der von unten von der Wassermenge abgegebene Wärmestrom ein ganz bestimmter, und ebenso ist der Wärmestrom der Ausstrahlung ein gegebener. Die Differenz dieser Wärmeströme wird bei der Verdunstung und bei dem Wärmestrom des Austausches verbraucht, und die Summe dieser beiden ist dadurch tatsächlich bestimmt. Wenn dann die Hauptfaktoren der beiden Gleichungen die Tatsachen annähernd richtig wiedergeben, so ist für die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  kein grosser Spielraum vorhanden.

Zwischen diesen beiden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  besteht eine enge Beziehung. Dies wird schon durch das Verhalten des Psychrometers gezeigt. Die Psychrometergleichung in der einfachsten Form lautet

$$f_0 - f = A_1 p (t_i - t_w) \quad (12,19)$$

und ist für den Gleichgewichtszustand gültig, bei dem die Wärmeabgabe bei der Verdunstung durch die Wärmezufuhr beim Austausch gerade kompensiert wird. Stellen wir dieselbe Bedingung, also  $s_1 = -s_2$ , nach (12,17) und (12,18) auf, so ergibt sich:

$$f_0 - f = \frac{C_2 p}{C_1 L} (t_i - t_w) \quad (12,20)$$

Diese Gleichung wäre mit der Psychrometergleichung (12,19) identisch, wenn

$$\frac{C_2}{C_1 L} = A_1 \quad (12,21)$$

wäre. Für den Koeffizienten  $A_1$  sind folgende Werte gefunden<sup>1)</sup>:

	Windstille (0 m/sec)	leicht bewegte Luft (1—1,5 m/sec)	stärker bewegte Luft (2,5—3 m/sec)	
Für $t_w > 0$	$A_1 = 0,00120$	0,00080	0,00066	} (12,22)
Für $t_w < 0$	0,00106	0,00071	0,00058	
Verhältnis	1,13	1,13	1,14	$\left( \frac{680}{600} = 1,13 \right)$

Dass die Werte für  $t_w < 0$  kleiner als bei  $t_w > 0$  sind, ist eine Konsequenz der grösseren Verdampfungswärme bei Eis ( $L_e = 600 + 80 \text{ cal/g}$ ) gegenüber Wasser ( $L_w = 600 \text{ cal/g}$ ). Die annähernde Konstanz des Koeffizienten  $A_1$  zeigt, dass die Verdunstung und der Austausch für das Psychrometer in wesentlich derselben Weise von den meteorologischen Bedingungen abhängig sein werden.

Dass eine ähnliche Folgerung auch für grössere Flächen wahrscheinlich ist, haben wir oben dargelegt. Es ist aber auch von I. S. Bowen<sup>2)</sup> direkt nachgewiesen worden.

<sup>1)</sup> Vgl. bei Hann u. Süring, l. c., sowie bei Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. u. Met. X. Aufl. Bd. 3, S. 831.

<sup>2)</sup> I. S. Bowen, Phys. Rev. 27, 779, 1926.

Für das Verhältnis zwischen den Wärmeströmen des Austausches und der Verdunstung hat er die folgende Verbindung gefunden:

$$\frac{s_2}{s_1} = 0,46 \frac{p}{760} \cdot \frac{t_w - t_i}{f_0 - f} \quad (12,23)$$

deren Gültigkeit für die Verdunstung einer Wasserfläche in der Natur durch die Untersuchungen von Cummings und Richardson<sup>1)</sup> bestätigt wurde. Diese Gleichung ist von der Windgeschwindigkeit unabhängig, d. h. der *Austausch und die Verdunstung werden in derselben Weise von der Windgeschwindigkeit beeinflusst*. Von dieser Tatsache haben wir oben bei der Aufstellung der Gleichungen (12,17) und (12,18) Gebrauch gemacht.

Drücken wir durch diese Gleichungen das Verhältnis  $\frac{s_2}{s_1}$  aus, so wird

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{C_2 p}{C_1 L} \cdot \frac{t_w - t_i}{f_0 - f} \quad (12,24)$$

Durch Vergleich von (12,24) mit (12,23) ergibt sich dann die Verbindung:

$$\frac{C_2}{C_1 L} = \frac{0,46}{760} = 0,000605 \quad (12,25)$$

die für die Konstanten  $C_2$  und  $C_1$  erfüllt werden muss. Durch Vergleich mit der Psychrometerkonstante nach (12,22) sieht man, dass die Relation (12,21) in der Tat annähernd erfüllt ist; der richtige Wert des Verhältnisses ist durch (12,25) gegeben. Für die Wärmeabgabe einer *Wasserfläche* ( $L_w = 600$  cal/g) ist demnach:

$$\frac{C_2}{C_1} = 0,363 \quad (12,26)$$

Wenn die Wasserfläche beim Frieren fest wird, ändert sich dadurch der turbulente Charakter der Bodenschicht der Luft nicht, und der Wärmestrom des Austausches ist infolgedessen immer noch durch die Gl. (12,17) gegeben. Die Verdunstung betreffend verweisen wir auf das Verhalten des Psychrometers (12,22); die Psychrometerkonstante wird bei Übergang zu Temperaturen  $< 0^\circ$  C genau in dem Verhältnis  $\frac{L_e}{L_w} = \frac{680}{600} = 1,13$  verkleinert. Dies zeigt, dass die Konstante  $C_1$  *unabhängig* von dem Phasenübergang ist. Wir dürfen demnach für eine *Eisfläche* dieselben Gleichungen der Wärmeabgabe annehmen wie für eine Wasserfläche. Wegen der grösseren Verdampfungswärme des Eises wird die Relation (12,25) den Zahlenwert 0,000534 haben, das Verhältnis  $\frac{C_2}{C_1}$  dagegen ist unverändert ( $= 0,363$ ).

Bei einer *Schneefläche* ist ein Einfluss der rauhen Oberfläche auf den Austausch der unteren Luftschicht zu erwarten. Dies wird die beiden Konstanten  $C_2$  und  $C_1$  ändern, aber in ähnlicher Weise, und das Verhältnis wird auch hier unverändert sein. Die Zahlenwerte der Konstanten selbst sind durch Messungen an einer Schneedecke zu bestimmen. Wir werden am Ende dieses Abschnittes darauf zurückkommen.

Als Resultat dieser Überlegung stellen wir für die Wärmeströme durch Verdunstung und Austausch die folgenden Formeln auf:

<sup>1)</sup> N. W. Cummings and B. Richardson. Phys. Rev., 30, 526, 1927.  
B. Richardson, Proc. Amer. Soc. of Civil Eng. 12, 945, 1930.  
N. W. Cummings, Monthly Weather Rev., Vol. 58, S. 142, 1930.

Für eine Wasser- oder Eisfläche:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= C_1 L \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \\ s_2 &= 0,363 \cdot C_1 \cdot T \sqrt{v + 0,3} (t_w - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \end{aligned} \right\} (12,27)$$

Dabei ist für Wasser  $L = 600$ , für Eis  $L = 680$  zu setzen.

#### Bestimmung der Konstante $C_1$ .

Eine Bestimmung der Konstante  $C_1$  muss auf Grundlage von Messungen innerhalb eines grösseren Wasserlaufgebietes stattfinden. Es wurde für diese Untersuchung ein geeignetes Material von dem Fluss *Nidelven* benutzt, wo seit mehreren Jahren die Wassertemperaturen und Lufttemperaturen an den zwei Kraftstationen *Övre Lerfoss* und *Hyttfossen* gemessen worden sind<sup>1)</sup>.

Auf der 15 km langen Strecke *Hyttfossen—Övre Lerfoss*, mit einer durchschnittlichen Breite des Wasserlaufes von 85 m, repräsentiert derselbe ein grosses Durchströmungskalorimeter, wo die Temperatur an der Ein- und Ausmündung gemessen wird und gleichzeitig auch die Wasserführung. Für die Berechnung der Wärmeumsetzung wollen wir das Material von *November—Dezember 1927* benutzen. Die Messgenauigkeit der einzelnen Beobachtungen war  $\pm 0,1^\circ \text{C}$ , und die Beobachtungen fanden bei *Hyttfossen* 1927 um 9 Uhr, bei *Övre Lerfoss* 1927 um 10 Uhr statt. *Hyttfossen* liegt nur 3,4 km von der Ausmündung des grossen Wassermagazins *Selbusjøen*, eine Strecke, die vom Wasser in  $1\frac{1}{2}$  Stunde zurückgelegt wird während der betrachteten Zeit (Nov.—Dez.); die Wassertemperatur bei *Hyttfossen* wird dementsprechend tagsüber in der Regel sehr wenig schwanken, und während einer Stunde ist die Änderung jedenfalls kleiner als der Messfehler. Wir können daher die Beobachtungen an den zwei Stellen als *gleichzeitig* ansehen (um 10 Uhr). Es sei weiter bemerkt, dass der Fluss auf der Messtrecke keine nennenswerten Zuflüsse hat.

Die Wassermenge, deren Temperatur  $T_L$  bei *Övre Lerfoss* um  $h$  Uhr gemessen wird, hat  $n$  Stunden früher den *Hyttfoss* passiert. Da diese Transportzeit in dem betrachteten Falle nur 5—7 Stunden ausmacht (vgl. 19), kann man wegen der oben besprochenen geringen Änderungen der Wassertemperatur am *Hyttfoss* die Messungen an diesem Ort bei  $h$  Uhr auch bei  $h-n$  Uhr als gültig annehmen. Weiter wäre im *November—Dezember* unter dieser Breite ( $63^\circ,3$  n. Br.) der Wärmestrom der Einstrahlung vor 10 Uhr gegenüber der Ausstrahlung und der Konvektion zu vernachlässigen, wenn der Himmel bewölkt ist (vgl. Abschnitt 9)<sup>2)</sup>.

Bei der Wasserführung  $q$  m<sup>3</sup>/sec, einer durchschnittlichen Flussbreite  $b$  Meter und einer durchschnittlichen Geschwindigkeit  $v$  m/sec wird die Wassermenge  $q$  im Durchschnitt eine Fläche  $bv$  bedecken. Ist die Länge der Messtrecke  $L$ , so ist die Transportzeit  $= \frac{L}{v}$  Sekunden  $= \frac{L}{3600 v}$  Stunden. Während dieser Zeit wird von der Wassermenge  $q$  die Wärmemenge  $(t_H - t_L) \cdot q \cdot 10^6$  Grammkalorien abgegeben. Dieser Wärmeumsatz findet durch die Fläche  $10^4 b \cdot v$  cm<sup>2</sup> durch Ausstrahlung ( $s_N$ ), Verdunstung ( $s_1$ ), Austausch ( $s_2$ ) und durch andere Prozesse ( $s_b + s_a$ ) statt. Es ist somit:

$$(t_H - t_L) q \cdot 10^6 = \frac{L}{3600 \cdot v} \cdot bv \cdot 10^4 [s_N + s_1 + s_2 - (s_b + s_a)]$$

oder

$$(t_H - t_L) q = \frac{10^{-6} F}{0,36} [s_N + s_1 + s_2 - (s_b + s_a)] \quad (12,28)$$

<sup>1)</sup> Das Material wurde bereitwillig von Herrn Direktor *Garstad* zur Verfügung gestellt.

<sup>2)</sup> Dem Einfluss der Einstrahlung entgegen wirkt der Umstand, dass wir als Angabe der Lufttemperatur die von 8 Uhr benutzen, die etwa 1 Stunde nach dem Mittelzeitpunkt des betrachteten Transportes ist.

Dabei ist  $F$  die Fläche in  $m^2$ , die Wärmeströme sind in  $cal/cm^2$  Stunde angegeben. Das Glied  $s_b$  ist der Wärmestrom vom Flussbett, für den wir nach (14, Abb. 13) den Wert  $0,3 cal/cm^2$  Stunde setzen. Das Glied  $s_d$  ist der Wärmestrom durch Umsatz der potentiellen Energie. Nach (26,4) ist

$$s_d = \frac{10^6 \cdot 0,36}{427} \cdot \frac{q}{b} \cdot \frac{h}{L} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde,}$$

wö  $h$  die Fallhöhe der Messtrecke (in m) ist. In dem betrachteten Falle, in dem  $bL = 10^6 \cdot 0,89$  (vgl. unten),  $h = 34$  m und  $q = 27,4 m^3/sec$  ist, wird  $s_d = 0,72 cal/cm^2$  Stunde.

In der Gl. 12,28) ist somit

$$s_b + s_d = 1,02 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}$$

Es ist dann nach (11,16) und (12,27):

$$\left. \begin{aligned} (t_H - t_L) \frac{q \cdot 0,36}{10^{-6} \cdot F} &= 10,8 (1 - 0,09 \cdot N) + 0,38 (t_w - t_i) \\ &+ C_1 L \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \\ &+ 0,363 \cdot C_1 T \sqrt{v + 0,3} (t_w - t_i) \\ &- 1,02 \end{aligned} \right\} \quad (12,29)$$

oder nach  $C_1$  aufgelöst:

$$C_1 = \frac{(t_H - t_L) \frac{q \cdot 0,36}{10^{-6} F} - 10,8 (1 - 0,09 \cdot N) - 0,38 (t_w - t_i) + 1,02}{T \cdot \sqrt{v + 0,3} \left[ \frac{L}{p} (f_0 - f) + 0,363 (t_w - t_i) \right]} \quad (12,30)$$

Die Beobachtungen der meteorologischen Station in Trondhjem<sup>1)</sup> werden benutzt. Als Beobachtungsmaterial wählen wir Tage mit möglichst geringer Ausstrahlung, also mit Bewölkung  $N = 10$ . Tage mit ausgesprochenem Wetterumschlag werden ausgeschaltet. Die Wassertemperaturen von Övre Lerfoss sind durch Heranziehen der gleichzeitigen Messungen am Nedre Lerfoss korrigiert worden. Eine wichtige Grösse ist die exponierte Fläche  $F$ . Wir werden zunächst  $F$  in (12,30) behalten und dann ihre Grösse diskutieren.

Als Grundlage der Berechnung sind folgende Daten von November—Dezember 1927 ausgewählt worden (Tabelle 14):

Tabelle 14.

Nidelven ( $\varphi = 63^{\circ},3$  n. Br.).

1927 Tag	$p$	$t_i$	$f$	$B$	$N$	$t_H$	$t_H - t_L$	$t_w$	$q$
Nov. 7.	735	-2,5	3,3	2	10	4,3	1,05	3,8	35,6
8.	740	-1,6	3,9	2	10	3,7	0,60	3,4	35,6
10.	742	-3,8	3,0	2	10	3,5	1,25	2,9	35,6
16.	761	-2,0	3,9	2	10	3,0	0,85	2,6	22,8
22.	769	-5,1	2,2	3	10	2,5	2,10	1,5	22,4
28.	756	0,7	4,5	3	10	2,5	0,50	2,3	22,6
Dez. 2.	764	-4,3	2,4	2	10	2,2	1,45	1,5	22,6
10.	766	-2,8	2,7	3	10	1,7	1,11	1,1	22,2
Mittel	754	-2,8	3,24	2,38 <sup>2)</sup>	10	2,93	1,11	2,39	27,4

<sup>1)</sup> Jahrb. d. Norw. Met. Inst. 1927.

<sup>2)</sup> 2,38 Beaufort = 3,9 m/sec (Norwegische Skala).

Unter Anwendung der Mittelwerte wird dann nach (12,30):

$$C_1 = 10^{-3} \left[ \frac{5,37}{10^{-6} F} - 1 \right].$$

Das strömende Wasser wird in der Winterzeit bei der verminderten Wasserführung eine kleinere Fläche als durchschnittlich decken. Es liegen keine direkten Messungen der Breite des offenen Wasserstromes in diesem Falle vor; es wird aber mitgeteilt, dass ein Zuschuss von Wasser bei dem Regulierungwehr des Selbusjö 6—8 Stunden später bei Övre Lerfoss eintreffen wird. Unter Heranziehen der Berechnung der Transportzeit (vgl. Abschnitt 19 und Abb. 18) kann man dann schliessen, dass die effektive Breite des strömenden Wassers bei einer Wasserführung von etwa 30 m<sup>3</sup>/sec auf etwa 70% reduziert wird. Wenn wir demnach  $F = 15\,000 \cdot 85 \cdot 0,70 = 10^6 \cdot 0,89$  m<sup>2</sup> setzen, so erhalten wir schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 5,04 \cdot 10^{-3} \\ C_2 &= 1,83 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (12,31)$$

Diese Koeffizienten sind nach dem oben Dargestellten sowohl für eine Wasserfläche als auch für eine Eisfläche gültig.

Zur Kontrolle ziehen wir einige Messungen von dem Fluss Glomma auf der Strecke Aursunden—Nyplass bei Rösos heran, vom 1.—10. Dezember 1928. Die angegebene Strecke hat eine Länge von 8,5 km bei einer Breite des Flussbettes von 80 m im Durchschnitt. Die Fallhöhe beträgt 60 m. Die Mittelwerte der Beobachtungen waren die folgenden:

1.—10. Dez. 1928:

$$p = 698 \text{ mm}, t = -6^{\circ},3, f = 2,4 \text{ mm}, B = 1,1 \text{ Beaufort} = 1,65 \text{ m/sec},$$

$$N = 7,8, T_A = 1,52, t_N = 0,16, t_w = 0,80, q = 16 \text{ m}^3/\text{sec}, \text{ und daraus ergibt sich}$$

nach (12,30):

$$C_1 = 10^{-3} \left[ \frac{4,35}{10^{-6} F} - 2,58 \right].$$

Dieser Wert ist mit dem oben gefundenen identisch, wenn  $F = 0,57$  ist. Das würde ein exponiertes Areal von 84% bedeuten, was auf der betreffenden Strecke richtig sein dürfte.

Ein Vergleich mit den wärmetechnischen Messungen im Laboratorium ist ebenfalls von Interesse. Nach der Formel (12,14) ist nach Jürgens bei  $v = 3,9$  m/sec (Tabelle 14) die Wärmeübergangszahl  $\alpha = 0,43 + 0,36 \cdot v = 1,83$  cal/cm<sup>2</sup> StundeGrad. Damit zu vergleichen ist nach (12,27) der Faktor  $0,363 \cdot C_1 \cdot T \sqrt{v + 0,3} = 1,03$  cal/cm<sup>2</sup> StundeGrad. Die Grössenordnung stimmt demnach damit überein.

Für eine Schneefläche können die Konstanten  $C_1'$  und  $C_2'$  (vgl. oben) in einfacher Weise bestimmt werden. In den Nachtstunden wird bei stationären Verhältnissen und tiefer Temperatur sowohl die Wärmeleitung nach unten als auch die Verdunstung zu vernachlässigen sein. Die Ausstrahlung wird somit durch den Wärmestrom des Austausches kompensiert; nach (11,16) und (12,27) ergibt sich dann:

$$10,8 (1 - 0,09 \cdot N) + 0,38 (t_s - t_i) = -0,363 C_1' T \sqrt{v + 0,3} (t_s - t_i) \quad (12,32)$$

d. h.

$$C_1' = - \frac{10,8 (1 - 0,09 \cdot N) + 0,38 (t_s - t_i)}{0,363 T \sqrt{v + 0,3} (t_s - t_i)}$$

(vgl. auch Abschnitt 28). Zur Bestimmung von  $C_1'$  nach dieser Gleichung ziehen wir einige Temperaturmessungen der Schneedecke heran, die an der norwegischen Station Jan Mayen von F. Paulsen während des Jahres 1928 ausgeführt wurden. Aus dem Beobachtungsmaterial entnehmen wir:

Tabelle 15. (Jan Mayen).

	$t_l$	$t_{30}$	$t_s$	$t_5$	$\frac{f}{f_0}$	Wind	$N$	$t_s - t_l$
29. III. 1928								
21h30	-7,7	-7,6	-10,7	-7,0	0,80	ENE 3,0 m/sec	2	-3,0
22h00	-7,4	-8,0	-11,0	-7,4	0,80	ENE 3,0	2	-3,6
22h30	-7,3	-7,8	-11,0	-7,6	0,80	ENE 3,0	2	-3,7
16. IV. 1928								
22h00	-5,4	-6,1	-8,6	-5,2	0,71	W 0,5	0	-3,2
22h30	-5,6	-6,4	-8,4	-5,5	0,74	WNW 3,0	0	-2,8
23h00	-5,5	-5,8	-8,5	-5,6	0,75	WNW 3,0	0	-3,0

$t_l$  = Lufttemperatur,

$t_{30}$  = Temperatur 30 cm über dem Boden,

$t_s$  = Temperatur der Schneeoberfläche,

$t_5$  = Temperatur in 5 cm Tiefe.

$$\begin{array}{l} \text{Im Mittel ergibt sich} \\ 29. \text{III. 1928} \\ 16. \text{IV. 1928} \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1' \\ 12,3 \cdot 10^{-3} \\ 26,5 \cdot 10^{-3} \end{array} \quad \begin{array}{l} C_2' = 0,363 \cdot C_1' \\ 4,5 \cdot 10^{-3} \\ 7,6 \cdot 10^{-3} \end{array} \quad (12,33)$$

Diese Zahlenwerte sind 2—4 Mal grösser als die, welche für eine Wasserfläche gefunden wurden. Wir haben früher (S. 32) die Messungen Ångströms zitiert; unter Anwendung der dort angegebenen Daten wird mittels Gl. (12,4) der Wärmestrom berechnet und nachher durch Vergleich mit (12,27)  $C_1'$  berechnet. Wir finden so Werte von  $C_1'$  zwischen  $10 \cdot 10^{-3}$  und  $50 \cdot 10^{-3}$ , also von derselben Grösse wie oben gefunden.

Wir brauchen bei unserer Behandlung der Eisbildung nur die Grössenordnung der Wärmeabgabe einer Schneedecke durch Austausch und Verdunstung zu kennen, und wir werden daher annehmen, dass die Werte

$$\begin{array}{l} C_1' \sim 20 \cdot 10^{-3} \\ C_2' \sim 7 \cdot 10^{-3} \end{array} \quad (12,34)$$

für eine Schneefläche gültig sind.

Als Resultat der oben angegebenen Analyse ergibt sich demnach: Die Wärmeströme durch Verdunstung ( $s_1$ ) und Austausch ( $s_2$ ) sind durch folgende Formeln gegeben:

1. Für eine Wasserfläche von der Temperatur  $t_w$ :

$$(C_1 L_w = 5,04 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 3,02)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= A_w (f_0 - f) \\ &= 3,02 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.} \end{aligned} \quad (12,35)$$

$$\begin{aligned} s_2 &= A_2 (t_w - t_l) \\ &= 0,00183 \cdot T \sqrt{v + 0,3} (t_w - t_l) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.} \end{aligned} \quad (12,36)$$

2. Für eine Eisfläche von der Temperatur  $t_e$ :

$$(C_1 L_e = 5,04 \cdot 10^{-3} \cdot 680 = 3,43)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= A_e (f_0 - f) \\ &= 3,43 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.} \end{aligned} \quad (12,37)$$

$$\begin{aligned}
 s_2 &= A_2 (t_e - t_i) \\
 &= 0,00183 \cdot T \sqrt{v + 0,3} (t_e - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,38}$$

3. Für eine *Schneefläche* von der Temperatur  $t_s$ :

$$\begin{aligned}
 (C_1' L_e &= 20 \cdot 10^{-3} \cdot 680 = 13,6 \sim 14) \\
 s_1 &= A_s (f_0 - f) \\
 &= 14 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,39}$$

$$\begin{aligned}
 s_2 &= A_{2s} (t_s - t_i) \\
 &= 0,007 \cdot T \sqrt{v + 0,3} (t_s - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,40}$$

Für *Überschlagsrechnungen* setzen wir die mittlere Temperatur der Bodenschicht der Luft  $T = 273$ ,  $p = 760$  und erhalten dann als gesamte Wärmeabgabe durch Verdunstung und Austausch:

1. Für eine *Wasserfläche* von der Temperatur  $t_w$ :

$$\begin{aligned}
 s_1 + s_2 &= A_w (f_0 - f) + A_2 (t_w - t_i) \\
 &= 1,09 \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) + 0,5 \sqrt{v + 0,3} (t_w - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,41}$$

2. Für eine *Eisfläche* von der Temperatur  $t_e$ :

$$\begin{aligned}
 s_1 + s_2 &= A_e (f_0 - f) + A_2 (t_e - t_i) \\
 &= 1,23 \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) + 0,5 \sqrt{v + 0,3} (t_e - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,42}$$

3. Für eine *Schneefläche* von der Temperatur  $t_s$ :

$$\begin{aligned}
 s_1 + s_2 &= A_s (f_0 - f) + A_{2s} (t_s - t_i) \\
 &= 5,0 \sqrt{v + 0,3} (f_0 - f) + 2,0 \sqrt{v + 0,3} (t_s - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.}
 \end{aligned} \tag{12,43}$$

## Kap. V. PERIODISCHE WÄRMESTRÖME DURCH DIE UNTERE UND OBERE GRENZFLÄCHE DES WASSERS

### 13. Der Wärmestrom vom Boden des Wasserlaufes.

In einem Wasserlauf wird der Flussboden im grossen und ganzen die Temperatur des Wassers haben, und die Schwankungen derselben werden Wärmeströme verursachen, welche in den Boden hinein oder vom Boden heraus gehen. Die Grösse dieser Wärmeströme kann berechnet werden, wenn die Temperatur der Bodenfläche und die thermischen Eigenschaften des Bodenmaterials bekannt sind. Wir werden die Berechnung unter der Voraussetzung machen, dass der Boden eine ausgedehnte horizontale Fläche von homogenem Material ist. Von den abweichenden Bedingungen an den Ufern, die bei einem breiten und seichten Wasserlauf eine untergeordnete Rolle spielen, werden wir dabei absehen.

Wir gehen von der klassischen Berechnung der Temperaturwellen in einem homogenen Medium aus<sup>1)</sup>. Der Grenzfläche des Mediums,  $x = 0$ , wird eine harmonische Temperaturschwankung

$$\vartheta_{x=0} = A_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik, Bd. 2, Berlin 1921.



aufgezwungen, und zwar gleichzeitig in der ganzen Fläche. Diese Grenzflächenbedingungen, in Verbindung mit den gegebenen thermischen Daten des Mediums, werden dann auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung (13,1) angewandt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (13,1)$$

Dabei ist  $k^2 = \frac{l}{\rho c}$  das Temperaturleitvermögen,  $l =$  Wärmeleitvermögen,  $\rho =$  Dichte und  $c =$  spezifische Wärme. Die Lösung ist bekanntlich:

$$\vartheta = A_0 e^{-\frac{\gamma_1}{k} x} \cos \left( \frac{2 \pi t}{T} - \frac{\gamma_1}{k} x \right), \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{T}} \quad (13,2)$$

Dabei sind  $t$  und  $T$  in Sekunden gemessen, und  $A_0$  ist die Amplitude der Temperatur in der Fläche  $x = 0$ . Die Gleichung (13,2) stellt eine räumlich gedämpfte Temperaturwelle dar, deren Wellenlänge  $\lambda$ , Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  und räumliche Dämpfung die folgenden sind:

$$\lambda = 2 k \sqrt{\pi T}, \quad v = 2 k \sqrt{\frac{\pi}{T}}, \quad \frac{\gamma_1}{k} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \quad (13,3)$$

Die räumliche Dämpfung wird um so grösser, je kleiner  $T$  ist, d. h. je kürzer die Periode, um so kürzer dringen die Temperaturwellen ins Medium hinein.

Im praktischen Falle wird die gegebene Temperatur keine ganz harmonische sein, aber doch periodisch mit der Periode  $T$ . In dem Falle kann die Temperaturfunktion nach Fourier in harmonischen Schwingungen von den Perioden

$$\frac{T}{1}, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots, \frac{T}{n} = T_n,$$

in der folgenden Weise aufgelöst werden:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta = f(t) &= \vartheta_0 + \sum_n \left( A_n \cos \frac{2 \pi t}{T_n} + B_n \sin \frac{2 \pi t}{T_n} \right) \\ \text{wo} \quad A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2 \pi} f(t) \cos \frac{2 \pi n t}{T} dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2 \pi} f(t) \sin \frac{2 \pi n t}{T} dt \end{aligned} \right\} \quad (13,4)$$

Jede einzelne dieser harmonischen Temperaturschwingungen wird eine Temperaturwelle gemäss der Gl. (13,2) geben, und durch Superposition der Wellen wird die Temperaturverteilung im Medium bestimmt:

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0 + \sum_n A_n e^{-\frac{\gamma_n}{k} x} \cos \left[ \frac{2 \pi t}{T_n} - \frac{\gamma_n}{k} x \right] + \\ + \sum_n B_n e^{-\frac{\gamma_n}{k} x} \sin \left[ \frac{2 \pi t}{T_n} - \frac{\gamma_n}{k} x \right] \end{aligned} \quad (13,5)$$

Weil  $T_n = \frac{T}{n}$ , wodurch

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\pi}{T_n}} = \sqrt{\frac{n \pi}{T}} = \gamma_1 \sqrt{n}, \quad \text{wo } \gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{T}},$$

kann die Gleichung auch geschrieben werden:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \sum_n A_n e^{-\frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x} \cos \left[ \frac{2\pi n t}{T} - \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x \right] + \sum_n B_n e^{-\frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x} \sin \left[ \frac{2\pi n t}{T} - \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x \right] \quad (13,6)$$

In grossem Abstand von der Grenzfläche wird das erste Glied dominierend sein. Es ist die Mitteltemperatur des Mediums. Die Dämpfung ist für jede harmonische Welle durch  $\frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k}$  bestimmt, d. h. sie wird mit  $\sqrt{n}$  zunehmen, die höheren harmonischen Wellen dringen am kürzesten hinein.

Durch Einführung der Beziehung

$$A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} = C_n \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right) \quad (13,7)$$

wo  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  und  $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{A_n}{B_n}$

kann die Gleichung (13,6) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \sum_n C_n e^{-\frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x} \sin \left[ \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n - \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x \right] \quad (13,8)$$

welche die Temperaturverteilung im Medium darstellt, wenn die Temperatur der Grenzfläche durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \sum_n C_n \sin \left[ \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right] \quad (13,9)$$

Der Wärmestrom durch eine plane Fläche in der Tiefe  $x$  ist parallel und proportional zum Temperaturgradienten  $\left( -\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)$ :

$$I = -l \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec oder } I = -k^2 \varrho c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec} \quad (13,10)$$

Dabei ist nach der Gl. (13,8):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \sum_n C_n \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} \cdot e^{-\frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x} \left[ \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n - \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x \right) + \cos \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n - \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} x \right) \right] \quad (13,11)$$

Von speziellem Interesse ist der Wärmestrom durch die Grenzfläche ( $x=0$ ):

$$I_0 = -k^2 \varrho c \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \\ I_0 = k^2 \varrho c \sum_n C_n \frac{\gamma_1 \sqrt{n}}{k} \left[ \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right) + \cos \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right) \right] \quad (13,12)$$

Durch Einführung der Verbindung

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ und } \gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

ergibt sich

$$I_0 = k \varrho c \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \sum_n \sqrt{n} C_n \sin \left[ \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n + \frac{\pi}{4} \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ sec} \quad (13,13)$$

d. h.: Jede einzelne der harmonischen Komponenten  $I_{0n}$  des Wärmestromes wird also in der Phase um  $\frac{\pi}{4}$ , d. h. um  $\frac{1}{8}$  Periode vor der entsprechenden Temperaturschwingung verschoben. (Vgl. (13,9).)

Auf den ersten Blick ist es etwas überraschend, dass die Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{4}$  und nicht  $\frac{\pi}{2}$  ist; es beruht aber auf dem Umstand, dass der Temperaturgradient nicht nur von der Temperatur der Oberfläche abhängig ist, sondern auch von der Temperaturverteilung innerhalb der Oberfläche. Erst wenn die Temperatur zurückgeht, jedoch noch über den Mittelwert, wird der Gradient sich umkehren.

In der Gleichung (13,13) ist in dem Faktor  $\sqrt{\frac{2\pi}{T}}$  die Zeit  $T$  in Sekunden gemessen, in dem Winkelargument aber wird nur verlangt, dass  $t$  und  $T$  mit demselben Mass gemessen werden, z. B. in Tagen. Werden die Winkel in Graden und die Grundperiode  $T$  zu 360 Tagen gesetzt, so wird, wenn  $d$  die Anzahl der Tage bezeichnet:

$$I_0 = k \rho c \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \sum_n \sqrt{n} C_n \sin \left( n d + \varphi_n + \frac{180}{4} \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ sec.} \quad (13,14)$$

Für die praktischen Anwendungen ist nur eine bestimmte Zahl der harmonischen Temperaturschwingungen in Betracht zu ziehen. Dabei werden wir zwei Fälle gesondert behandeln: die langen Perioden, welche für den allgemeinen Wärmestrom vom Boden wichtig sind, und die kurzen, welche uns besonders bei der Unterkühlung der Oberfläche interessieren.

Bei der Berechnung der Wärmeabgabe des Flussbodens werden wir annehmen, dass das Material Stein oder Felsengrund ist, und für die Konstanten nehmen wir die folgenden Werte an:

$$\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3, \quad c = 0,20 \text{ cal/g grad}, \quad k = 0,066 \text{ cmsec}^{-\frac{1}{2}}$$

(Das Temperaturleitvermögen ist im Anschluss an die Angaben von Hann<sup>1)</sup> angegeben.)

Der Wärmestrom durch die Grenzfläche Boden/Wasser wird dann nach (13,13) pro Stunde gerechnet:

$$I_0 = 3600 \cdot 0,0827 \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sqrt{n} C_n \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n + \frac{\pi}{4} \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (13,15)$$

oder nach (13,14)

$$I_0 = 298 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sqrt{n} C_n \sin \left( n d + \varphi_n + \frac{180}{4} \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde.} \quad (13,16)$$

Über die Grössenordnung wird bemerkt: Wenn die jährliche Amplitude der Wassertemperatur  $A$  ist, so wird der Wärmestrom, der von der Grundschwingung bewirkt wird ( $T \sim 360 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec} = 31,1 \cdot 10^6 \text{ sec}$ ), die folgende Amplitude haben:

$$\begin{aligned} I_{01 \text{ max}} &= 0,0536 \cdot A \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} & (13,17) \\ &= 1,29 \cdot A \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag.} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> l. c.

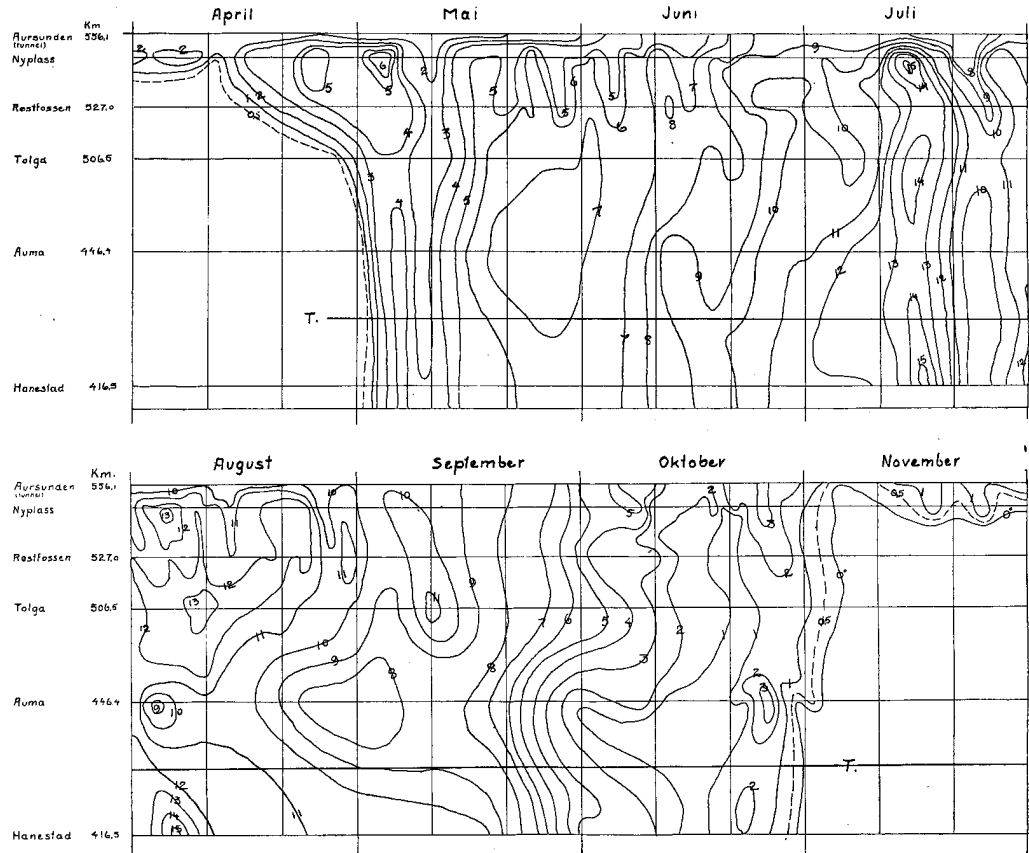


Abb. 12. Wassertemperatur in der Glomma, 1928.

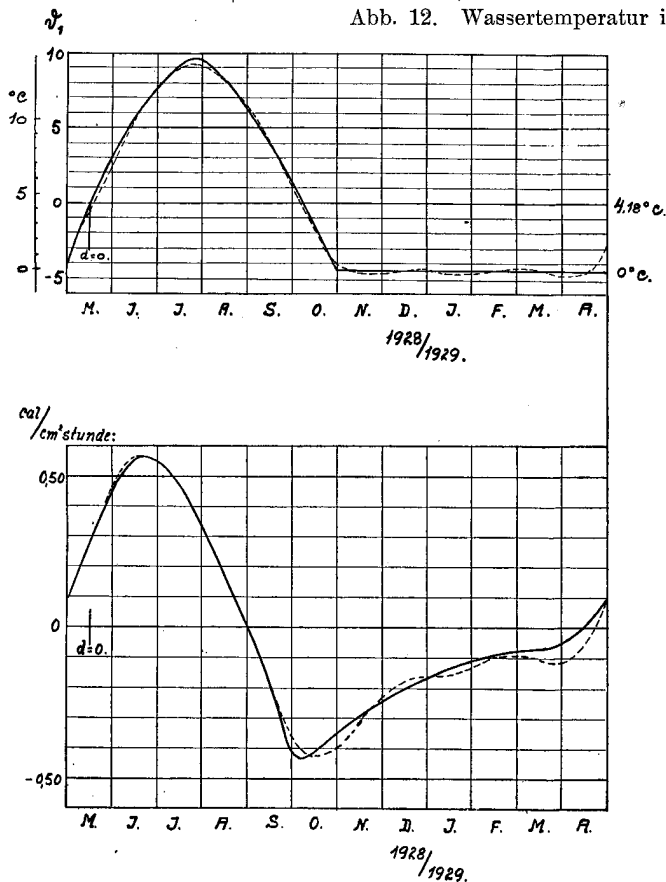


Abb. 13. Bodentemperatur und Wärmestrom vom Boden in der Glomma, 1928.

#### 14. Anwendung auf den Wasserlauf Glomma.

Während des Jahres 1928 wurden in der Glomma Temperaturmessungen an mehreren Stellen auf der Strecke Aursunden—Stai ausgeführt<sup>1)</sup>. Eine übersichtliche Darstellung der Temperaturverhältnisse während der Zeit April—November gibt das Diagramm der Abb. 12, wo die Zeit als Abszisse, der Abstand (dem Fluss entlang gemessen) als Ordinate und die Temperatur des Wassers durch Isothermen angegeben sind. Für unsere Untersuchung ist das Gebiet Auma—Hanestad von besonderem Interesse, und die Temperaturschwankungen können auf dem Diagramm an der Linie (T) abgelesen werden. Nach einer Überführung in ein Zeitdiagramm und nach einem Ausgleich der kleineren Schwankungen wird die Temperatur-

<sup>1)</sup> Die Messungen wurden in Verbindung mit den Untersuchungen der Eisgänge von Vassdragsvesenet ausgeführt. (Vgl. die Einleitung.)

kurve auf der Abb. 13 wiedergegeben. Die mittlere Temperatur ist  $4,18^\circ \text{C}$ . Durch harmonische Analyse dieser Kurve nach Fourier wird die Temperaturfunktion (vgl. (13,9)):

$$\vartheta = f(t) = 4,18 + 6,60 \sin(d + 18^\circ,7) + 2,86 \sin(2d - 51^\circ,3) \\ + 0,25 \sin(3d - 76^\circ,7) + 0,40 \sin(4d - 22^\circ,5) + \dots \quad (14,1)$$

Diese Temperaturfunktion ist auf der Abb. 13 durch die gestrichelte Kurve dargestellt und stellt für unseren Zweck eine genügende Übereinstimmung mit der ausgeglichenen Darstellung der Messungen dar. Aus der Gl. (14,1) wird mittels der Gl. (13,16), der Wärmestrom berechnet (dabei ist  $T = 360 \cdot 24 \cdot 3600 = 31,1 \cdot 10^6 \text{ sec}$ , also  $\frac{298}{\sqrt{T}} = 0,0536$ ):

$$I_0 = 0,0536 [6,60 \sin(d + 18,7 + 45) + \sqrt{2} \cdot 2,86 \sin(2d - 51,3 + 45) \\ + 0,25 \sqrt{3} \sin(3d - 76,7 + 45) + 0,40 \sqrt{4} \sin(4d - 22,5 + 45)] \\ \text{cal/cm}^2 \text{Stunde.} \quad (14,2)$$

Hier ist  $d$  die Anzahl der Tage, und das Jahr wird zu 360 Tagen gerechnet. Es ist somit der Wärmestrom

$$I_0 = 0,354 \sin(d + 63,7) + 0,217 \sin(2d - 6,3) + 0,021 \sin(3d - 31,7) \\ + 0,043 \sin(4d + 22,5) \text{ cal/cm}^2 \text{Stunde} \quad (14,3)$$

der in der Abb. 13 unten in der gestrichelten Kurve dargestellt ist. Der wahrscheinliche Wert des Wärmestromes ist durch die ausgeglichene Kurve angegeben. Daraus ersieht man, dass *das Material des Flussbodens die grösste Wärmemenge im Monat Oktober mit etwa  $0,4 \text{ cal/cm}^2 \text{Stunde}$  abgeben wird.* Darauf wird der Wärmestrom bis Mitte April abnehmen, um dann umzukehren, und Wärmeaufspeicherung findet den Sommer über statt.

Während der Zeit, die für Eisgänge kritisch ist, d. h. November—Dezember, ist der vom Flussboden ausgehende regelmässige Wärmestrom etwa  $0,2 \text{ cal/cm}^2 \text{Stunde}$ . Der Grössenordnung nach sind dies nur einige Prozente der Ausstrahlung von offenem Wasser, und der Wärmestrom vom Boden wird nur von Bedeutung für den Wärmehaushalt des Wasserlaufes sein, wenn der Wärmeverlust durch die Bildung einer Eisdecke herabgesetzt wird.

Ein Vergleich mit der Wärmezufuhr durch den Umsatz der potentiellen Energie des Wassers (Gl. (26,4)) zeigt, dass der Wärmestrom vom Flussboden am Anfang des Winters von derselben Grössenordnung ist wie die dynamische Erwärmung bei einem Gefälle von etwa  $1 \text{ m/km}$  ( $\frac{h}{L} = 0,001$ ).

Bei der oben gegebenen Behandlung sind nur die langperiodischen Temperaturschwankungen berücksichtigt worden. Die kurz dauernden, welche dementsprechend auf die Oberflächenschicht des Bodens begrenzt sind, werden wir für sich behandeln.

### 15. Kurzdauernde Wärmeströme. Unterkühlung der Oberfläche.

Wenn die Wassertemperatur gleichmässig ist, werden die Bodenfläche und Oberfläche durch wechselnde Wärmezufuhr Temperaturschwankungen unterworfen, von denen wir der Übersicht halber nur die Grundschiwingung ( $n = 1$ ) betrachten:

$$\vartheta_1 = C \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Die entsprechende Temperaturverteilung im Medium ist nach (13,8):

$$\vartheta = C \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k}} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k} \right) \quad (15,1)$$

Der Temperaturgradient wird (vgl. (13,11) u. (13,13)):

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{k} \sqrt{\frac{\pi}{T}} C \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k}} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (15,2)$$

und dementsprechend wird der Wärmestrom durch eine Fläche in der Tiefe  $x$

$$S = -k \varrho c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = k \varrho c \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{T}} C \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k}} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{k} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ sec} \quad (15,3)$$

Für die Grenzfläche  $x = 0$  wird der maximale Wärmestrom

$$S_{0 \max} = k \varrho c \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \cdot \vartheta_{0 \max} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec.} \quad (15,4)$$

Wenn der Wärmestrom nach Periode und Amplitude gegeben ist, ist also die Temperaturamplitude der Grenzfläche durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\vartheta_{0 \max} = \frac{S_{0 \max}}{k \varrho c \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \quad (15,5)$$

*Anwendung.* Dieses Resultat werden wir zuerst auf die Einstrahlung in den Flussboden anwenden. Nach der Tabelle 11 kann die mittlere Grösse des Wärmestromes, der von der Bodenschicht absorbiert werden kann, angegeben werden, und wir werden beispielsweise einen Zahlenwert von  $\frac{6,0}{3600}$  cal/cm<sup>2</sup>sec für die Amplitude des Wärmestromes annehmen.

Der Wärmestrom wird teils abwärts in den Boden hinein, teils aufwärts durch das Wasser (bezw. durch das Grundeis) weggeleitet werden. Da der Wärmestrom proportional zu dem Faktor  $k \varrho c$  ist, der für Steingrund = 0,033 und für Wasser = 0,036 angenommen werden kann, dürfen wir damit rechnen, dass die beiden Wärmeströme gleich gross sind. Dabei haben wir von der Konvektion abgesehen. Demnach wird unsere Berechnung einen Höchstwert der Temperatursteigerung ergeben.

Nehmen wir an, dass das Minimum der Temperatur bei 0° C liegt, so wird die maximale Temperatur der doppelten Amplitude gleich, oder nach der Gl. (15,5):

$$\Delta = \frac{2 S_{0 \max} \sqrt{T}}{k \varrho c \sqrt{2} \pi} \quad (15,6)$$

und bei der Einsetzung  $k \varrho c = 0,033$

$$\Delta = 24 S_{0 \max} \cdot \sqrt{T} \quad (15,7)$$

Nehmen wir beispielsweise eine Periode von 1 Stunde an, d. h.  $T = 3600$  für eine Einstrahlung der oben angenommenen Grösse ( $S_{0 \max} = \frac{1}{2} \frac{6,0}{3600}$  cal/cm<sup>2</sup>sec), so wird der berechnete Höchstwert der Temperatursteigerung 1,2° C. Dabei wurde allerdings nur auf die Wärmeleitung Rücksicht genommen.

Eine Kontrolle der oben (15,7) berechneten Temperatursteigerung wurde durch folgende einfache Versuche gemacht:

*Versuch.* 12. II. 1929. 12 Uhr, Sonnenhöhe 14°. Bei klarem Wetter und einer Lufttemperatur -5,8° C wurde ein Becherglas mit Eis und Wasser im Freien aufgestellt. Es bildete sich immer neues Eis an der Oberfläche und an den Wänden, durch Umrühren wurde aber die Bildung zusammenhängender Schichten verhindert, und gleichzeitig wurde eine einheitliche Temperatur des Wassers von null Grad gesichert, auch während der Bestrahlung.

- A. Es wurde ein Beckmanthermometer in das Becherglas hineingestellt und der Sonnenstrahlung ausgesetzt. Die Temperatur stieg innerhalb zwei Minuten bis  $0,65^{\circ}\text{C}$ , wenn das Thermometer ruhig stand. Bei Umrühren wurde eine Temperatur von  $0,15^{\circ}\text{C}$  nicht unterschritten.
- B. Ein Normalthermometer (von Siebert u. Kühn) zeigte unter Bestrahlung im Eiswasser  $2,0^{\circ}\text{C}$ , durch Umrühren wurde die Temperatur auf  $1,0^{\circ}\text{C}$  herabgesetzt, und im Schatten zeigte es  $0,05^{\circ}\text{C}$ .
- Zwei Stabthermometer (Laboratorienausführung) wurden auch geprüft, das eine wurde matt schwarz lackiert. Durch Bestrahlung stieg die Temperatur des blanken Thermometers bis  $0,30^{\circ}\text{C}$  und die des schwarzen bis  $0,50^{\circ}\text{C}$ . Durch Umrühren sank die Temperatur des blanken (und glatten) Thermometers auf  $0,20^{\circ}\text{C}$ , des schwarzen (und rauhen) dagegen auf  $0,0^{\circ}\text{C}$ .
- C. Zur Kontrolle wurde auch ein Pentanthermometer angewandt, dessen Thermometerkugel die Lichtstrahlung nicht absorbiert; sowohl bei Bestrahlung als auch im Schatten zeigte das Thermometer null Grad.
- D. Der Versuch wurde auch in der Weise abgeändert, dass die Thermometer in ein wassergefülltes Bohrloch eines Eisblockes eingesetzt wurden. Das Ergebnis war ganz dasselbe.

Nehmen wir bei diesem Versuche eine Einstrahlung (vgl. Tabelle 6 für Strahlung durch Fläche senkrecht zur Strahlung) von etwa  $50\text{ cal/cm}^2\text{Stunde} = 0,014\text{ cal/cm}^2\text{sec}$  an, d. h.  $S_{0\text{max}} = 0,007$  und setzen wir ferner  $T = 120$  Sekunden, so ergibt sich nach der Gl. (15,7) eine Temperatursteigerung von  $1,8^{\circ}\text{C}$ .

Diese Versuchsreihe zeigt einerseits, dass der oben gegebene Überschlag betreffs der Temperatursteigerung im wesentlichen zutreffen wird, andererseits aber geht aufs deutlichste hervor, dass bei Messungen der Wassertemperatur das Thermometer unbedingt im Schatten abgelesen werden muss. Diese Forderung, die bei Messungen der Lufttemperatur als selbstverständlich erscheint, ist für die Wassertemperatur ebenso wichtig, vor allem wenn kleine Temperaturunterschiede festzustellen sind.

Die Bedeutung der Strahlenabsorption in der Bodenschicht für die Lösung des Grundeises (was in dem Abschnitt 32 behandelt wird) wird durch folgenden Versuch illustriert.

*Versuch.* 15. II. 1929. 11—13 Uhr. Sonnehöhe  $13^{\circ}$  bis  $14^{\circ}$ . Ein dünner Wolken-schleier von Cist, der jedoch die Sonnenstrahlung wenig beeinflusste. Lufttemperatur  $-8,5^{\circ}$ , Windgeschwindigkeit 6—8 m/sec.

Auf eine Schieferplatte wurden 4 Eiszyylinder gestellt, mit Wasser angefeuchtet und dann auf der Platte festgefroren, wobei sowohl die Zylinder als auch die Unterlage die Temperatur der Luft (im Schatten) annahmen. Inzwischen wurde eine Wasserschale mit Eiswasser gefüllt im Freien aufgestellt, und durch Messung mit (beschattetem) Thermometer wurde die gleichmässige Temperatur von null Grad kontrolliert. Es wurden dann die 4 Zylinder samt ihrer Unterlage in die Schale hineingestellt, und die sofort an den kalten Gegenständen gebildete Eisschicht wurde schnell mit einem Messer um die Zylinder herum entfernt. Drei von den Zylindern wurden der Sonnenstrahlung ausgesetzt: Nr. 1, der auf schwarzer Unterlage festgefroren war, floss nach 5 Minuten empor. Nr. 2, der auf der grauen Schieferunterlage selbst festgefroren war, kam nach 8 Minuten. Nr. 3, der auf blanke Kupfer-Folie gestellt wurde, kam nach 13 Minuten. Nr. 4 endlich, der auf Schiefer stand, aber nur von der diffusen Himmelsstrahlung getroffen wurde, kam nach 14 Minuten. Die totale Einstrahlung auf die horizontale Bodenfläche

dürfte bei dieser Gelegenheit von der Grössenordnung  $15 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  gewesen sein. (Vgl. Tabelle 11.) Während 5 Minuten würde dann eine Eisschicht von der Dicke  $0,008 \text{ cm}$  geschmolzen sein, unter der Voraussetzung, dass die Hälfte der Absorptionswärme in die Unterlage weitergeleitet wurde.

Dieser Versuch ist zwar kein quantitativer, er wurde nur gemacht um die Bedeutung der Einstrahlung für die Lösung einer Eisschicht vom Boden zu demonstrieren.

Die oben ausgeführten Berechnungen über die Temperaturerhöhung der Grenzschicht werden wir auch für die *Oberfläche* des Wassers geltend machen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Lufttemperatur niedriger ist als die Wassertemperatur, und wir sehen von der Lichteinstrahlung am Tage ab. Ein periodischer Wärmestrom  $S_0$  wird dann eine maximale Abkühlung geben, die in der Grössenordnung (vgl. 15,6) die folgende sein wird:

$$\Delta_{max} = 2 \frac{S_{0max} \sqrt{T}}{k_{0c} \sqrt{2\pi}} \quad (15,8)$$

Setzen wir für Wasser  $k_{0c} = 0,036$ , so wird die Abkühlung:

$$\Delta_{max} = 22,2 S_{0max} \sqrt{T}$$

Weil wir bei der Berechnung nur auf die Wärmeleitung Rücksicht genommen haben, wird diese Gleichung nur für kurze Perioden gültig sein. Das ist aber auch von besonderem Interesse, denn *solche kurzen Perioden der Abkühlung einer Oberflächenschicht treten überall da auf, wo Wirbelbewegung des Wassers eintritt*. Wenn man einen Wasserlauf beobachtet, wo das Gefälle zu wirbelnder Strömung hinreichend ist, wird man sehen, dass die Wasserwirbel eine konservative Wirbelfläche haben, die den Wirbel wie einen Sack umhüllt. Diese Wirbelfläche folgt dem Strome und dreht sich dabei im grossen und ganzen um eine horizontale Achse. Der Querschnitt eines Wirbels wird in der Regel der Tiefe des Wasserlaufes gleich sein, und die «Umlaufszeit» wird sowohl von der Tiefe als auch von der Wassergeschwindigkeit abhängen. Während eines Abschnittes des «Umlaufs» wird ein Teil der Wirbelfläche auftauchen und als Oberflächenteil der vollen Abkühlung ausgesetzt werden. Dann wird dieser Teil auf seinem weiteren Lauf wieder untertauchen, seine Individualität als Grenz- und Gleitfläche aber behalten, und obwohl ihm auf der weiteren Bewegung Wärme zugeführt wird, wird eine wichtige Folge sein, dass das strömende Wasser von abgekühlten Wirbelflächen durchsetzt ist. Wie diese Wasserhäute im Falle der Unterkühlung zur Bildung von Grundeis Anlass geben können, werden wir besonders behandeln. Hier aber wollen wir versuchen, die Grössenordnung der Oberflächenabkühlung zu beurteilen. Dabei nehmen wir an, dass die Periode der oben erwähnten Wirbel zwischen etwa 1 Sekunde und 100 Sekunden liegt, was immerhin einen praktischen Anhaltspunkt gibt. Weiter nehmen wir an, dass der ausgehende Wärmestrom z. B. von der Grösse  $\frac{24}{3600} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$  ist, die an einem gewöhnlichen Wintertage leicht erreicht wird.

Die entsprechende Temperaturabnahme wird dann

$$\begin{aligned} \text{bei } T = 1 \text{ sec} & \quad -0,15^\circ \text{ C} \\ T = 100 \text{ sec} & \quad -1,5^\circ \text{ C}. \end{aligned}$$

In dem Falle, wo die Durchschnittstemperatur des Wassers  $0^\circ \text{ C}$  war, muss daher in der Oberfläche eine bedeutende *Unterkühlung* auftreten, wenn eine Wirbelfläche der Abkühlung ausgesetzt wird. Eine solche Unterkühlung des Wassers ist von Altberg<sup>1)</sup> durch Temperaturmessungen in der Neva nachgewiesen, und eine direkte Messung der Oberflächentemperatur durch Messung der Ausstrahlung wird unten beschrieben. Gewöhnlich

<sup>1)</sup> l. c.



wird es nicht gelingen mit Quecksilberthermometer die Temperatur der unterkühlten Schicht zu messen, weil deren Mächtigkeit zu dünn ist. Auch die untergetauchten Wirbelflächen entziehen sich in der Weise der Temperaturmessung. Dass dies der Fall ist, wird man einsehen, wenn man einen Überschlagn über die Mächtigkeit der abgekühlten Schicht macht.

Zu dem Zweck berechnen wir die Wellenlänge der Temperaturwelle, denn die Schichtdicke, die in Frage kommt, wird von der Grössenordnung  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge sein. Diese ist

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{k}{2} \sqrt{\pi T} \quad (15,9)$$

und bei  $k = 0,066$ ,  $T = 1$ , bzw.  $T = 100$  ergeben sich Schichtdicken von 0,06 bzw. 0,6 cm. Es wäre demnach zu erwarten, dass die Schichten, die bei wirbelnder Strömung periodisch unterkühlt werden, eine Dicke von der Grössenordnung eines Millimeters haben werden.

### 16. Messung der Unterkühlung der Wasseroberfläche.

Wie aus dem oben Behandelten hervorgeht, muss eine einwandfreie Messung der Oberflächentemperatur des Wassers durch Messung der Strahlung der Oberflächenschicht geschehen. Eine solche Messung wurde von dem Verfasser am 19. April 1930 an dem Fluss Festa in Opdal gemacht. Es wurde eine Mollsche Thermosäule benutzt, welche in einem geschützten Gehäuse angebracht war (Abb. 14). Letzteres konnte durch Füllen mit Eis und Wasser auf  $0^\circ \text{C}$  gehalten werden und war durch eine Filzhülle gegen Wärmeaustausch effektiv geschützt. Bei der Messung wurde eine Kompensationsmethode benutzt, wobei die Thermosäule in dem Galvanometerzweig einer Wheatstone'schen Brücke eingeschaltet wurde. Das Galvanometer wurde durch Regulieren des Widerstandes  $R$  (Abb. 15) bei jeder Messung auf Null eingestellt; das Ablesen des Spiegelgalvanometers geschah durch die Anwendung eines beleuchteten Spaltes und dessen Ablesung durch Mikroskop. Der Messapparat war in dieser Weise leicht transportabel.

Die Justierung der Thermosäule zur Temperaturmessung durch Strahlung muss unter denselben Versuchsbedingungen vorgenommen werden wie die Messungen. Bei dieser Gelegenheit wurde eine Schneefläche, deren Temperatur in anderer Weise gemessen wurde, als schwarzer Strahler benutzt<sup>1)</sup>. Mit den Bezeichnungen der Abb. 15 ist die elektromotorische Kraft der Thermosäule

$$E = E_b \left( \frac{R_0}{R_0 + R} - \frac{a}{a + b} \right) \quad (16,1)$$

und die Temperatur der strahlenden Fläche  $t_s = c \cdot E$ . Bei den Versuchen war  $R_0 = 4550 \text{ Ohm}$ ,  $a = b$ , also  $\frac{a}{a + b} = 0,5$ , und bei der Justierung wurde  $c = -165$  gefunden. Demnach ist die Oberflächentemperatur der strahlenden Fläche:

$$t_s = -165 \cdot E_b \left( \frac{R_0}{R_0 + R} - 0,5 \right) = -82,5 E_b \frac{R_0 - R}{R_0 + R} \quad (16,2)$$

<sup>1)</sup> Vgl. Abschnitt 11. Der Schnee ist als ein fast idealer schwarzer Strahler zu betrachten.

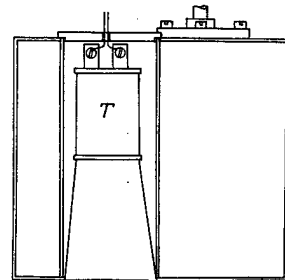
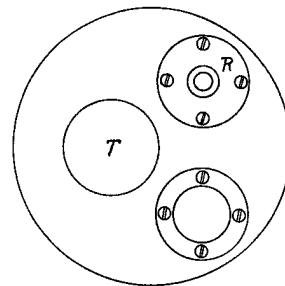


Abb. 14.

T Thermosäule. R Rührer.

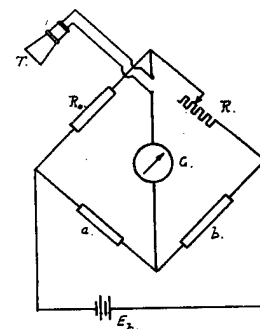


Abb. 15.

Bei kleinem  $R_0 - R$  wird, bei  $R_0 = 4550$ ,

$$t_s = -0,00905 E_b (R_0 - R) \quad (16,3)$$

Als Beobachtungsort wurde eine Stelle gewählt, wo der Fluss bei einer Abzweigung des Wasserlaufes durch eine Holzwehr aufgestaut war. An der Messtelle war die Wassergeschwindigkeit etwa 0,25 m/sec, die Tiefe etwa 0,5 m, Breite 3—4 m, und eine sehr langsame Wirbelbildung war in der Mitte des Stromes bemerkbar, an den Ufern aber bedeutend lebhafter. Oberhalb der Messtelle war eine offene Wasserfläche, deren Ausdehnung etwa  $50 \times 10$  m war, und die Wasserbewegung war dort von derselben Größenordnung, weil das Wasser über die Holzwehr strömte. Im übrigen war auf einer Strecke von mehreren Kilometern ein starkes Gefälle, wodurch eine starke Mischung der Wassermengen stattfand. In der Mitte der schneebedeckten Eisdecke war eine offene Rinne, und das strömende Wasser war somit der Abkühlung durch Ausstrahlung und Konvektion frei ausgesetzt. Die Wasserführung dürfte an dem betreffenden Zeitpunkt 2—3 m<sup>3</sup>/sec gewesen sein.

Bei der Beobachtung war es ganz klar und die Luft so ruhig (0 bis 1 m/sec), dass die Messungen ohne Flusspat-Abschluss der Thermosäule ausgeführt werden konnten, was die Empfindlichkeit bedeutend erhöhte. Um 18<sup>h</sup> 50 ging die Sonne hinter den Gebirgen unter, aber erst um 20<sup>h</sup> 45 wurden die ersten Sterne sichtbar. In der Zwischenzeit fand das allmähliche Abnehmen der diffusen Lichtstrahlung statt.

Es wurden zwei Messtellen benutzt. An der ersten wurde die Thermosäule gegen die frei exponierte Wasserfläche gerichtet (unter einer Neigung von etwa 45°). An der zweiten Messtelle war ein hölzerner Schirm quer über das strömende Wasser gestellt (Abb. 16) und etwa 10 cm in das Wasser hineingesenkt, dadurch wurde das strömende Wasser gezwungen darunter wegzugleiten. Es bildeten sich sowohl oberhalb als auch unterhalb der Wand die sehr deutlichen Grenzlinien der zwei stationären Wirbel, welche auf der Abb. 16 angedeutet sind. Es wurde an dieser Messtelle sowohl die Oberflächen-temperatur bei A als auch bei B mit der Thermosäule gemessen.

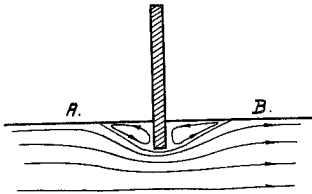


Abb. 16.

In dieser Weise wurde es möglich zu verfolgen, wie eine Wirbelfläche, die abgekühlt ist, sich in ihrem weiteren Verlauf *durch das Wasser* verhält. Wir geben unten in der Tabelle 16 die Messungen der Strahlungstemperatur  $t_s$  an, sowie die Durchschnittstemperatur  $t_w$  des Wassers und die Temperatur des trockenen ( $t_1$ ) und feuchten ( $t_2$ ) Thermometers in der Luft.

Um 21<sup>h</sup> 40 wurden treibende Eiskristalle in der Wasseroberfläche beobachtet. Wahrscheinlich hat die Bildung schon etwas früher angefangen, ist aber nicht bemerkt worden, denn die Messungen um 20<sup>h</sup> 45 und später scheinen etwas zu kleine Werte zu geben<sup>1)</sup>.

Von den Messungen geht erstens hervor, dass *eine Unterkühlung der oberen Wasserschicht bis  $-1,4^\circ$  C festgestellt wurde.*

(Berechnung: Ausgehender Wärmestrom nach den Tabellen der Kap. III u. IV,  $S_{0\max} = \frac{18}{3600}$  cal/cm<sup>2</sup>sec. Nach (15,8) wäre demnach die Abkühlung

$$\Delta_{\max} = 22,2 \cdot \frac{18}{3600} \sqrt{T}$$

Wird diese gleich 1,4 gesetzt, so wäre  $T = 160$  sec, was unter den gegebenen Umständen plausibel erscheint.)

<sup>1)</sup> An der zweiten Messtelle wird übrigens die freie Ausstrahlung durch den Holzschirm etwas herabgesetzt.

Tabelle 16.

Messungen der Oberflächentemperatur. Festa, Opdal, 19. IV. 1930.

Erste Mess- stelle	Zeit	Luft		Wasser		Abkühlung	Unter- kühlung
		$t_1$	$t_2$	$t_w$	$t_s$	$t_s - t_w$	
	19 <sup>h</sup> 00	-2,8		1,10	0,0	-1,1	
	24	-3,2		0,85	-0,27	-1,12	-0,27
	35	-3,6	-5,0	0,58	-0,40	-0,98	-0,40
	50			(0,52)	-0,46	-1,02	-0,46
	20 <sup>h</sup> 03	-4,6	-6,0	0,46	-1,18	-1,64	-1,18
	16	-4,9	-6,0	0,44	-1,27	-1,71	-1,27
	45			0,20	-1,42	-1,62	-1,42
	55	-5,2	-6,3	0,18	-1,29	-1,47	-1,29
Zweite Mess- stelle							
Bei A.....	21 <sup>h</sup> 05	-5,4	-6,4	0,06	-1,16	-1,22	-1,16
Bei B.....	11	-5,5	-6,5	0,06	-1,16 bis -1,29	-1,22 bis -1,35	-1,16 bis -1,49

Zweitens wurde aus den zwei letzten Beobachtungen festgestellt, dass *eine unterkühlte Wirbelfläche ihre Temperatur beim Verlauf durch das Wasser nur langsam ändern wird*. Bei wirbelnder Bewegung wird also das Wasser von unterkühlten Wirbelflächen durchsetzt sein können.

Wir werden später auf die Bedeutung dieses Resultats für die Bildung von Grundeis zurückkommen. (Abschnitt 31.) Die Beobachtung bei den oben erwähnten Messungen ergab auch, dass als Folge der Unterkühlung um etwa 21 Uhr die Bildung von festsetzenden Eiskristallen an den Ufern begann, nicht nur in der Oberfläche sondern auch tiefer. Später in der Nacht bewirkte die starke Bildung von schwimmenden Eisnadeln und von festsetzendem Grundeis, dass der Wasserspiegel um etwa 50 cm gehoben wurde. Dies konnte am nächsten Morgen beobachtet werden; das Wasser war dann wieder gefallen. Es war dann möglich, das Kristallgefüge in unverletztem Zustand zu beobachten: es war in bedeutendem Grade regelmässig angeordnet und legte die Vorstellung nahe, dass die Wände der untertauchenden Stromröhren und Stromwirbel sozusagen als Eiswände ausgeformt worden waren. Das Kristallgefüge bildete «Korridore» und «Zimmer», die miteinander in Verbindung standen. Das Ganze lässt, wenn es eben gebildet ist, das Wasser verhältnismässig leicht hindurch, wird aber nach und nach durch die schwimmenden Eisnadeln verstopft, und dann wird auch die ursprüngliche Struktur verwischt. In diesem Falle war es aber besonders schön zu beobachten.

*Bemerkung.* Eine Messung der Unterkühlung der Oberflächenschicht bei stehendem Wasser kann nach derselben Methode geschehen. Die oben verwendete Berechnung kann aber bei grossen Werten der Periode  $T$  wegen der eintretenden Konvektion nicht mehr benutzt werden, höchstens kann sie eine Schätzung der maximalen Abkühlung geben.

Über derartige Messungen der Oberflächenabkühlung wird in einer späteren Arbeit berichtet werden.

## Kap. VI. GESAMTER WÄRMESTROM. DIE TEMPERATURÄNDERUNG AUF EINER LÄNGEREN STRECKE.

### 17. Gesamter Wärmestrom von der Oberfläche.

Die Wärmeprozesse, die zusammen den Wärmehaushalt eines Wasserlaufes bestimmen, sind in folgender Weise lokalisiert:

- 1) In einer dünnen Oberflächenschicht wird *Wärmestrahlung* absorbiert und emittiert, Wärme durch *Verdunstung* und *Austausch* an die Luft abgegeben und ein Teil der einfallenden *Lichtstrahlung* absorbiert. Der Wärmeaustausch zwischen dieser Oberflächenschicht und den tieferen Wassermengen wird durch Mischung, zum geringen Teil auch durch Wärmeleitung, besorgt. Wo geringe oder keine Mischung des Wassers stattfindet, wird dieser Wärmeaustausch langsam vor sich gehen, und erhebliche vertikale Temperaturgradienten können auftreten.
- 2) In den Wassermassen und in der Oberfläche des Bodens wird der Rest der Lichtstrahlung absorbiert. Bei langsamer Mischung wird auch diese Wärmezufuhr Temperaturdifferenzen verursachen.
- 3) Die ganze Wassermasse wird durch den Umsatz der potentiellen Energie dynamisch erwärmt.
- 4) Durch Wärmeleitung wird Wärme von dem Wärmeverrat des Bodenmaterials an die Bodenschicht des Wassers abgegeben.

Diese Unterschiede der auftretenden Wärmeprozesse sind für die Temperatur des Wassers ohne Bedeutung, wenn durch *vollständige* Mischung eine einheitliche Temperatur gesichert wird. Bei langsamer Mischung können zwar erhebliche Temperaturgradienten bestehen, dank der verschiedenen Natur der erwähnten Wärmeprozesse, wenn wir aber die *mittlere* Temperatur berechnen, sind alle Prozesse mit ihrem vollen Betrag in Rechnung zu bringen.

(Bei der späteren Behandlung der Eisbildung dagegen (Abschnitt 26) werden wir gelegentlich auf die Unterschiede der einzelnen Wärmeprozesse Rücksicht nehmen.)

Bei vollständiger Mischung ist die Wärmeabgabe von der Oberfläche während  $n$  Stunden, von denen  $d$  Tagesstunden sind, die folgende:

$$S_n = n \cdot (s_N + s_1 + s_2 - (s_a + s_b)) - \frac{d}{d_0} \cdot Q_m \text{ cal/cm}^2 \quad (17,1)$$

Dabei sind, in cal/cm<sup>2</sup> Stunde gemessen:

$s_N$  der Wärmestrom der effektiven Ausstrahlung nach (11,12),

$s_1 + s_2$  der Wärmestrom durch Verdunstung und Austausch, nach (12,35) und (12,36),

$s_a$  der Wärmestrom der dynamischen Erwärmung nach (26,4).

$s_b$  der Wärmestrom vom Boden nach den Abschn. 13 u. 14.

Ferner ist

$Q_m$  die totale Einstrahlung nach (9,14) und

$d_0$  die Länge des hellen Tages in Stunden.

Im letzten Glied der Gl. (17,1) ist für diese Übersichtsrechnung die totale Einstrahlung auf die Tagesstunden  $d_0$  als gleichmässig verteilt angenommen. Für einen ganzen Tag wird

$$S_{24} = 24 (s_N + s_1 + s_2 - (s_a + s_b)) - Q_m \text{ cal/cm}^2 \quad (17,2)$$

den Wärmeverlust pro cm<sup>2</sup> der Oberfläche an einer bestimmten Stelle geben (vollständige Mischung vorausgesetzt). Diese Gleichung bildet die Grundlage für die Berechnung der Eisbildung in strömendem Wasser. (Kap. VIII.)

### 18. Die Temperaturänderung auf einer längeren Strecke.

Für die Berechnung der Änderung der mittleren Temperatur ist es bequemer dieselbe auf eine bestimmte Wassermenge zu beziehen, der man auf ihrem Laufe folgt. Es sei die Transportzeit (vgl. Abschnitt 19) auf einer gegebenen Strecke =  $n$ , wovon  $d$  Stunden Tageslicht. Während der Zeiträume  $n$  und  $d$  werden von der betrachteten Wassermenge  $q$  die Flächen  $F_n$  bzw.  $F_d$  überstrichen, und die entsprechende Wärmeabgabe wird eine Temperaturänderung  $\Delta t$  der Wassermenge  $q$  bewirken, die im Laufe der Transportzeit  $n$  beim Passieren des Areals  $F_n$  eintreten wird.

Wenn die mittlere Geschwindigkeit als konstant über die ganze Strecke betrachtet werden darf, so ist  $F_d = \frac{d}{n} F_n$ . Werden dann  $F_n$  in  $m^2$ ,  $q$  in  $m^3/sec$ , die Wärmeströme in  $cal/cm^2$  Stunde gemessen, so ist

$$\Delta t_n = \frac{10^{-6} F_n}{0,36 q} \left[ s_N + s_1 + s_2 - \left( s_d + s_b + \frac{d Q_m}{n d_0} \right) \right] \quad (17,3)$$

Für einen Tag,  $n = 24$  Stunden, wird  $d = d_0$ , und wenn man ferner die Verbindung  $\frac{10^{-6} F_n}{0,36 q} \cdot s_d = \frac{h}{427}$  (vgl. 26,4) einführt, so wird

$$\Delta t_{24} = \frac{10^{-6} F_{24}}{0,36 q} \left[ s_N + s_1 + s_2 - \left( s_b + \frac{Q_m}{24} \right) \right] - \frac{h}{427} \quad (17,4)$$

( $h$  = Fallhöhe in m auf der ganzen Strecke).

Diese Formeln geben die Temperaturabnahme:

- über eine gegebene Strecke, deren überstrichenes Areal bekannt ist. Die entsprechende Transportzeit braucht man nur insofern zu kennen als sie zur Verwertung der meteorologischen Observationen nötig ist;
- in einer gegebenen Transportzeit. Dabei muss das überstrichene Areal bekannt sein, also auch die Geschwindigkeitsverteilung auf der betreffenden Strecke (Abschn. 19).

*Anwendung.* Den Wasserlauf Glomma betreffend ist es von Interesse zu wissen, welche Strecke das Wasser von dem Magazin Aursunden unter durchschnittlichen Winterbedingungen zurücklegen muss um bis auf  $0^\circ C$  abgekühlt zu werden. Es sei z. B. die Wassertemperatur bei der Ausmündung  $+3^\circ C$ ; als durchschnittliche Breite wird 80 m, als Wasserführung 20  $m^3/sec$  angenommen. Mittels Anwendung der oben angegebenen Formeln und Tabellen findet man, dass im Winter das Wasser, das aus dem Aursunden mit  $3^\circ C$  ausläuft, auf  $0^\circ C$  abgekühlt werden würde, wenn eine offene Strecke zurückgelegt wird, deren Länge zwischen etwa 6 und 30 km schwankt, je nach den meteorologischen Bedingungen. (Temperatur unter Null vorausgesetzt.) Die Bildung einer festen Eisdecke wird aber solche Schwankungen des offenen Areales stark herabsetzen, und auch beim Eintreten einer vorübergehenden Temperatursteigerung über Null wird eine Eisgrenze bestehen bleiben. Es wird ja bei Zufuhr von wärmerem Wasser die Eisdecke abschmelzen, bis dahin, wo das strömende Wasser seine wesentliche Wärme abgegeben hat. Die Eisgrenze rückt dabei etwas stromabwärts, um dann bei eintretender Temperaturabnahme wieder stromaufwärts zu rücken. Die Schwankungen der Eisgrenze werden m. a. W. stark gedämpft sein.

Im Winter 1928—29 lag die Eisgrenze in einem Abstand von etwa 6 bis 10 km von Aursunden, im Durchschnitt bei Nyplass (8 km). Die Temperaturmessungen, die während der Winter 1926—27 und 1928—29 von Vassdragsvesenet gemacht worden sind, zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Werten, die in der oben angegebenen Weise berechnet wurden.

Ein interessantes Beispiel für die Bedeutung der dynamischen Erwärmung in extremen Fällen bietet die Fallstrecke bei Nore in Numedal, an der Ausmündung des Sees Tunhövd,

der reguliert ist. Auf einer Strecke von 8,1 km (von Brofoss bis Sporran) beträgt die gesamte Fallhöhe 400 m. Bei einer (regulierten) Wasserführung von  $40 \text{ m}^3/\text{sec}$  wird das Wasser auf der erwähnten Strecke seine Temperatur nicht ändern, wenn die Lufttemperatur auf etwa  $-10^\circ \text{C}$  gesunken ist<sup>1)</sup>. Man verifiziert leicht, dass dies mit unseren Formeln und Tabellen im Einklang steht (die Breite des Wasserlaufes wird zu etwa 60 m angenommen). Bei Lufttemperaturen in der Nähe von  $0^\circ \text{C}$  und ganz bewölktem Himmel beträgt die Temperatursteigerung auf der Fallstrecke fast  $1^\circ \text{C}$ , der dynamischen Erwärmung entsprechend.

### 19. Berechnung der Transportzeit des Wassers über eine gegebene Strecke.

Wir nehmen an, dass die Wasserführung des Wasserlaufes durch Messungen bekannt ist. Die mittlere Geschwindigkeit und die entsprechende Transportzeit auf einer gegebenen Strecke sind dann auch gegeben, wenn das Querprofil des Wasserlaufes bekannt ist. Dies ist aber in den norwegischen Wasserläufen nur selten der Fall, in der Regel ist nur die Breite und das Gefälle gemessen. Von den erwähnten drei Grössen, Wasserführung, Breite und Gefälle ist dann die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit an jeder Stelle zu finden und nachher die Transportzeit über eine gegebene Strecke durch Summation zu berechnen.

Als Grundlage unserer Berechnungen benutzen wir die Bearbeitung eines grossen Beobachtungsmaterials, das von M a t a k i e w i c z ausgeführt ist. Seine Resultate sind in einer Tabelle in *Engels Handbuch des Wasserbaues* (Bd. I, 1914, S. 79) angegeben. Die

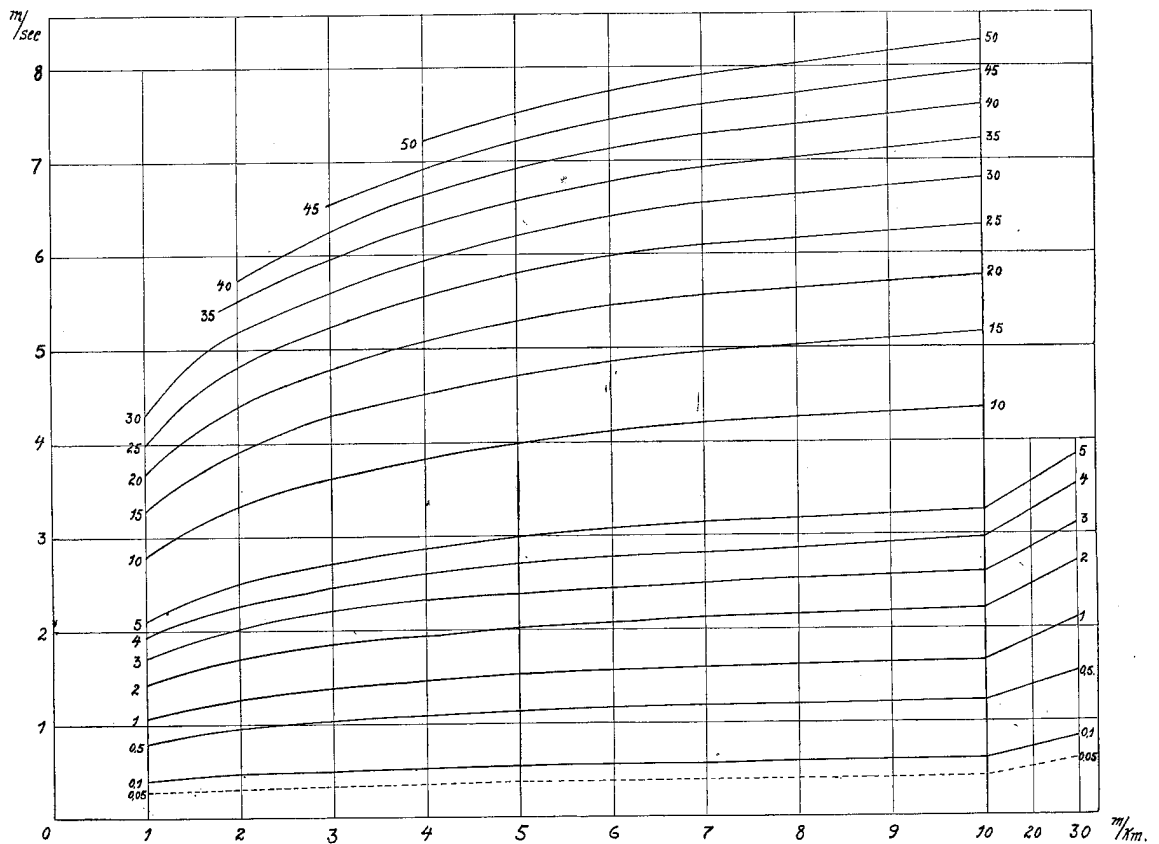


Abb. 17 a.

Mittlere Querschnittsgeschwindigkeit des Wassers, nach (19,3). Die äquiskalaren Kurven geben  $\frac{q}{b}$  an.

<sup>1)</sup> Nach Messungen, die von Herrn Direktor Baalsrud an dem Kraftwerk Nore mitgeteilt worden sind.

Tabelle gibt die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit,  $v_m$  m/sec, als Funktion des Gefälles,  $J$ , und der mittleren Tiefe,  $d$ , an:

$$v_m = f(J, d) \quad (19,1)$$

In dieser Form aber ist die Tabelle für unseren Zweck nicht praktisch, denn wir kennen in der Regel die Tiefe  $d$  nicht. Wir müssten dann in der Gleichung

$$d = \frac{q}{v_m \cdot b} \quad (19,2)$$

( $q$  ist die Wasserführung,  $b$  die Breite) zuerst einen wahrscheinlichen Wert der unbekanntenen Geschwindigkeit  $v_m$  einsetzen und nachher durch wiederholtes Anwenden der Gleichung und der Tabelle den richtigen Wert finden. Diesem umständlichen Verfahren entgehen wir bei einer Umrechnung der Tabelle. Aus (19,1) und (19,2) ergibt sich

$$v_m d = \frac{q}{b} = F(J, v_m),$$

$$\text{oder } v_m = G\left(J, \frac{q}{b}\right) \quad (19,3)$$

Die aus (19,3) berechnete Tabelle gibt zusammengehörige Werte von  $q/b$ ,  $J$  und  $v_m$ , und ist in den Abb. 17 a und 17 b graphisch dargestellt. Ihre Anwendung ist die folgende:

- 1) Gegeben sind Gefälle  $J$  m/km, Wasserführung  $q$  m<sup>3</sup>/sec und Breite  $b$  Meter.
- 2) In der Tabelle wird derjenige Zahlenwert aufgesucht, der  $= \frac{q}{b}$  ist, und bei  $J$  m/km wird die entsprechende Geschwindigkeit  $v_m$  abgelesen.

*Zahlenbeispiel:*

$q = 50$  m<sup>3</sup>/sec,  $b = 100$  m,  
 $J = 1,1$  m/km. Für  $q/b = 0,5$   
 und  $J = 1,1$  wird  $v_m = 0,80$  m/sec  
 in der Tabelle gefunden.

Die *Transportzeit* über eine gegebene Strecke wird dann durch Summation gefunden, wobei man auf Änderungen der Breite, des Gefälles und der Wasserführung Rücksicht zu nehmen hat. Ist die Länge einer Sektion  $L$  in m gemessen, die Geschwindigkeit  $v_m$  in m/sec, so wird die Transportzeit in Stunden gemessen:

$$n = \frac{1}{3600} \sum \frac{L}{v_m} \text{ Stunden.} \quad (19,4)$$

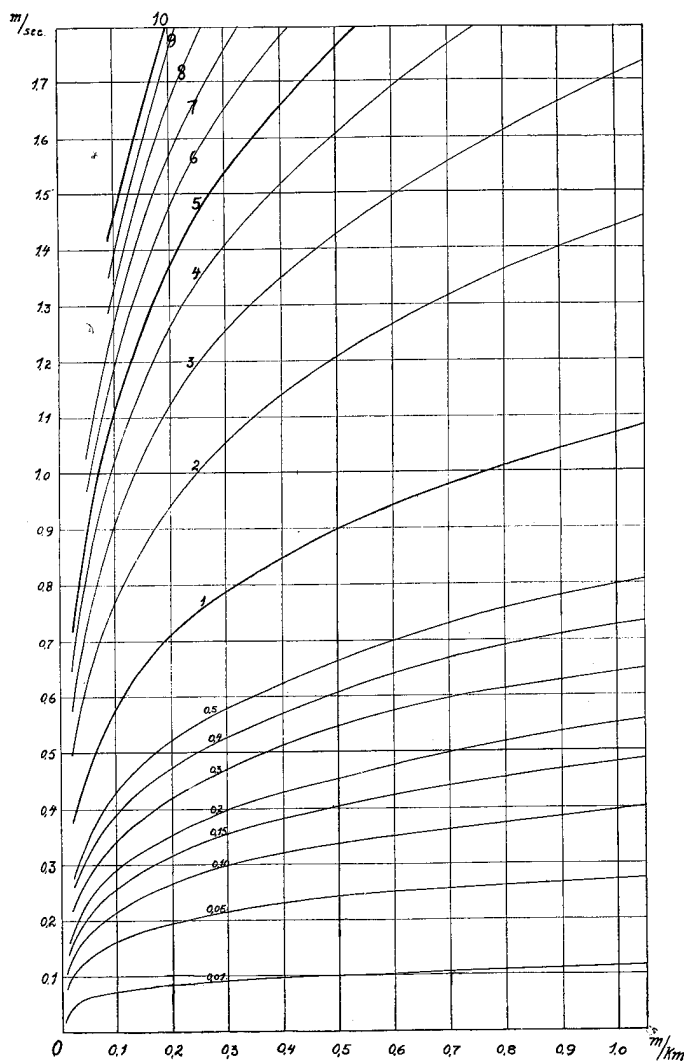


Abb. 17 b.

*Kontrolle der Berechnung.* Bei dem Wasserlauf Nidelven hat der Verfasser am 26. V. 1929 eine direkte Messung der Transportzeit auf der Strecke Hyttefossen—Övre Lerfoss durch eine einfache elektrische Methode gemacht. Zu einem verabredeten Zeitpunkt wurden an Hyttefossen etwa zweihundert Liter konzentrierte Kochsalzlösung ins Wasser geworfen, und der Zeitpunkt der Änderung der Leitfähigkeit bei Övre Lerfoss wurde beobachtet. Die so direkt gemessene Transportzeit stimmte innerhalb 3 % mit der berechneten überein, eine Genauigkeit, die innerhalb der Fehlergrenze liegt, denn die mittlere Breite des Wasserlaufes konnte nur mit beschränkter Genauigkeit angegeben werden. Die berechnete Transportzeit auf der Strecke Hyttefossen—Övre Lerfoss für verschiedene Wasserführungen ist in der Abb. 18 graphisch dargestellt.

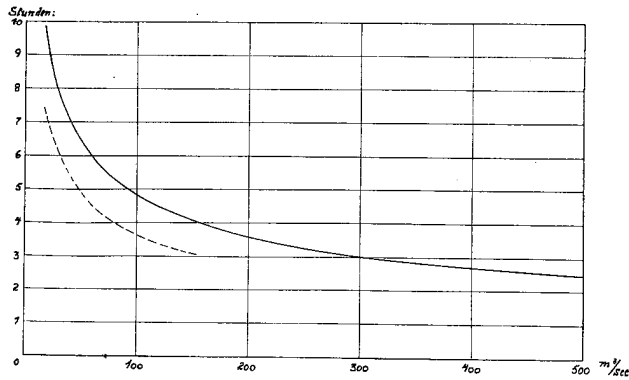


Abb. 18.

Transportzeit des Wassers Hyttefossen—Övre Lerfoss.

phisch dargestellt. Dabei ist die aufgezogene Kurve für den Fall berechnet, dass die ganze Breite vom Wasser bedeckt ist; die gestrichelte aber für den Fall, dass nur die halbe Breite bedeckt ist. Im Winter wird die Kurve der wahrscheinlichen Transportzeit sich der gestrichelten um so mehr nähern, je kleiner die Wasserführung ist.

## 20. Anwendung auf die Glomma.

Im folgenden ist die Flusslänge nach den Längenprofilkarten angegeben, die von Vassdragsvesenet ausgearbeitet worden sind. (Diese Längenkoordinaten sind z. B. auf der Karte der Abb. 7 für die Strecke Bellingmo—Koppang eingetragen.) Von den Profilkarten wurden Strecken mit einigermaßen einheitlichem Gefälle zu Sektionen zusammengefasst, die numeriert wurden. Auf den offiziellen Rektangelkarten wurde dann für jede Sektion die durchschnittliche Breite des Wasserlaufes ausgemessen, nachdem man einige Kontrollmessungen im Felde gemacht hatte (wobei eine Differenz grösser als  $\pm 10\%$  nur selten vorkam). Für jede Sektion wurde dann mittels Anwendung der Tabellen Abb. 17 a u. 17 b eine kleine Tabelle berechnet, welche die Geschwindigkeit bei verschiedenen Wasserführungen enthält; diese Berechnung wurde sowohl für volle als auch für halbe Breite ausgeführt, um dem Einfluss der Eisbildung Rechnung zu tragen, die in der Regel die Breite reduziert. Die Resultate sind in der nachstehenden Tabelle 17 (S. 60) angegeben.

Diese Tabellen wurden auf die Winter 1925—29 angewandt. Dabei wurde die Wasserführung für jede Sektion im Mittel für je 10 Tage berechnet. Die Grundlage hierzu bildeten die Angaben über die Wasserführung bei Stai, Bellingmo und Aursunden, die von Vassdragsvesenet zur Verfügung gestellt wurden. Die Wasserführung der einzelnen Sektion wurde dann unter der Voraussetzung interpoliert, dass sie proportional zum Niederschlagsgebiet ist, und mit Hilfe der Abb. 17 a, b wurden die Transportzeiten für jede Sektion berechnet. Durch Summation wurde dann die mittlere Transportzeit für je 10 Tage für die ganze Strecke gefunden.

Das Resultat dieser Berechnungen für die Winter 1925—29 ist in den graphischen Tabellen der Abb. 19 gegeben. Dabei sind die Transportzeiten Aursunden—Bellingmo und Bellingmo—Stai gesondert angegeben. Die voll ausgezogenen Kurven gelten für die volle Breite, die gestrichelten für die halbe Breite. Man darf voraussetzen, dass die letzte Kurve den Tatsachen dann am besten entsprechen wird, wenn der



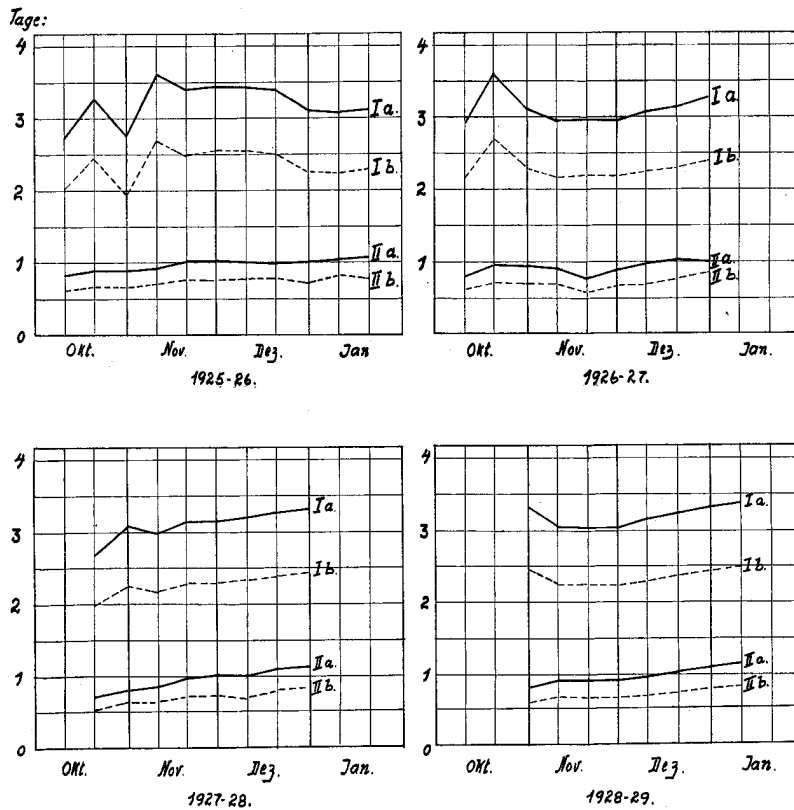


Abb. 19.

Transportzeit des Wassers in der Glomma, in Tagen.

I a Aursunden—Bellingmo. I b bei halber Breite.  
II a Bellingmo—Stai. II b bei halber Breite.

Wasserlauf im Winter eisbedeckt ist und eine stark reduzierte Wasserführung hat. Die wahrscheinlichste Transportzeit würde dann durch eine Kurve wiederzugeben sein, die Anfang Oktober mit der aufgezogenen Kurve zusammenfallen würde, um sich nach und nach der gestrichelten zu nähern, bis diese am Anfang Januar vielleicht erreicht sein würde.

Aus den Kurven Abb. 19 ist ersichtlich, dass die Schwankungen der Transportzeit während der vier untersuchten Winter nicht auffallend gross waren. Im Durchschnitt betrug die Transportzeit auf der Strecke Aursunden—Bellingmo rund 3 Tage und auf der Strecke Bellingmo—Stai rund 1 Tag (1 Tag = 24 Stunden)<sup>1)</sup>.

Die Kenntnis der Transportzeit wird z. B. bei der Berechnung der Abkühlung und der Eisproduktion Anwendung finden.

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, dass bei der Berechnung der Wasserführung der einzelnen Sektionen auf die Transportzeit Rücksicht genommen wurde, was eine entsprechende Verschiebung der Zeitskala nötig macht.

Tabelle 17. Berechnung der Transportzeit des Wassers in der Glomma.

Sektion Nr.	Abstand vom Meer (km)	Länge der Sektion	Gefälle m/km	Breite m	Berechnete Transportzeit in Minuten bei einer Wasser- führung von							
					140 m <sup>3</sup> /sec							
					20	40	60	80	100	120	140	
1	556,1—551,8	4,3	14,4	80	74	55	45	40	35	31	28	Aursunden 556,1 km
				40	55	40	31	26	24	22	20	
2	551,8—548,3	3,5	0,09	90	195	143	124	110	100	93	86	Nyplass 547,7 km
				45	143	110	93	81	75	69	65	
3	548,3—546,9	1,4	2,0	110	38	28	24	21	19	18	17	
				55	28	21	18	16	15	13	12	
4	546,9—536,9	10,0	0,02	104	980	690	570	490	440	420	390	
				52	690	590	420	370	330	315	305	
5	536,9—534,0	2,9	2,6	106	74	54	46	41	37	34	32	
				55	54	41	34	30	28	26	24	
6	534—528	6,0	0,012	108	625	455	420	360	310	295	280	
				54	455	360	295	260	240	225	215	
7	528—527	1,0	2,75	100	25	18	15	14	13	11	10	Røros E.verk 527 km
				50	18	14	11	10	9	9	8	
8	527—525	2,0	3,3	95	46	34	29	26	24	22	20	
				47,5	34	26	22	19	17	16	15	
9	525—521	4,0	1,66	98	110	81	67	61	55	51	48	
				49	81	61	51	45	41	38	36	
10	521—517	4,0	0,19	105	196	148	124	107	97	90	86	
				52,5	148	107	90	80	74	68	64	
11	517—514	3,0	1,89	113	83	63	52	46	42	39	37	
				56,5	63	46	39	35	32	29	27	
12	514—501,5	12,5	6,5	72	240	178	148	132	122	112	105	Tolga bro 506,5 km
				36	178	132	112	96	87	81	75	
13	501,5—500	1,5	3,2	80	33	24	20	18	16	15	14	
				40	24	18	15	14	12	11	10	

14	500 — 491	9,0	1,53	113 56,5	260 200	200 146	265 124	146 110	134 100	124 92	116 85	Tynset jernbanest. 488 km
15	491 — 470,5	20,5	0,08	95 47,5	1 220 900	900 680	760 590	680 520	635 470	590 440	540 415	
16	470,5 — 469,5	1,0	1,35	150 75	34 25	25 19	21 16	19 14	17 13	16 12	15 11	Alvdal jernbanest. 457 km
17	469,5 — 460	9,5	0,07	120 60	630 480	480 370	410 305	370 270	330 245	305 225	285 215	
18	460 — 457,5	2,5	0,34	90 45	100 73	73 54	62 45	54 40	49 39	45 34	42 32	Auma 446,4 km Bellingmo jernbanest. 444 km
19	457,5 — 454,5	3,0	0,87	160 80	120 86	86 65	73 55	65 49	59 44	55 40	52 38	
20	454,5 — 446,5	8,0	0,11	134 67	495 380	380 280	310 235	280 210	255 191	235 176	220 164	Barkald jernbanest. 436 km
21	446,5 — 444	2,5	2,24	140 70	75 55	55 41	46 35	41 31	37 78	35 26	32 24	
22	444 — 441	3,0	1,35	120 60	91 70	70 52	58 44	52 39	47 35	44 32	41 30	Hanestad jernbanest. 416,5 km
23	441 — 434,7	6,3	3,32	103 51,5	155 110	110 84	93 70	84 62	76 57	70 52	66 49	
24	434,7 — 425	9,7	3,75	100 50	230 167	167 124	140 104	124 92	112 84	104 77	97 72	Atna 403,8 km
25	425 — 411,5	13,5	2,14	135 67,5	400 290	290 216	245 185	216 163	198 148	185 138	173 129	
26	411,5 — 404	7,5	3,85	145 72,5	210 149	149 110	127 93	110 83	101 76	93 69	88 64	Bjørånes 391,5 km
27	404 — 400	4,0	3,85	145 72,5	111 80	80 59	67 50	59 45	54 40	50 37	48 35	
28	400 — 385,5	14,5	2,77	190 95	465 350	350 260	295 217	260 192	237 174	217 161	203 152	Sundfloen bei Koppang 377,5 km
29	385,5 — 375	10,5	2,13	200 100	365 275	275 200	277 169	200 150	183 137	169 127	158 118	

## Kap. VII. DIE STATISCHE EISBILDUNG

### 21. Der Zuwachs des Eises bei quasistationärem Wärmestrom.

Wenn die erste zusammenhängende Eisdecke durch Kristallisation der dünnen unterkühlten Oberflächenschicht gebildet ist (vgl. Abschnitt 2 u. 15), so ist der Zuwachs des Eises dem hinausgehenden Wärmestrom äquivalent. Die Temperatur der unteren Grenzfläche des Eises ist konstant  $0^\circ \text{C}$ , und wäre auch die Temperaturfunktion der Eisoberfläche ( $t_e$ ) bekannt, so könnte man nach der Theorie der Wärmeleitung den Wärmestrom als Funktion der Zeit berechnen. Gewöhnlich werden zur Vereinfachung der Berechnung<sup>1)</sup> zwei Voraussetzungen gemacht. Erstens wird angenommen, dass die Änderungen der Temperatur so langsam verlaufen, dass der Wärmestrom zu einer gegebenen Zeit als *stationär* betrachtet werden darf. Für eine homogene Eisschicht ist dann der Temperaturgradient räumlich konstant, und die Berechnung des Zuwachses  $dH$  ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$80 \varrho dH = -l \frac{t_e}{H} dn \quad (21,1)$$

wo  $\varrho =$  Dichte ( $\text{g/cm}^3$ ) des Eises ( $= 0,917$ ),

$l =$  Wärmeleitvermögen ( $\text{cal/cmStunde Grad} = 0,0051 \cdot 3600 = 18,36$ )

$H =$  Eisdicke in cm

$n =$  Zeit in Stunden.

Die Schmelzwärme des Eises ist  $80 \text{ cal/g Grad}$ .

Werden  $\varrho$  und  $l$  als Konstanten angenommen, so wird nach (21,1):

$$-\int_0^n t_e dn = \frac{80 \varrho}{l} \cdot \frac{H^2}{2} = 40 \cdot \frac{\varrho}{l} H^2$$

Bedeutet  $t_e$  das Zeitmittel der Temperatur der Eisoberfläche, so wird nach  $n$  Stunden

$$H^2 = -\frac{l}{40 \varrho} \cdot t_e \cdot n \quad (21,2)$$

Bei  $l = 0,0051 \cdot 3600$  und  $\varrho = 0,917$  wird also

$$H^2 = -0,5 \cdot t_e \cdot n \quad (21,3)$$

Als zweite Voraussetzung wird gewöhnlich die unbekannte Temperatur  $t_e$  der Eisoberfläche gleich der mittleren Lufttemperatur gesetzt. Diese Annahme kann aber, wie im folgenden gezeigt wird, sehr bedeutende Fehler geben und ist demnach ganz unbrauchbar, wenn der Wärmedurchgang durch eine Eisdecke berechnet werden soll.

Wir werden das Problem von einer anderen Seite behandeln. Wir betrachten den gesamten Wärmestrom als den primär gegebenen, der die Temperaturverteilung bestimmt und dessen Äquivalent der Zuwachs des Eises ist. Es müssen also die folgenden zwei Gleichungen bestehen, erstens:

$$S_e = -l \frac{t_e}{H} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,4)$$

und zweitens

$$80 \varrho dH = S_e \cdot dn \quad (n \text{ Stunden}). \quad (21,5)$$

Dabei ist zu bemerken, dass  $S_e$  unter den übrigen Variablen auch  $t_e$  enthält; es ist aber dem Wärmestrom  $S_e$  ein verhältnismässig enger Spielraum gesetzt, und durch die Gleichung (21,4) sind der Oberflächentemperatur entsprechende Grenzen gesetzt: *Bei einem gegebenen*

<sup>1)</sup> Vgl. J. Stefan, Sitz. Ber. d. k. Akad. d. Wiss. 1889, II, S. 473.

Wärmestrom  $S_e$  und einer gegebenen Eisdicke  $H$  kann durch Wärmeleitung nur eine ganz bestimmte Temperaturdifferenz  $t_e$  zwischen Unterfläche und Oberfläche des Eises gehalten werden.

Der gesamte Wärmestrom  $S_e$  ist durch die totale Einstrahlung  $q_m = \frac{Q_m}{d_0}$  (vgl. (9,14))<sup>1)</sup>, die effektive Ausstrahlung  $s_N$  (Gl. (11,12)), die Verdunstung  $s_1$  und die Konvektion  $s_2$  (Gl. (12,37), (12,38)) gegeben, und dazu kommen noch die Wärmezufuhr  $s_b$  von der Flussole und der Umsatz  $s_d$  der potentiellen Energie. Es ist also:

$$S_e = s_N + s_1 + s_2 - (q_m + s_b + s_d) \quad (21,6)$$

$s_b$  und  $s_d$  sind kleine Grössen (vgl. Abschnitt 14 u. 26), und während der Winterzeit ist dies der Fall auch bei  $q_m$ . Wir dürfen demnach die Summe  $\Delta = -(q_m + s_b + s_d)$  als eine Korrektur des Hauptstromes behandeln und werden dieselbe gesondert untersuchen (Abschnitt 26).

Für die Ausstrahlung  $s_N$  wenden wir die Beziehung (11,12) bzw. (11,15) an; nehmen wir dann weiter auf die Verdunstung und Konvektion (nach (12,37) u. (12,38)) Rücksicht, so ist:

$$S_e = cR + 0,38(t_e - t_i) + A_e(f_e - f) + A_2(t_e - t_i) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,7)$$

Dabei kann  $cR = 10,8(1 - 0,09N)$  gemäss (11,16) gesetzt werden.

Der Dampfdruck  $f_e$  des Eises ist eine Funktion der Oberflächentemperatur  $t_e$  des Eises. Der Sättigungsdruck über Eis ist:

Bei 0° C	$f_e = 4,6$ mm Hg	(Ber. 4,60)
—10	1,95	2,05
—20	0,77	0,80
—25	0,47	0,57)

und kann in dem Gebiet 0° bis —25° C durch die folgende Gleichung angenähert dargestellt werden:

$$f_e = \frac{(25 + t_e)^2}{155} + 0,57 = 4,6 + 0,32 \cdot t_e + 0,0065 \cdot t_e^2 \quad (21,8)$$

(Zu bemerken ist, dass bei der Auflösung nach  $t$  die positive Wurzel zu nehmen ist.) Die nach (21,8) berechneten Werte von  $f_e$  werden oben in der Tabelle in der letzten Kolonne gegeben.

Setzen wir  $f_e$  nach Gl. (21,8) in der Gl. (21,7) ein, so wird  $S_e$  als folgende Funktion ausgedrückt:

$$S_e = cR + (0,38 + 0,32 A_e + A_2) t_e + 0,0065 \cdot A_e t_e^2 - (0,38 + A_2) t_i + A_e(4,6 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,9)$$

Man kann auch den Dampfdruck  $f$  der Luft als Funktion der Lufttemperatur analytisch ausdrücken, wenn die relative Feuchtigkeit  $\frac{f}{f_0}$  gegeben ist. Man könnte noch weiter gehen und eine mittlere relative Feuchtigkeit einführen; so sind z. B. während der Wintermonate für das Gebiet Österdalen die Schwankungen der relativen Feuchtigkeit gering, und als Mittelwert kann  $\frac{f}{f_0} = 0,85$  angenommen werden<sup>2)</sup>. Nach der Gl. (21,8) wäre also im Mittel:

$$f = 3,9 + 0,27 \cdot t_e + 0,0055 \cdot t_e^2 \quad (21,10)$$

zu setzen. Es ist aber für die Rechnung bequemer,  $f$  als gemessen anzunehmen und die Gleichung (21,9) beizubehalten.

<sup>1)</sup> Die totale Einstrahlung  $Q_m$  wird gleichmässig auf die hellen Stunden  $d_0$  des Tages verteilt.

<sup>2)</sup> Vgl. die Observationen der Station Rena, Jahrb. d. Norw. Met. Inst. 1927.

Die Konsequenz der Anwendung von Gleichung (21,8) auf den Dampfdruck des Eises ist, dass, streng genommen, nur Eistemperaturen *oberhalb*  $-25^{\circ} C$  für die folgende Berechnung in Betracht kommen. Bei noch tieferen Eistemperaturen, die übrigens nur bei grosser Eisdicke vorkommen können, ist der Dampfdruck annähernd als *konstant* ( $\sim 0,50$  mm) anzunehmen. In allen in praxi vorkommenden Fällen wird dann auch die Lufttemperatur tief sein<sup>1)</sup>. Dabei wird die Verdunstung gegenüber der Ausstrahlung und der Konvektion in praxi zu vernachlässigen sein. Dieser vereinfachte Fall wird in Abschnitt 22 gesondert betrachtet. Mittels Anwendung der Gleichung (21,9), in Verbindung mit der Gleichung (21,4), ergibt sich nach dem Obigen zur Bestimmung der Temperatur  $t_e$  der Eisoberfläche:

$$t_e^2 \cdot C + t_e \cdot \left( D + \frac{l}{H} \right) = -S_{0e} \quad (21,11)$$

wo als Abkürzung gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} C &= 0,0065 \cdot A_e \\ D &= 0,38 + 0,32 A_e + A_2 \\ S_{0e} &= cR + A_e(4,6 - f) - (0,38 + A_2) t_i \end{aligned} \right\} \quad (21,12)$$

Hier sind  $A_e$  und  $A_2$  durch (12,37) und (12,38) bzw. durch (12,42) gegeben. Nach (11,16) ist annähernd  $cR = 10,8$  ( $-0,09 N$ ).

$S_{0e}$  ist (vgl. (21,7)) der *Wärmestrom von nullgradigem Eis* bei den betreffenden meteorologischen Verhältnissen.

Die Lösung der Gleichung (21,11) ist:

$$t_e = \frac{-\left( D + \frac{l}{H} \right) + \sqrt{\left( D + \frac{l}{H} \right)^2 - 4 C S_{0e}}}{2 C} \quad (21,13)$$

und gibt<sup>2)</sup> die *Temperatur der Eisoberfläche* explizite durch die Eisdicke  $H$  und die variablen Parameter  $C$ ,  $D$ ,  $S_{0e}$  ausgedrückt, die durch die meteorologischen Observationen gegeben sind (Gl. (21,12)).

Durch Einsetzen von (21,13) in (21,4) wird dann der *Wärmestrom  $S_e$  von der Oberfläche einer homogenen Eisschicht von der Dicke  $H$  cm:*

$$S_e = \frac{l}{2 CH} \left[ D + \frac{l}{H} - \sqrt{\left( D + \frac{l}{H} \right)^2 - 4 C S_{0e}} \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,14)$$

oder umgeformt:

$$S_e = \frac{l}{2 CH} \left( D + \frac{l}{H} \right) (1 - \sqrt{1 - u}) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$$

was wir weiter auf die folgende Form bringen:

<sup>1)</sup> Dies wird auch der Fall sein, wenn die Lufttemperatur höher ist als die Eistemperatur. In dem Grenzfall bei sehr grossen Werten der Eisdicke  $H$  (vgl. 21,4) nähert sich der ausgehende Wärmestrom Null. Wird dementsprechend in der Gl. (21,7)  $S_e = 0$  angenommen, so wird bei  $t_e = -25^{\circ} C$ ,  $f_e = 0,47$ , die maximale Lufttemperatur bei  $N = 10$  und  $v = 0$  eintreten und zwar etwa  $-16^{\circ} C$ . Eine höhere Lufttemperatur als diese ist mit einer Eistemperatur von  $-25^{\circ} C$  nicht vereinbar. Dieselbe Betrachtung ist übrigens (vgl. Abschnitt 28) ohne weiteres auch für Schneeflächen gültig.

<sup>2)</sup> Wie bei der Gl. (21,8) bemerkt, ist die positive Wurzel zu nehmen.

$$S_e = l \cdot \frac{S_{0e}}{H \left( D + \frac{l}{H} \right)} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-u}} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,15)$$

wo

$$u = \frac{4 CS_{0e}}{\left( D + \frac{l}{H} \right)^2} \quad (21,16)$$

gesetzt worden ist. Die Grösse  $u$  ist immer  $< 1$  in dem Gültigkeitsbereich der Gl. (21,5). In den Fällen, wo  $u$  so klein ist, dass Reihenentwicklung vorteilhaft ist (bei kleinen Eisdicken), ergibt sich, wenn die Glieder von der dritten Potenz ab vernachlässigt werden:

$$S_e = l \cdot \frac{S_{0e}}{H \left( D + \frac{l}{H} \right)} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4} u \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (21,17)$$

oder

$$S_e = l \cdot \frac{S_{0e}}{HD + l} \left( 1 + \frac{1}{4} u \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$$

Sowohl aus der Formel (21,15) als auch aus (21,17) ist ersichtlich, dass der Wärmestrom  $S_e$  in der Hauptsache umgekehrt proportional zur Eisdicke  $H$  ist.

Der *Zuwachs des Eises* wird dann nach der Gl. (21,5) (Zeit  $n$  in Stunden gemessen):

$$dH = \frac{1}{80\varrho} \cdot S_e \, dn \text{ cm} \quad (21,18)$$

Für schrittweise Berechnung ist diese Form bequem anzuwenden, vor allem bei wechselnden meteorologischen Verhältnissen. Ist  $H_m = H_i + \frac{\Delta H}{2}$  der Mittelwert der Eisdicke während des Zuwachses  $\Delta H$ , so ist in dem allgemeinen Falle:

$$H_2 - H_1 = \frac{l}{80\varrho} \sum_{n_1}^{n_2} \frac{S_{0e}}{H_m \left( D + \frac{l}{H_m} \right)} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-u}} \cdot \Delta n \text{ cm} \quad (21,19)$$

bezw.

$$n_2 - n_1 = \frac{80\varrho}{l} \sum_{H_1}^{H_2} \frac{H_m \left( D + \frac{l}{H_m} \right)}{S_{0e}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-u}}{2} \cdot \Delta H \text{ Stunden} \quad (21,20)$$

Der Zuwachs  $H_2 - H_1$  während  $n_2 - n_1$  Stunden ist durch die Formel (21,19), die Zeit  $n_2 - n_1$ , während der ein Zuwachs  $H_2 - H_1$  stattfindet, durch (21,20) gegeben. Für die Fälle, wo die Grösse  $u$  klein ist, kann der Faktor  $\frac{2}{1 + \sqrt{1-u}}$  durch den Faktor  $\left( 1 + \frac{1}{4} u \right)$  ersetzt werden (vgl. (21,15) u. (21,17)). Man verifiziert leicht, dass dies in den meisten Fällen erlaubt sein wird (bei Werten von  $u$  kleiner als 0,3 wird der Fehler 3% nicht überschreiten).

Es ist oben vorausgesetzt, dass die meteorologischen Verhältnisse, die die Parameter  $C$ ,  $D$ ,  $S_{0e}$  nach (21,12) definieren, während des einzelnen Zeitintervalles  $\Delta n$  als konstant betrachtet werden können. Der Wärmestrom wird m. a. W. als *quasistationär* angenommen.

Wenn die Verhältnisse über einen längeren Zeitraum  $n$  als stationär betrachtet werden können, ist es leicht die Integration der Gl. (21,18) durchzuführen.

In dem einfachen Falle der Gl. (21,17) ist nach der Gl. (21,18):

$$(HD + l) dH = \frac{l}{80\varrho} S_{0e} \left( 1 + \frac{1}{4} u \right) dn \quad (21,21)$$

Da  $u$  der Voraussetzung nach eine kleine Grösse ist, genügt es für  $u$  einen konstanten mittleren Wert

$$u_m = \frac{4 C S_{0e}}{\left(D + \frac{l}{H_m}\right)^2}, \text{ wobei } H_m = \frac{H_1 + H_2}{2} \text{ ist,}$$

einsetzen. Die Integration gibt dann, nach  $H_2$  aufgelöst:

$$H_2 = -\frac{l}{D} + \sqrt{\left(H_1 + \frac{l}{D}\right)^2 + \frac{2l}{80 \varrho D} \cdot S_{0e} \left(1 + \frac{1}{4} u_m\right)} \cdot n \quad \text{cm} \quad (21,22)$$

oder nach  $n$  aufgelöst:

$$n = \frac{2(H_2 - H_1) \left(\frac{H_1 + H_2}{2} + \frac{l}{D}\right)}{\frac{2l}{80 \varrho D} \cdot S_{0e} \left(1 + \frac{1}{4} u_m\right)} \text{ Stunden} \quad (21,23)$$

die wir mit Rücksicht auf die Tabellierung auch in folgender Form schreiben können:

$$n = \frac{80 \varrho}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2} (H_1 + H_2) (H_2 - H_1) \left(D + \frac{l}{\frac{1}{2} (H_1 + H_2)}\right)}{S_{0e} \left(1 + \frac{1}{4} u_m\right)} \text{ Stunden} \quad (21,24)$$

Die Formel (21,22) gibt die Eisdicke  $H_2$  die nach  $n$  Stunden erreicht wird, wenn die Eisdicke am Anfang  $H_1$  war. Die Formel (21,23) gibt die Zeit  $n$  (Stunden), in der die Eisdicke von  $H_1$  bis  $H_2$  zunimmt.

In der unten gegebenen Tabelle 18 sind einige Zahlenwerte von  $H$  und  $n$  gemäss der Gl. (21,20) bzw. (21,24) angeführt worden, wobei  $l = 0,0051 \cdot 3600$  und  $\varrho = 0,917$  gesetzt worden ist.

In dem allgemeineren Falle der Gl. (21,18), wenn  $S_e$  durch (21,14) gegeben ist, ergibt sich nach dem Ordnen:

$$\left[ HD + l + \frac{l^2 + 2lDH + (D^2 - 4CS_{0e})H^2}{\sqrt{l^2 + 2lDH + (D^2 - 4CS_{0e})H^2}} \right] dH = \frac{2}{80 \varrho} l S_{0e} dn \quad (21,25)$$

Wird zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} l^2 = a, \quad lD = b, \quad D^2 - 4CS_{0e} = c, \quad \frac{2lS_{0e}}{80 \varrho} = g \\ \sqrt{a + 2bH + cH^2} = W \end{aligned} \right\} \quad (21,26)$$

gesetzt, so ergibt sich bei der Integration:

$$\frac{DH^2}{2} + lH + \int \frac{a + 2bH + cH^2}{W} dH = g \cdot n \quad (21,27)$$

Zur Lösung des Integrals wird nach bekannten Methoden

$$\int \frac{a + 2bH + cH^2}{W} dH = (\alpha_1 H + \alpha_0) W + \beta \int \frac{dH}{W}$$

gesetzt, und die Konstanten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$  und  $\beta$  werden durch Differentiation der Gleichung bestimmt. Wir erhalten

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_0 = \frac{b}{2c} \quad \beta = \frac{ac - b^2}{2c}$$

Also wird die Gl. (21,27) auf die folgende reduziert:



$$\frac{DH^2}{2} + lH + \left(\frac{H}{2} + \frac{b}{2c}\right) W + \frac{ac - b^2}{2c} \int \frac{dH}{W} = gn \tag{21,28}$$

Die allgemeine Lösung wird, für  $c > 0$ :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{DH^2}{2} + lH + \left(\frac{H}{2} + \frac{b}{2c}\right) W + \frac{ac - b^2}{2c\sqrt{c}} \operatorname{lognat}(b + cH + \sqrt{c}W) = gn + \text{Konst.}, \\ &\text{d. h.} \end{aligned} \right. \tag{21,29}$$

$$F(H) = g \cdot n + F(0)$$

Für diejenigen Verhältnisse, wo die Differentialgleichung (21,25) gültig ist, d. h. für Eis-temperaturen  $> -25^\circ \text{C}$ , ist  $c = D^2 - 4CS_{0e}$  immer positiv, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die Gleichung (21,29) umfasst somit das Gebiet  $t_e > -25^\circ \text{C}$ . Für tiefere Temperaturen ist die Verdunstung zu vernachlässigen, und die Berechnung wird vereinfacht (vgl. Abschnitt 22). Wenn die Verdunstung nicht zu vernachlässigen ist, wird die Zeit  $n$  (in Stunden), welche zur Bildung einer Eisdicke  $H$  nötig ist, durch die Gleichung (21,29) gegeben sein. Die Koeffizienten sind aus meteorologischen Observationen nach (21,26) und (21,12) zu berechnen.

Für den praktischen Gebrauch wird es bequemer sein, eine der Formeln (21,19) bis (21,24) zu benutzen. Betreffs typischer Beispiele verweisen wir auf die Tabelle 18.

Tabelle 18.

Zeit  $n$  in Stunden, nach der eine gegebene Eisdicke erreicht wird. Nach (21,20) bzw. (21,24) bei  $H_1 = 0$ . Relative Feuchtigkeit = 85 % und  $p = 750$  mm angenommen<sup>1)</sup>.

N 0-10	v m/sec	t <sub>i</sub> °C	Eisdicke cm									
			2,5	5	10	20	30	50	70	100	130	160
0	0	0	17	36	80	190	330	700	1180	2120	3320	
		-10	10	22	47	112	190	400	680	1200	1870	2680
		-20	7	16	35	81	139	290	480	850	1320	1880
		-30	6	13	28	65	111	230	380	660	1020	1440
	5	0	17	38	95	260	510	1220	2230			
		-10	6	14	35	96	180	430	770	1480	2400	3540
		-20	4	9	23	62	117	270	480	910	1460	2150
		-30	3	7	18	47	88	200	350	640	1020	1490
	10	0	16	38	100	300	580	1440	2660			
		-10	5	12	32	92	185	440	810	1560	2550	3780
		-20	3	8	20	58	111	260	480	930	1510	2230
		-30	2	6	15	43	81	190	340	640	1040	1530
5	0	0	30	64	142	340	580	1240	2110	3800		
		-10	14	29	63	149	260	540	910	1630	2540	3630
		-20	9	19	43	100	170	360	600	1060	1650	2370
		-30	7	15	33	77	130	270	450	800	1230	1750
	5	0	27	61	150	430	820	1970	3590			
		-10	7	16	41	113	214	500	910	1750	2840	
		-20	5	11	26	69	130	300	540	1020	1650	2430
		-30	4	8	19	51	95	215	380	710	1140	1860
	10	0	25	59	156	460	910	2240				
		-10	6	14	36	105	205	500	910	1780	2920	4340
		-20	4	9	22	63	120	290	530	1020	1660	2470
		-30	3	6	16	46	88	206	370	700	1140	1670

(Fortsetzung).

<sup>1)</sup> Die Berechnung ist bis  $t_i = -30^\circ \text{C}$  durchgeführt, also etwas weiter als oben (vgl. S. 64) vorausgesetzt. Ferner wurde bei (21,12) für die Berechnung von  $A_e$  und  $A_s$  zur Vereinfachung  $T = T_i$  gesetzt. Die dadurch bewirkten Fehler sind aber ohne Bedeutung.

Tabelle 18. (Fortsetzung)

N 0—10	v m/sec	t <sub>i</sub> °C	Eisdicke cm										
			2,5	5	10	20	30	50	70	100	130	160	
10	0	0	120	255	570	1 350	2 340						
		—10	21	44	96	230	390	830	1 410	2 530			
		—20	12	25	55	130	220	470	790	1 410	2 190	3 140	
		—30	8	18	43	97	160	340	560	990	1 530	2 180	
	5	0	102	230	580	1 630	3 130						
		—10	9	20	49	136	260	610	1 110	2 140	3 490		
		—20	5	12	29	78	150	340	620	1 170	1 900	2 790	
		—30	4	9	21	57	105	240	430	800	1 280	1 870	
	10	0	55	130	350	1 040	2 060						
		—10	7	16	42	120	240	580	1 080	2 060			
		—20	4	9	24	69	130	320	590	1 130	1 840	2 730	
		—30	3	7	18	50	95	220	400	770	1 250	1 840	

Nach der Formel (21,3),  $n = \frac{H^2}{-0,5 \cdot t}$  erhält man:

t	Eisdicke cm									
	5	10	20	30	50	70	100	130	160	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
—10	5	20	80	180	500	980	2 000	3 380	5 120	Stunden
—20	2,5	10	40	90	250	490	1 000	1 690	2 560	
—30	1,7	6,7	27	60	167	327	667	1 127	1 707	

Die Tabelle 18 ist in vielen Beziehungen interessant. Man sieht z. B., dass eine erhöhte Windgeschwindigkeit nicht ohne weiteres eine beschleunigte Eisbildung zur Folge hat; ob dies eintreten wird, hängt davon ab, ob die Oberflächentemperatur des Eises höher oder niedriger ist als die der Luft. Dies ist wiederum von der Eisdicke und von dem ausgehenden Wärmestrom abhängig. (Über die Berechnung der Oberflächentemperatur des Eises vgl. Abschnitt 23.)

Zum Vergleich mit der allgemein üblichen Berechnung nach der Formel (21,3), in der die Eistemperatur gleich derjenigen der Luft angenommen wird, führen wir in der Tabelle 18 auch die nach (21,3) berechnete Eisdicke auf. Wie man sieht, bewirkt die falsche Voraussetzung die Eistemperatur betreffend sehr bedeutende Fehler, besonders bei kleiner Eisdicke.

## 22. Vereinfachte Berechnung der Eisdicke bei Vernachlässigung der Verdunstung.

In vielen Fällen ist der Wärmestrom der Verdunstung gegenüber demjenigen der Ausstrahlung zu vernachlässigen. In diesem Falle wird der Wärmeverlust (nach 21,7):

$$S_e = cR + D_1(t_e - t_i) \quad (22,1)$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} D_1 &= 0,38 + A_2 \\ &= 0,38 + 0,00183 \cdot T \cdot \sqrt{v + 0,3} \sim 0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Durch Verbindung dieser Gleichung mit den Gl. (21,4) und (21,5) ergibt sich dann für den Zuwachs des Eises:

$$\frac{dH}{dn} = \frac{l(cR - D_1 t_i)}{80 \varrho H \left( D_1 + \frac{l}{H} \right)} \text{ cm/Stunde} \quad (22,2)$$

Bei der Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen  $H_1$  und  $H_2$  und Auflösung nach  $H_2$  ergibt sich:

$$H_2 = -\frac{l}{D_1} + \sqrt{\left( H_1 + \frac{l}{D_1} \right)^2 + \frac{2l}{80 \varrho D_1} (cR - D_1 t_i) n} \text{ cm} \quad (22,3)$$

und bei der Auflösung nach  $n$ :

$$n = \frac{80 \varrho D_1 (H_2 - H_1) \left( \frac{H_1 + H_2}{2} + \frac{l}{D_1} \right)}{l(cR - D_1 t_i)} \text{ Stunden} \quad (22,4)$$

Beim Einsetzen  $l = 0,0051 \cdot 3600$ ,  $\varrho = 0,917$  für Eis, sowie bei der Anwendung der angenäherten Beziehung (11,16) werden die beiden Gleichungen folgendermassen ausgedrückt:

$$H_2 = -\frac{18,3}{D_1} + \sqrt{\left( H_1 + \frac{18,3}{D_1} \right)^2 + \frac{0,508}{D_1} [10,8(1 - 0,09 N) - D_1 t_i] n} \text{ cm} \quad (22,5)$$

bezw.

$$n = \frac{4 D_1 (H_2 - H_1) \left( \frac{H_1 + H_2}{2} + \frac{18,3}{D_1} \right)}{10,8(1 - 0,09 N) - D_1 t_i} \text{ Stunden} \quad (22,6)$$

Es muss aber auch untersucht werden in welchen Fällen es erlaubt ist die Verdunstung zu vernachlässigen. Dies wird in der Regel der Fall sein, wenn die Temperaturdifferenz Eis — Luft klein ist. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Bedingung dafür die folgende ist:

$$-t_i \sim \frac{cR}{l} \cdot H \quad (22,7)$$

(wenn nach der Voraussetzung auch  $f_e - f$  vernachlässigt wird). Setzen wir  $cR = 10,8(1 - 0,09 \cdot N)$  und  $l = 0,0051 \cdot 3600$ , so wird:

$$-t_i \sim 0,6(1 - 0,09 \cdot N) \cdot H \quad (22,8)$$

Lufttemperatur und Eisdicke müssen also folgende Relationen angenähert erfüllen:

$$\begin{array}{ll} \text{Bei } N = 0 & \text{muss } -t_i \sim 0,6 \cdot H \\ N = 5 & -t_i \sim 0,4 \cdot H \\ N = 10 & -t_i \sim 0,15 \cdot H \end{array}$$

Es sei z. B. erwähnt, mit Rücksicht auf die Bedingung der Gl. (21,8), dass bei Lufttemperaturen unterhalb etwa  $-15^\circ \text{C}$  die Verdunstung in der Regel vernachlässigt werden darf, wenn die Eisdicke grösser ist als  $\frac{15}{0,15} = 100$  cm. (Vgl. die Anwendung auf schneebedecktes Eis, Abschnitt 27 u. 28.)

### 23. Die Temperatur der Eisoberfläche.

Gemäss den Gleichungen (21,4) und (21,7) kann die Temperaturdifferenz zwischen Eisoberfläche und Luft folgendermassen ausgedrückt werden:

$$t_e - t_l = \frac{-\frac{t_e}{H} \cdot l - cR - A_e (f_e - f)}{0,38 + A_2} \quad (23,1)$$

Die Differenz ist Null,  $t_e = t_i = t$ , also auch  $f_e = f_0$  (Gl. 21,8), wenn

$$t = -\frac{cR + A_e(f_0 - f)}{l} \cdot H \quad (23,2)$$

Diese Gleichung hätte auch direkt aufgestellt werden können, denn in diesem Falle ist die Konvektion Null, und Ausstrahlung und Verdunstung allein halten den Wärmestrom aufrecht. Die Gleichung (23,2) besagt, dass bei gegebener Eisdicke  $H$  Temperaturgleichgewicht Eis-Luft ein Spezialfall ist, der nur unter bestimmten meteorologischen Bedingungen eintreten kann. *Der Zahlenwert der Gleichgewichtstemperatur ist proportional zur Eisdicke und zur Wärmeabgabe.*

Nach der Einführung der Gleichgewichtstemperatur  $t$  gemäss (23,2) sind die Temperaturverhältnisse leicht zu überblicken:

*Die Temperatur der Eisoberfläche ist  $\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix}$  als die Lufttemperatur, je nachdem die Lufttemperatur bzw. die Eisdicke den folgenden Bedingungen entspricht:*

$$\left. \begin{array}{l} t_i \leq -\frac{cR + A_e(f_0 - f)}{l} H \\ t_i > -\frac{cR + A_e(f_0 - f)}{l} H \\ H \leq \frac{l}{cR + A_e(f_0 - f)} (-t_i) \\ H > \frac{l}{cR + A_e(f_0 - f)} (-t_i) \end{array} \right\} \quad (23,3)$$

Zur Beurteilung der Zahlengrössen sei eingeführt:

$cR = 10,8(0 - 0,09 \cdot N)$  (vgl. (11,16)),  $A_e = 1,23\sqrt{v + 0,3}$  (vgl. (12,42)),  $l = 0,0051 \cdot 3600$  also:

$$H \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{18,3}{10,8(1 - 0,09 \cdot N) + 1,23\sqrt{v + 0,3}(f_0 - f)} \cdot (-t_i) \quad (23,4)$$

Dabei ist  $f_0 - f$  gemäss der Temperatur der Luft anzugeben. Bei  $N = 0, 1, 2, \dots, 10$  wird die Funktion rechts in der Gleichung (23,4) mit  $t_i$  als Abszisse durch Kurven abgebildet, die um so weniger von den Geraden

$$y = \frac{18,3}{10,8(1 - 0,09 N)} (-t_i) \quad (23,5)$$

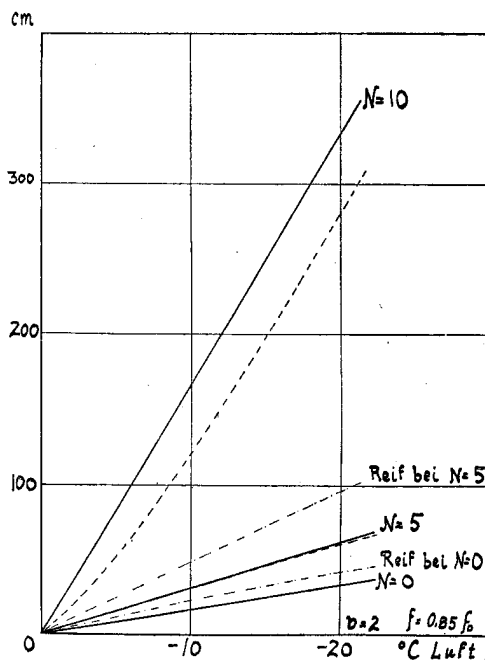


Abb. 20.

abweichen, je höher die relative Feuchtigkeit der Luft ist. Bei gesättigter Luft,  $f_0 = f$ , fallen sie vollständig zusammen.

In der Abbildung 20 sind die Geraden für  $N = 0, 5, 10$  gemäss (23,5) gezeichnet und die Kurven gemäss (23,4) (gestrichelt) für  $N = 0, 5, 10$ ,  $v = 2$  und 85 % relative Feuchtigkeit. *Je nachdem der Punkt  $(H, t)$  oberhalb oder unterhalb der betreffenden Gleichgewichtskurve fällt, ist die Eisoberfläche kälter oder wärmer als die Luft.*

Im ersten Falle wird bei wachsender Eisdicke die Oberflächentemperatur den Taupunkt der Luft erreichen, und Kondensation wird eintreten. Da diese regelmässig zu Reifbildung führt, wird dadurch der ganze Wärmeaustausch wesentlich geändert und nähert sich nach und nach den Verhältnissen bei einer Schneedecke, die wir besonders betrachten werden (Abschnitt 27). In der

Abb. 20 ist beispielsweise die Grenzlinie der Reifbildung, bei 85 % relativer Feuchtigkeit der Luft, und bei  $N=0$  und  $N=5$  gezeichnet worden<sup>1)</sup>.

Auf diese Weise wird die Tatsache erklärt, dass die Eisdecke eines Gewässers hier und da mit Reif bedeckt sein kann, während sie im übrigen ganz blank ist. An den bereiften Stellen ist die Eisdicke eben am grössten, wie z. B. an den Ufern und an Stellen geringer Wassertiefe. Durch die Reifbildung wird die Wärmeabgabe herabgesetzt und der Zuwachs des Eises auf der Unterseite verlangsamt. Die lokalen Unterschiede der Eisdecke (z. B. durch Unterschiede der Wassertemperatur und der Wasserbewegung verursacht) bewirken also eine Modifizierung der Wärmeabgabe, die diesen Unterschieden entgegenwirkt. Dies ist ein Beispiel der *natürlichen Stabilisierung der Eisbildung*, worauf wir auch später zurückkommen werden.

#### 24. Der Temperaturgradient im Eise.

Der Temperaturgradient  $G = \frac{t_e}{H}$  als Funktion der Eisdicke und der meteorologischen Verhältnisse ist nach (21,13) durch die folgende Relation bestimmt:

$$G \cdot H = \left(\frac{t_e}{H}\right) \cdot H = \frac{-\left(D + \frac{l}{H}\right) + \sqrt{\left(D + \frac{l}{H}\right)^2 - 4 CS_{0e}}}{2C} \quad (24,1)$$

In der  $(G, H)$  — Ebene stellt diese Gleichung eine Kurvenschar dar, deren Abweichung von der Hyperbelschar

$$G \cdot H = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4 CS_{0e}}}{2C} \quad (24,2)$$

um so kleiner wird, je grösser die Eisdicke ist. Bequemer ist es, den reziproken Wert  $\frac{1}{G}$  zu betrachten:

$$\left(\frac{1}{G}\right) = -\frac{1}{2S_{0e}} \left[ D + \frac{l}{H} + \sqrt{\left(D + \frac{l}{H}\right)^2 - 4 CS_{0e}} \right] \cdot H \quad (24,3)$$

der in der  $\left(\frac{1}{G}, H\right)$ -Ebene eine Kurvenschar darstellt, deren Abweichung von der Geradenschar

$$\left(\frac{1}{G}\right) = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4 CS_{0e}}}{2S_{0e}} \cdot H \quad (24,4)$$

um so kleiner ist, je grösser die Eisdicke  $H$  ist.

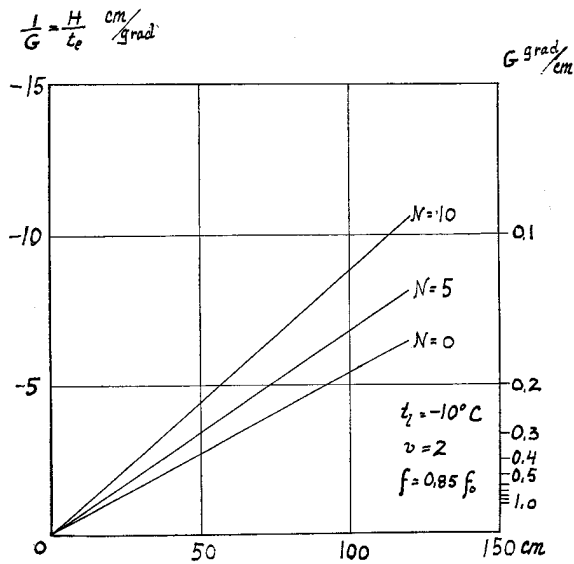
Werden die Parameter  $C, D, S_{0e}$  durch (21,12) ersetzt, so wird nach (24,4) der reziproke Gradient durch die meteorologischen Elemente ausgedrückt.

Zur Beurteilung der Zahlengrössen nehmen wir z. B. die relative Feuchtigkeit = 85 % an.

<sup>1)</sup> Bei  $f = 0,85 f_0$  ist der Taupunkt bei Lufttemperatur

— 1,8° C	0° C
— 6,8	— 5
— 11,8	— 10
— 21,9	— 20

Die Differenz  $t_e - t_l$  ist in erster Annäherung als konstant =  $-1,8$  zu betrachten. Wird dies in der Gl. (23,1) eingesetzt, ergibt sich die entsprechende Bedingungsgleichung der Reifbildung, die eben die erwähnten Grenzlinien darstellt, wenn  $v = 2, N = 0$  und  $N = 5$  gesetzt wird.



In der Abb. 21 sind die Geraden nach (24,4) für  $N=0, 5, 10$  gezeichnet, für den Fall dass  $v=2$  und  $t_e = -10^\circ \text{C}$  ist.

Wenn die *Verdunstung* vernachlässigt werden kann, wird in (21,7)  $f_e = f$  zu setzen sein, und bei Anwendung der Gl. (21,4) findet man  $t_e$ . Es wird dann:

$$\frac{1}{G} = -\frac{D_1 + \frac{l}{H}}{cR - D_1 t_i} \cdot H \quad (24,5)$$

bezw.

$$\frac{1}{G} = -\frac{D_1}{cR - D_1 t_i} \cdot H \quad (24,6)$$

wo  $D_1 = 0,38 + A_2 = 0,38 + 0,5\sqrt{v + 0,3}$  und  $cR = 10,8 (1 - 0,09 \cdot N)$  gesetzt werden kann.

(Würde man wie oben die Kurven für  $N=0, 5, 10$  und  $v=2$  zeichnen, so würde ein Vergleich mit der Abb. 21 den Einfluss der Verdunstung auf den Temperaturgradienten zeigen.)

## 25. Die Wärmeabgabe einer Eisdecke.

Der Wärmestrom von der Oberfläche einer homogenen Eisschicht von der Dicke  $H$  cm, bei stationären Verhältnissen, ist nach (21,14):

$$S_e = \frac{l}{2CH} \left[ D + \frac{l}{H} - \sqrt{\left( D + \frac{l}{H} \right)^2 - 4CS_{0e}} \right] \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (25,1)$$

dessen Grösse um so weniger von dem Werte

$$S_e = \frac{l}{2CH} [D - \sqrt{D^2 - 4CS_{0e}}] \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (25,2)$$

abweicht, je grösser die Eisdicke ist.  $C$  und  $D$  sind durch (21,12) gegeben. Besonders wichtig für die Untersuchung des Wärmegleichgewichts eines Wasserlaufes während der Eisbildung ist das *Verhältnis des Wärmestromes von einer Eisoberfläche zu demjenigen einer nullgradigen Wasserfläche* unter denselben meteorologischen Bedingungen. Dieses Verhältnis

$$k = \frac{S_e}{S_{0w}} \quad (25,3)$$

werden wir der Kürze halber als *relativen Wärmestrom* der Eisdecke bezeichnen.

Der Wärmestrom von nullgradigem Wasser ist (vgl. (21,7)):

$$S_{0w} = cR - D_1 t_i + A_w (4,6 - f) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (25,4)$$

wo  $D_1 = 0,38 + A_2 = 0,38 + 0,00183 \cdot T\sqrt{v + 0,3}$ ,  $A_w = 3,02 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3}$

und  $cR = 10,8 (1 - 0,09 \cdot N)$  gesetzt werden kann.  $S_{0w}$  weicht nur wenig von  $S_{0e}$  ab, wie aus (12,35) bis (12,38) folgt:

$$S_{0w} = S_{0e} - 0,41 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} (4,6 - f) \quad (25,5)$$

Der relative Wärmestrom von einer Eisdecke wird nach (25,1) und (25,4):

$$k = \frac{S_e}{S_{0w}} = \frac{l}{2 CHS_{0w}} \left[ D + \frac{l}{H} - \sqrt{\left( D + \frac{l}{H} \right)^2 - 4 CS_{0e}} \right] \quad (25,6)$$

oder bei Anwendung der Form (21,15):

$$k = \frac{S_e}{S_{0w}} = \frac{l}{H \left( D + \frac{l}{H} \right)} \cdot \frac{S_{0e}}{S_{0w}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - u}} \quad (25,7)$$

Dabei ist  $D$  und  $S_{0e}$  durch (21,12),  $u$  durch (21,16) und  $S_{0w}$  durch (25,4) gegeben.

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Quadratwurzel bei denjenigen Verhältnissen immer reell ist, wo die Gleichung (25,1) gültig ist, d. h. für Eistemperaturen  $> -25^\circ \text{C}$  (vgl. 21,8). Für tiefere Temperaturen kann die Verdunstung des Eises vernachlässigt werden (vgl. unten).

Zur Beurteilung der Zahlenwerte ist nach (25,7) die folgende Tabelle 19 a berechnet, wo eine konstante relative Feuchtigkeit der Luft von 85 % angenommen wird. Die Tabelle zeigt, dass der relative Wärmestrom der Eisdecke in erster Linie von der Eisdicke, in zweiter Linie von der Windgeschwindigkeit und nur wenig von der Lufttemperatur und der Bewölkung abhängig ist. Für Überschlagsrechnungen kann man demnach angenähert  $k$  als Funktion der Eisdicke und der Windgeschwindigkeit allein betrachten. Die Abb. 22 gibt eine graphische Darstellung in diesem Falle, die bequem ist für die Diskussion über den wärmeisolierenden Einfluss einer Eisdecke.

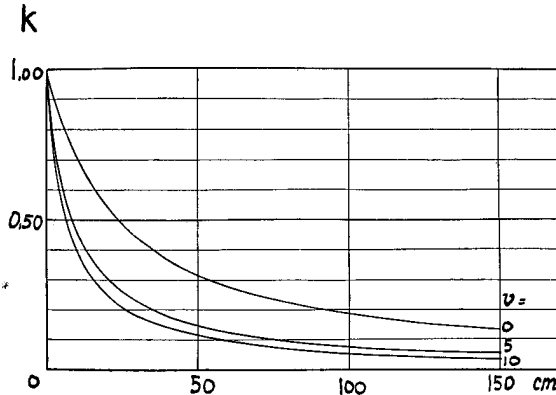


Abb. 22.

Relativer Wärmestrom einer Eisdecke, nach (25,7).

In denjenigen Fällen, wo die Verdunstung vom Eise vernachlässigt werden kann, wird der relative Wärmestrom vom Eise (vgl. (22,1) und (21,4)):

$$k = \frac{l (cR - D_1 t_i)}{S_{0w} \cdot H \left( D_1 + \frac{l}{H} \right)} \quad (25,8)$$

(Als eine wichtige Anwendung dieser Formel vgl. Abschnitt 29.)

Dieselbe Formel kann bei *schneebedecktem* Eis benutzt werden; wir verweisen auf Abschnitt 27 die Einführung der äquivalenten Eisdicke betreffend. Einige Zahlenwerte gibt die Tabelle 19 b.

Tabelle 19 a.

Relativer Wärmestrom  $k = \frac{S_e}{S_{ow}}$  bei einer Eisdicke  $H$  cm, nach der Gl. (25,7). Relative Feuchtigkeit 85 % und  $p = 750$  mm angenommen.

N 0—10	v m/sec	t <sub>i</sub> °C	H cm						
			2,5	5	10	20	50	100	150
0	0	— 0	0,91	0,83	0,70	0,53	0,32	0,19	0,14
		—10	0,91	0,83	0,71	0,54	0,32	0,20	0,15
		—20	0,92	0,85	0,71	0,55	0,33	0,21	0,16
		—30	0,93	0,86	0,71	0,56	0,35	0,22	0,17
	5	— 0	0,78	0,62	0,45	0,29	0,14	0,08	0,05
		—10	0,78	0,63	0,47	0,31	0,15	0,08	0,06
		—20	0,79	0,64	0,49	0,33	0,17	0,09	0,07
		—30	0,79	0,66	0,50	0,34	0,18	0,10	0,08
	10	— 0	0,74	0,56	0,38	0,23	0,11	0,06	0,04
		—10	0,76	0,58	0,40	0,25	0,12	0,06	0,04
		—20	0,78	0,59	0,42	0,27	0,13	0,07	0,05
		—30	0,80	0,60	0,44	0,29	0,14	0,08	0,06
10	0	— 0	0,93	0,83	0,71	0,54	0,31	0,18	0,13
		—10	0,93	0,84	0,71	0,54	0,32	0,19	0,14
		—20	0,93	0,86	0,72	0,55	0,33	0,20	0,15
		—30	0,94	0,87	0,72	0,56	0,34	0,21	0,16
	5	— 0	0,80	0,64	0,47	0,30	0,14	0,08	0,06
		—10	0,78	0,64	0,47	0,31	0,15	0,08	0,06
		—20	0,78	0,65	0,48	0,32	0,16	0,09	0,07
		—30	0,78	0,66	0,49	0,33	0,17	0,10	0,07
	10	— 0	0,77	0,59	0,41	0,25	0,11	0,06	0,04
		—10	0,77	0,59	0,41	0,26	0,12	0,06	0,05
		—20	0,78	0,60	0,42	0,27	0,13	0,07	0,06
		—30	0,79	0,60	0,43	0,29	0,14	0,08	0,06

Ausgeglichene Werte:

v =	0	0,90	0,84	0,71	0,54	0,32	0,19	0,14
	5	0,80	0,63	0,47	0,31	0,15	0,08	0,06
	10	0,78	0,59	0,41	0,25	0,12	0,06	0,04
	H =	2,5	5	10	20	50	100	150



Tabelle 19 b.

Relativer Wärmestrom  $k = \frac{S_e}{S_{0w}}$ , bei Vernachlässigung der Verdunstung nach Gl. (25,8) und bei gegebener äquivalenter Eisdicke  $H$  cm. (Vgl. Abschnitt 27.)

N 0—10	v m/sec	t <sub>i</sub> °C	H cm	
			1 000	10 000
0	0	—20	0,016	0,0016
		—30	0,021	0,0021
	5	—20	0,008	0,0008
		—30	0,010	0,0010
	10	—20	0,005	0,0005
		—30	0,007	0,0007
10	0	—20	0,021	0,0021
		—30	0,026	0,0026
	5	—20	0,008	0,0008
		—30	0,010	0,0010
	10	—20	0,006	0,0006
		—30	0,008	0,0008

### 26. Korrektur wegen Einstrahlung, Wärmezufuhr vom Boden und Umsatz der potentiellen Energie.

Bei der oben im Abschnitt 21 gegebenen Berechnung der Eisdicke sind nur die Hauptfaktoren der Wärmeabgabe berücksichtigt worden. Wir werden jetzt das Korrektionsglied

$$q_m + s_b + s_a$$

der Gl. (21,6) behandeln.

Während der hellen Tagesstunden  $d_0$  ist der mittlere Wärmestrom der totalen Einstrahlung,  $q_m = \frac{Q_m}{d_0}$ , durch die Gleichung (9,14) bzw. die Tabelle 11 für Österdalen gegeben. Die Absorption dieser Strahlung ist am stärksten in den oberen Schichten der Eisdecke, wie die folgende Übersicht zeigt:

Durch Eis von der Dicke 1 cm werden 27 % absorbiert (K = 0,27)	
» » » » » 10 » » 45	0,45
» » » » » 50 » » 60	0,60
» » » » » 100 » » 70	0,70

Ein gewisser Anteil  $K \cdot Q_m$  wird daher in erster Annäherung in der Oberfläche absorbiert und darf als eine Reduktion der Ausstrahlung betrachtet werden. Der entsprechende mittlere Wärmestrom während der hellen Tagesstunden ist  $= \frac{K \cdot Q_m}{d_0}$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde. Wenden wir dann die vereinfachte Formel (22,2) an, so wird die Korrektur wegen absorbierten Lichtes (Differentiation der Gl. (22,2) mit Bezug auf  $cR$ ) während der hellen Stunden, d. h. während eines ganzen Tages:

$$\Delta_1 = -\frac{1}{80 \varrho} \frac{l}{H \left( D_1 + \frac{l}{H} \right)} \cdot K Q_m \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,1)$$

Bei Einführung der Zahlenwerte

$$l = 0,0051 \cdot 3600, \rho = 0,917, D_1 = 0,38 + A_2 = 0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3} \quad (\text{Gl. 22,1})$$

ergibt sich:

$$\Delta_1 = \frac{-0,25 K \cdot Q_m}{18,3 + (0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3}) H} \text{ cm Eis/Tag}$$

Zur Beurteilung der Grössenordnung sei  $Q_m = 50 \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag}$ ,  $v = 1$ ,  $H = 10 \text{ cm}$ , also  $K = 0,45$ . Dann wird  $\Delta_1 = 0,20 \text{ cm/Tag}$ .

Der Rest der totalen Einstrahlung, der durch das Wasser (unter Absorption) weiter geht, wird bei einer ruhenden Wassermasse die Eisbildung nicht merklich beeinflussen. Alle störenden Strömungen sind ja durch die schützende feste Eiskecke stark herabgesetzt, und die anderen Ausgleichprozesse verlaufen langsam. Bei vollständiger Mischung des Wassers dagegen wird der Rest,  $(1 - K) \cdot Q_m$ , die Eisbildung direkt verringern. Dieser Anteil wird die folgende Korrektur bewirken:

$$\Delta_2 = - \frac{(1 - K) Q_m}{80 \rho} \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,2)$$

Als Zahlenbeispiel ergibt sich bei  $K = 0,45$ ,  $Q_m = 50 \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag}$  (vgl. oben),  $\Delta_2 = -0,38 \text{ cm/Tag}$ .

Die gesamte Korrektur der Eisbildung infolge der Einstrahlung am Tage ist somit für eine ruhende Wassermasse durch  $\Delta_1$  und für eine strömende Wassermasse bei vollständiger Mischung durch  $\Delta_1 + \Delta_2$  (nach (26,1) und (26,2) gegeben.

Bei langsamer Bewegung des Wassers und unvollständiger Mischung ist ein Zwischenwert zu erwarten.

Die Wärmezufuhr vom Boden =  $s_b \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  wird bei vollständiger Mischung des Wassers die Korrektur

$$\Delta_3 = - \frac{24 \cdot s_b}{80 \rho} \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,3)$$

bewirken. Zur Beurteilung der Grössenordnung sei für Österdalen  $24 \cdot s_b = 5 \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag}$  (vgl. Abschnitt 14) angenommen, wobei  $\Delta_3 = -0,07 \text{ cm/Tag}$ .

Der Umsatz der potentiellen Energie des Wassers würde bei einer Fallhöhe von  $h$  m die Wassertemperatur um  $h/427^\circ \text{ C}$  erhöhen, wenn die ganze Wärmemenge vom Wasser aufgenommen würde. Es ist hier bequem, den äquivalenten Wärmestrom  $s_a \text{ pro cm}^2 \text{ der Oberfläche}$  einzuführen.

Es seien  $L$  bzw.  $b$  Länge und Breite (in m),  $h$  die Fallhöhe (in m),  $v$  die mittlere Geschwindigkeit (m/sec). Die Wassermenge  $10^6 q$  Gramm wird pro Stunde die Fallhöhe  $3600 \cdot \frac{v}{L} \cdot h$  passieren, also  $10^6 q \cdot 3600 \frac{v}{L} \frac{h}{427} \text{ cal/Stunde}$  empfangen. Dies entspricht einem Wärmestrom durch die von  $q$  bedeckte Fläche  $10^4 b v \text{ cm}^2$  von der Grösse:

$$\begin{aligned} s_a &= \frac{0,36}{427} \cdot 10^6 \frac{q}{b} \left( \frac{h}{L} \right) \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \\ &= \frac{0,36}{427} \frac{q h}{10^{-6} F} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \end{aligned} \quad (26,4)$$

Es wird z. B. ein Gefälle von  $\frac{h}{L} = 0,001$  bei  $q = 50 \text{ m}^3/\text{sec}$ ,  $b = 100 \text{ m}$  einem Wärmestrom von  $s_a = 0,42 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  entsprechen.

Die entsprechende Verringerung der Eisbildung wird dann

$$\Delta_4 = - \frac{24}{80 \rho} \cdot s_a = - 276 \frac{q h}{b \cdot L} \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,5)$$

(Zahlenbeispiel:  $s_d = 0,42$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde gibt  $\Delta_4 = -0,12$  cm/Tag.) Diese Korrektur wird nur eine Rolle spielen, wenn das Gefälle entweder gross oder der Wärmeverlust sehr klein ist, was z. B. der Fall bei schneebedecktem Eis ist. Wir werden diesen Fall später gesondert betrachten.

Insgesamt ist also die Korrektur der berechneten Eisdicke in dem Falle, in dem *vollständige Mischung* des strömenden Wassers stattfindet, folgende:

$$\Delta = -\frac{24}{80 \varrho} \left[ \frac{18,3 K \cdot Q_m}{24 [18,3 + (0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3}) H]} + \frac{(1 - K) Q_m}{24} + s_b + s_d \right] \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,6)$$

Bei ganz *ruhigem Wasser* ist die Korrektur

$$\Delta_1 = \frac{-0,25 K Q_m}{18,3 + (0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3}) H} \text{ cm Eis/Tag} \quad (26,7)$$

Für die Berechnungen der Abschnitte 23, 24 og 25 ist die entsprechende Korrektur, d.h.  $80 \cdot \varrho \cdot \Delta$ , auf den Wärmestrom  $S_e$  anzubringen. Es erübrigt sich, dies hier im einzelnen durchzuführen. Wir werden gelegentlich die Korrektur in solchen Fällen anwenden, wo sie von praktischer Bedeutung ist.

### 27. Der Wärmetransport durch schneebedecktes Eis.

Das Wärmeleitvermögen, das für homogenes Eis  $l_e = 3600 \cdot 0,0051 = 18,3$  cal/cmStundeGrad ist, wird bei einer Mischung von Luft und Eis, wie der Schnee es ist, sehr stark reduziert. Die Abhängigkeit von der Dichte  $\varrho$  des Schnees kann nach A b e l s<sup>1)</sup> in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$l_s = 3600 \cdot 0,0067 \cdot \varrho^2 = 24,1 \varrho^2 \text{ cal/cmStundeGrad} \quad (27,1)$$

Die Dichte  $\varrho$  schwankt im allgemeinen zwischen 0,08 und 0,25 g/cm<sup>3</sup>. Nach H a n n<sup>2)</sup> kann man im Durchschnitt für frisch gefallenen Schnee  $\varrho = 0,1$  g/cm<sup>3</sup> setzen, mithin ist dann

$$l_s = 3600 \cdot 0,000067 = 0,241 \text{ cal/cmStundeGrad,}$$

d. h. etwa  $\frac{1}{75}$  vom Wärmeleitvermögen des Eises. Für alten Schnee,  $\varrho = 0,25$ , wird die Verhältniszahl  $\frac{1}{12}$ .

Ein stationärer Wärmestrom vom Wasser (von 0° C) durch eine Eisschicht von  $H$  cm und eine Schneedecke von  $h$  cm (Abb. 23) ist

Abb. 23.

$$S_e = -l_e \frac{t_e}{H} = l_s \frac{t_e - t_s}{h} \quad (27,2)$$

d. h.

$$\frac{-\frac{t_e}{H}}{t_e - t_s} = \frac{l_s}{l_e} \quad (27,3)$$

Das Temperaturgefälle ist m. a. W. dem Wärmeleitvermögen umgekehrt proportional. Ist demnach die Dicke der Schneedecke von derselben Grössenordnung wie die Dicke des Eises, so findet sich fast der ganze Temperaturfall innerhalb der Schneedecke. Die Temperatur der Eisoberfläche wird sehr wenig von Null abweichen. (Es ist ja auch

<sup>1)</sup> Vgl. Wild, Rep. f. Met. Bd. XV, Nr. 2, 1892.

<sup>2)</sup> l. c., S. 327.

allgemein bekannt, dass Wasser sich leicht auf einer schneebedeckten Eisfläche ausbreiten kann, in den unteren Schichten der Schneedecke, und selbst bei starker Kälte wird es lange dauern können bis es friert.)

Unter stationären Verhältnissen kann der Wärmestrom  $S_e$  in der folgenden Weise ausgedrückt werden, was dem Ohmschen Gesetz für den elektrischen Strom durch zwei in Serie gekoppelte Widerstände analog ist:

$$S_e = \frac{-t_e}{\frac{H}{l_e}} = \frac{t_e - t_s}{\frac{h}{l_s}} = \frac{-t_s}{\frac{H}{l_e} + \frac{h}{l_s}} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} = \frac{-t_s \cdot l_e}{H + \frac{l_e}{l_s} h} \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde} \quad (27,4)$$

Hier ist  $\frac{l_e}{l_s} h$  die Dicke einer Eisschicht, die in Bezug auf Wärmeleitung die Schneedecke  $h$  ersetzen kann. Wir werden daher die Grösse

$$H + \frac{l_e}{l_s} \cdot h \quad (27,5)$$

als die «äquivalente Eisschicht» bezeichnen.

Durch die Einführung dieser Bezeichnung erreichen wir, dass alle Berechnungen, die in den früheren Abschnitten über die Eisbildung gemacht worden sind, auch für schneebedecktes Eis gültig sind, wenn anstatt der Eisdicke  $H$  die äquivalente Eisdicke  $H + \frac{l_e}{l_s}$  eingeführt wird.

Es muss nur bemerkt werden, dass an Stelle der Konstanten  $A_e$  und  $A_2$  bei dem festen Eise jetzt die Konstanten  $A_1$  und  $A_2$ , der Schneedecke treten, die durch die Gl. (12,39) (12,40) bzw. (12,43) gegeben sind. Nach wie vor aber ist für  $l$  das Wärmeleitvermögen des festen Eises einzusetzen.

Wie oben angeführt ist 1 cm frischgefallener Schnee zu etwa 75 cm Eis äquivalent. In den weitaus meisten Fällen wird es daher erlaubt sein, diejenigen Formen der Gleichungen zu benutzen, die für grosse Eisdicke gelten. So wird auch in den meisten Fällen die Verdunstung von der Schneeoberfläche eine untergeordnete Rolle spielen.

Als Beispiel werden wir annehmen, dass eine Eisdecke von  $H = 10$  cm von 2 cm Schnee ( $\rho = 0,1 \text{ g/cm}^3$ ) bedeckt ist. Die äquivalente Eisdicke ist dann  $10 + 150 = 160$  cm. Bei den meteorologischen Verhältnissen  $t_i = -20^\circ \text{ C}$ ,  $N = 5$ ,  $v = 1 \text{ m/sec}$  wird dann nach der Gl. (21,18):

$$\frac{dH}{dn} = 0,019 \text{ cm Eis/Stunde}$$

Ohne die Schneedecke wäre der Zuwachs in diesem Falle nach Gl. (21,18):  $\frac{dH}{dn} = 0,24$  cm Eis/Stunde, also 13 mal grösser.

Besonders wichtig ist der relative Wärmestrom einer Schneedecke, d. h. das Verhältnis des Wärmestromes von der Schneedecke zu dem von nullgradigem Wasser unter denselben meteorologischen Bedingungen. Die Resultate, die in dem Abschnitt 25 enthalten sind, haben auch für schneebedecktes Eis Gültigkeit, wenn anstatt  $H$  die äquivalente Eisdicke benutzt wird, und wenn  $A_e$  bzw.  $A_2$  durch  $A_1$  bzw.  $A_2$  ersetzt werden. Betreffs einiger Zahlenwerte verweisen wir auf die Tabelle 19 b.

Beispielsweise sieht man aus der Abb. 22, die in der Hauptsache auch für schneebedecktes Eis gültig ist, dass eine äquivalente Eisdicke von  $10 + 75 = 85$  cm, welche einer Schneedecke von 1 cm auf 10 cm Eis entspricht, einen relativen Wärmestrom von 10 bis 20 % hat, je nach der Windgeschwindigkeit. Bei grösseren Schneedecken wird der relative Wärmestrom so gering, wie man aus der Tabelle 19 b oder aus der Formel

(25,6) sieht, dass die Abkühlung des Wasserlaufes hauptsächlich an den Stellen stattfindet, an denen das Wasser infolge von starker Bewegung noch offen ist. Wir werden auch darauf später zurückkommen (Abschnitt 29).

Oben haben wir auf die totale Einstrahlung am Tage keine Rücksicht genommen. Der Schnee reflektiert etwa 70 % der einfallenden totalen Lichtstrahlung, gegenüber homogenem Eis, das z. B. von der diffusen Strahlung (die bei mittlerer Bewölkung den Hauptteil ausmacht) etwa 10 % reflektiert (vgl. Abschnitt 5 u. 7). Der Rest wird zum größten Teil in den oberen Schneeschichten zerstreut und absorbiert.

Die Korrektur wegen Einstrahlung auf den Zuwachs des Eises unterhalb der Schneedecke ist demnach *kleiner* als die Korrektur  $\Delta_1$ , die nach der Gleichung (26,1) berechnet wird, wenn  $H$  äquivalente Eisdicke bedeutet. Aus dieser Gleichung sieht man sofort, dass die Korrektur wegen Einstrahlung am Tage ganz unmerkbar wird, wenn die Schneedecke eine Dicke von 10—20 cm oder mehr hat.

Anders liegt aber der Fall bei der Wärmezufuhr vom Boden und durch Umsatz der potentiellen Energie, was um so grössere Bedeutung erhält, je mehr der ausgehende Wärmestrom durch eine Schneedecke herabgesetzt wird. Wir werden die diesbezüglichen Verhältnisse gesondert im Abschnitt 29 behandeln.

## 28. Die Oberflächentemperatur einer Schneedecke.

Wenn die äquivalente Eisdicke einer schneebedeckten Eisschicht  $H$  ist, vgl. (27,5), so ist die Temperatur  $t_s$  der Schneeoberfläche nach der Gl. (23,1) folgenderweise bestimmt:

$$t_s = t_l - \frac{t_s l + cR + A_s(f_s - f)}{0,38 + A_{2s}} \quad (28,1)$$

$$\text{wo } A_s = 14 \frac{T}{p} \sqrt{v + 0,3} \sim 5,0 \sqrt{v + 0,3} \quad (\text{Gl. (12,39) u. (12,43)})$$

$$A_{2s} = 0,007 \cdot T \sqrt{v + 0,3} \sim 2,0 \sqrt{v + 0,3} \quad (\text{Gl. (12,40) u. (12,43)})$$

$$l = 0,0051 \cdot 3600$$

$$cR = 10,8 (1 - 0,09 \cdot N) \quad (\text{Gl. (11,16)})$$

Die tiefste Temperatur  $t_{min}$  ergibt sich, wenn  $H$  so gross ist, dass der Wärmestrom sich Null nähert. In diesem Falle wird die Ausstrahlung + Verdunstung durch den Austausch kompensiert. (Von der Eisschicht können wir dann ganz absehen und eine beliebige Schneefläche betrachten.)

Wenn die Minimumtemperatur unter den Taupunkt der Luft sinkt, tritt Kondensation bzw. Reifbildung ein, welche einer weiteren Abnahme entgegenwirkt. Dem ist in der Gleichung (28,1) Rechnung getragen, denn dann wird das Glied  $A_s(f_s - f)$  negativ. Immerhin aber ist dieses Glied bei einigermassen tiefen Temperaturen klein im Verhältnis zur Ausstrahlung. Wenn wir es vernachlässigen, würden wir demnach zur Bestimmung der Minimumtemperatur die Beziehung

$$t_{min} = t_l - \frac{cR}{0,38 + A_{2s}} \quad (28,2)$$

haben.

Diese Gleichung haben wir schon früher benutzt um die Konstante  $C_1'$  für eine Schneefläche zu bestimmen (vgl. Gl. (12,32)).

### 29. Das Gleichgewicht bei statischer Eisbildung.

Der von einer Eisdecke ausgehende Wärmestrom wird allmählich abnehmen, wenn die Eisdicke wächst. Wie unten gezeigt werden soll, wird die maximale Eisdicke, d. h. diejenige Eisdicke, bei der der gesamte Wärmestrom Null ist, unter gewöhnlichen Winterverhältnissen nicht erreicht, wenn das Eis schneefrei ist. Wenn das Eis aber mit Schnee bedeckt wird, ist das Eintreten des Gleichgewichts regelmässig die Folge, wenn vollständige Mischung des Wassers stattfindet. Wenn das Gleichgewicht erreicht ist, wird der Wärmeverlust von der Oberfläche durch die Wärmezufuhr (Einstrahlung, Wärmeleitung vom Boden, Umsatz der potentiellen Energie) vollständig ersetzt. Bei der Anwendung der «äquivalenten Eisdicke» können wir dann die maximale Eisdicke summarisch berechnen, wenn wir als Bedingung des Gleichgewichts setzen, dass der Zuwachs des Eises wegen Wärmeverlust der Korrektur wegen Wärmezufuhr gleich ist. Der Zuwachs des Eises  $\Delta H$  ist gemäss (22,2) pro Tag gerechnet:

$$\Delta H = \frac{24}{80g} \cdot \frac{l(cR - D_1 t_i)}{H \left( D_1 + \frac{l}{H} \right)} \text{ cm Eis/Tag} \quad (29,1)$$

Wenn wir *vollständige Mischung* voraussetzen, wird dann die Bedingung des Gleichgewichts

$$\Delta H = -\Delta \quad (29,2)$$

wo  $\Delta$  durch (26,6) gegeben ist. Beim Erreichen der maximalen Eisdicke darf man annehmen, dass die Einstrahlung in der Eisschicht vollständig absorbiert wird, wonach  $K=1$  zu setzen ist. Nach Reduktion wird dann die maximale Eisdicke (bzw. maximale äquivalente Eisdicke) durch folgende Gleichung gegeben sein:

$$H_{max} = \frac{l}{D_1} \frac{cR - D_1 t_i - \frac{Q_m}{24} - s_b - s_a}{s_b + s_a} \text{ cm} \quad (29,3)$$

wo  $D_1 = 0,38 + A_2$ . Bei Berücksichtigung der Werte von  $A_2$  bzw.  $A_2$ , gemäss (12,38) bis (12,43) wird

$$D_1 = 0,38 + 0,00183 T \sqrt{v + 0,3} \sim 0,38 + 0,5 \sqrt{v + 0,3} \text{ für Eisfläche}$$

$$D_1 = 0,38 + 0,007 \cdot T \sqrt{v + 0,3} \sim 0,38 + 2,0 \sqrt{v + 0,3} \text{ für Schneefläche.}$$

Aus diesem Ausdruck ist durch Einsetzen passender Werte von  $N$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $Q_m$ ,  $s_b$  und  $s_a$  leicht festzustellen, dass während eines normalen Winters in unseren Breiten die maximale Eisdicke so gross sein wird, dass sie bei festem Eis nicht erreicht wird. *Nur wenn das Eis mit Schnee bedeckt ist, wird das thermische Gleichgewicht erreicht*, wenn die meteorologischen Verhältnisse stationär sind. In diesem Falle wird der Umsatz der potentiellen Energie eine wesentliche Rolle spielen, wie die Formel (29,3) zeigt, und an einem Beispiel werden wir zeigen, dass wichtige Konsequenzen für die Verschiebung des Gleichgewichts auch gezogen werden können.

Es seien z. B. die folgenden Daten gegeben:

- I.  $N=0$ ,  $t_i = -10^\circ \text{ C}$ ,  $v=1$ ,  $Q_m = 90 \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag}$ ,  $q = 50 \text{ m}^3/\text{sec}$ ,  $b = 100 \text{ m}$ ,  $s_b = 0,2 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$ , Gefälle  $h/L = 0,001$ , dementsprechend  $s_a = 0,42 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  gemäss (26,4).
- II. Wie I, jedoch mit Gefälle  $0,003$  und  $s_a = 1,26 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$ . In Fall I wird gemäss (29,3) die maximale Eisdicke  $500 \text{ cm}$ , in Fall II dagegen  $210 \text{ cm}$ . Die maximale äquivalente Eisdicke bei schneebedecktem Eis wird in Fall I  $360 \text{ cm}$ , in Fall II  $150 \text{ cm}$ , was leicht erreicht wird, wenn die Schneehöhe wächst. Ist diese Höhe  $h$  und das Wärmeleitvermögen  $l_s$ , so ist bei dem Gleichgewicht, wenn wir  $\frac{l_e}{l_s} = \frac{1}{50}$  annehmen:

In Fall I:

$$H + \frac{l_c}{l_s} \cdot h_1 = 360, \text{ d. h. } h_1 = 7,2 - \frac{H}{50}$$

und in Fall II:

$$H + \frac{l_c}{l_s} \cdot h_2 = 150, \text{ d. h. } h_2 = 3,0 - \frac{H}{50}$$

Wenn also 1 cm Schnee mit 50 cm Eis äquivalent ist, so genügt z. B. bei  $H = 25$  cm Eisdicke eine Schneedicke von 6,7 cm (Fall I) bzw. 3,0 cm (Fall II), um den Zuwachs des Eises zum Aufhören zu bringen. Wenn dann mehr Schnee als 6,7 bzw. 3,0 cm fallen würde, so muss die Wärmezufuhr von unten einen Überschuss geben, und das feste Eis wird von unten abschmelzen. Dies wird in Fall II eher eintreten als in Fall I, und man wird daher schliessen können: *Bei einem Schneefall wird eine früher gebildete Eisdecke auf den Strecken abschmelzen können, wo das Gefälle am grössten ist.* Die dynamische Wärmezufuhr wird dort am grössten sein, wo die Wasserführung pro Querschnittseinheit am grössten ist (vgl. Gl. (26,4)), d. h. an den Stellen, wo die grösste Wassergeschwindigkeit vorkommt, wird der Wasserlauf aufgehen. Es ist ja auch eine bekannte Erfahrung, dass sich an einem Wasserlauf, welcher anfänglich mit solidem Eis bedeckt war, nach einem Schneefall langgestreckte offene Wasserflächen bilden werden, und zwar an den Stellen, wo die grösste Geschwindigkeit bzw. die grösste Tiefe des Wasserlaufes ist.

Die Existenz der offenen Wasserstrecken, ob sie nun schon vor dem Schneefall da waren oder nach demselben gebildet sind, ist, wie Ekwall betont, für das Wärme Gleichgewicht des Wasserlaufes von grosser Bedeutung<sup>1)</sup>. Eine Schneedecke setzt den gesamten Wärmestrom von der Oberfläche auf einen kleinen Bruchteil herab, wie die Berechnung in Abschnitt 27 es zeigt, und die hauptsächlich Wärmeabgabe wird von den offenen Strecken stattfinden. Dementsprechend wird die Fläche dieser offenen Strecken sich dem jeweiligen Zustand anpassen und an Grösse variieren, je nachdem das Verhältnis zwischen Wärmeabgabe und Wasserzufuhr wechseln wird.

Der Grössenordnung nach kann man das offene Areal mittels der erwähnten Bedingung berechnen, dass der wesentliche Wärmeumsatz an den offenen Flächen stattfindet. Dabei werden wir davon ausgehen, dass der kleine ausgehende Wärmestrom von der Schneefläche durch die Einstrahlung und durch die Wärmezufuhr vom Boden kompensiert wird. Es bleiben dann übrig die dynamische Wärmezufuhr und die starke Abkühlung an den offenen Stellen. Es sei auf der Länge  $L$  von der Breite  $b$  ein Teil  $b_0$  offenes Wasser, dessen Wärmeabgabe  $S_{0w}$  cal/cm<sup>2</sup> Stunde ist. Die erwähnte Bedingung ist dann, nach (26,4) und auf einen Tag bezogen:

$$(24 S_{0w} - Q_m) b_0 L \cdot 10^4 = 24 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,36}{427} \frac{q}{b} \left( \frac{h}{L} \right) \cdot b \cdot L \cdot 10^4$$

d. h.

$$b_0 = \frac{0,02 \cdot 10^6 \cdot q \left( \frac{h}{L} \right)}{24 S_{0w} - Q_m} \quad (29,4)$$

Die Breite der offenen Strecke wird demnach der Wasserführung und dem Gefälle proportional sein; sie wird bei zunehmender Abkühlung abnehmen und bei zunehmender Einstrahlung zunehmen. Als Beispiel wird angenommen:  $t_i = -10^\circ \text{ C}$ ,  $N = 0$ ,  $Q_m = 90$  cal/cm<sup>2</sup> Tag,  $q = 50$  m<sup>3</sup>/sec,  $S_{0w} = 24$  cal/cm<sup>2</sup> Stunde.

<sup>1)</sup> Axel Ekwall: Die Eisverhältnisse in profilgeregelten Gewässern, Zweite Weltkraftkonferenz 1930, Nr. 13, S. 362.

Dann wird:

$$b_0 = 2100 \cdot \left(\frac{h}{L}\right)$$

Für ein Gefälle  $\frac{h}{L} = 0,001$  würde demnach das Gleichgewicht bei einer Breite der offenen Rinne von 2,1 m eintreten, unter den erwähnten Voraussetzungen.

Die oben gegebene Berechnung gibt natürlich nur einen Anhaltspunkt für eine quantitative Beurteilung. Tatsächlich wird man beobachten, dass die offenen Strecken in der Regel breiter sind als die oben berechneten. Die Strecken bleiben ja nur offen, weil die Wassergeschwindigkeit genügend gross ist, um die gebildeten Eisnadeln mitzuführen. Diese werden nach ruhigeren Stellen unter der Eisdecke geführt. Es werden auf diese Weise grössere Gebiete in die Wirkungssphäre der offenen Strecken hineingezogen, und die Voraussetzungen der oben gegebenen Berechnung sind nicht mehr stichhaltig. Die Berechnung wird einen unteren Grenzwert geben, und setzt, wie erwähnt, auch vollständige Mischung des Wassers voraus.

Wenn das Wasser als *ruhig* zu betrachten ist, so dürfen wir von der Wärmezufuhr von unten absehen, und die Bedingung (29,2) ist nicht direkt anwendbar. Unter der Voraussetzung, dass die Einstrahlung  $q_m$  vorwiegend in der Oberflächenschicht absorbiert wird, können wir bei entsprechender Änderung der Gl. (23,1) die folgende Verbindung aufstellen:

$$t_e - t_i = \frac{\frac{-t_e}{H} l - cR - A_e(f_e - f) + q_m}{0,38 + A_2} \quad (29,5)$$

Beim Eintreten des Gleichgewichts ist der totale Wärmestrom gleich Null, d. h. der Temperaturgradient im Eise ist Null,  $t_e = 0$ . Also ergibt sich die folgende Bedingung:

$$t_i = \frac{cR + A_e(f_e - f) - q_m}{0,38 + A_2} \quad (29,6)$$

In diesem Falle wird, stationäre Verhältnisse vorausgesetzt, das Wärmegleichgewicht von der Eisdicke *unabhängig*: wenn die Lufttemperatur die Gl. (29,6) erfüllt, so hört der Zuwachs des Eises auf. Weil die totale Einstrahlung  $q_m$  im Winter in unseren Breiten klein ist gegen die Ausstrahlung  $cR$ , so muss nach der Gl. (29,6) die Gleichgewichtstemperatur der Luft positiv sein. *Bei Temperaturen unterhalb null Grad ist daher Wärmegleichgewicht ausgeschlossen, wie gross auch die Eisdicke* (bezw. äquivalente Eisdecke) *ist*, wenn bei ruhigem Wasser die Wärmezufuhr vom Boden vernachlässigt werden kann. Es wird also im Winter in unseren Breiten der Zuwachs des Eises in ruhigen Gewässern nicht vollständig aufhören. Selbst wenn eine Schneedecke hinzukommt, wird dies der Fall sein, obwohl der Zuwachs dabei so stark herabgesetzt wird (vgl. (22,2) und (27,5)), dass er praktisch genommen zu vernachlässigen ist.

## Kap. VIII. DIE DYNAMISCHE EISBILDUNG

### 30. Die Eisproduktion in offenem bzw. teilweise offenem Wasserlauf.

Die Bildung einer zusammenhängenden Eisdecke wird bei genügendem Gefälle des Wasserlaufes durch die Bewegung des Wassers verhindert. Wie im Abschnitt 31 näher auseinandergesetzt werden soll, wird dann das Eis als treibende Eiskristalle oder als Grundeis gebildet werden. Die *lokale Eisproduktion*  $P$  (auf die Flächeneinheit bezogen) ist durch den gesamten Wärmestrom in folgender Weise gegeben:

$$P = \frac{10}{80} [24 (S_{0w} - s_b - s_a) - Q_m] \text{ kg Eis/m}^2 \text{ Tag} \quad (30,1)$$



Dabei ist  $S_{0w}$  der Wärmestrom von nullgradigem Wasser, vgl. (25,4),  $s_b$  der Wärmestrom vom Boden, nach (14),  $s_d$  der Wärmestrom der Fallenergie nach (26,4), alle Grössen in cal/cm<sup>2</sup> Stunde gemessen.

Es ist auch von Interesse die Eisproduktion pro Volumeneinheit des strömenden Wassers zu berechnen. Wir werden dabei die Berechnung in der Weise verallgemeinern, dass wir annehmen, dass *ein gewisser Teil des Wasserlaufes mit einer Eisdecke (bezw. Eis + Schnee) bedeckt ist*, die den Wärmeverlust derselben auf den  $k$ -ten Teil herabsetzt. Nach (25) ist dann der relative Wärmestrom  $= k$ .

Eine Wassermenge  $=$  die Wasserführung  $10^6 q$  Gramm wird eine Fläche  $10^4 b_i \cdot v_i$  cm<sup>2</sup> decken und eine Strecke  $L_i$  während der Zeit  $n_i = \frac{L_i}{v_i \cdot 3600}$  Stunden zurücklegen.

Beim Passieren einer Reihe verschiedener Strecken  $L_1, L_2 \dots L_i \dots L_r$  wird der Wärmeverlust der Wassermenge  $q$  der folgende sein:

$$\begin{aligned} 10^6 q \cdot \Delta T &= \sum_i^r 10^4 b_i v_i n_i \left( k_i S_{0w} - s_{bi} - s_{di} - \frac{Q_m}{24} \right) = \\ &= \frac{10^4}{3600} \sum_i^r F_i \left( k_i S_{0w} - s_{bi} - s_{di} - \frac{Q_m}{24} \right) \text{ cal} \end{aligned} \quad (30,2)$$

wo  $F_i$  das *exponierte* Areal der Strecke  $L_i$  ist. In erster Annäherung haben wir auch angenommen, dass die ganze Einstrahlung  $Q_m$  im strömenden Wasser absorbiert wird, was auf den eisbedeckten Strecken allerdings eine zu grosse Korrektur bedeutet (vgl. Abschnitt 26).

Für den Einfluss der Wärmeströme  $s_b$  und  $s_d$  wird es genügen mit mittleren Werten für die ganze Strecke zu rechnen. Ist das Gesamtareal  $= F$ , so wird

$$10^6 q \cdot \Delta T = \frac{10^4}{3600} \left[ \sum_i^r F_i k_i S_{0w} - F \left( s_b + s_d + \frac{Q_m}{24} \right) \right] \text{ cal} \quad (30,3)$$

Nehmen wir nun an, dass im ganzen ein Teil  $F_w$  der Fläche des Wasserlaufes offen ist, und dass der Rest  $F - F_w$  von einer Eisdecke (+ Schnee) von konstanter Dicke bedeckt ist, also  $k_i =$  konstant  $= k$ , so wird der Wärmeverlust

$$10^6 q \cdot \Delta T = \frac{10^4}{3600} \left[ F_w S_{0w} + (F - F_w) k S_{0w} - F \left( s_b + s_d + \frac{Q_m}{24} \right) \right] \text{ cal} \quad (30,4)$$

Dabei werden die Wärmeströme in cal/cm<sup>2</sup> Stunde, die Wasserführung  $q$  in m<sup>3</sup>/sec, die Flächen  $F$  und  $F_w$  in m<sup>2</sup> gemessen. Die Eisproduktion  $P'$ , die dem Wärmeverlust gemäss (30,4) entspricht, wird dann in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$P' = \frac{10}{80 \cdot 3600} \cdot \frac{F \cdot S_{0w}}{q} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_w}{F} \right) (1 - k) - \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}} \right] \text{ kg Eis/m}^3 \text{ Wasser} \quad (30,5)$$

Durch diese Gleichung ist die *Eisproduktion pro m<sup>3</sup> Wasser gegeben, wenn die Wassermenge ein offenes Areal  $F_w$  m<sup>2</sup> und ein eisbedecktes  $F - F_w$  m<sup>2</sup> passiert, wo das Verhältnis der Wärmeströme  $1:k$  ist*. Bei ganz offenem Wasser,  $F_w = F$  und  $k = 1$ , würde die Produktion

$$P_0' = \frac{10}{80 \cdot 3600} \cdot \frac{F \cdot S_{0w}}{q} \left[ 1 - \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}} \right] \text{ kg Eis/m}^3 \text{ Wasser} \quad (30,6)$$

gewesen sein. Also ist

$$\frac{P'}{P_0} = \frac{1 - \left(1 - \frac{F_w}{F}\right) (1 - k) - \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}}}{1 - \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}}} \quad (30,7)$$

Wenn sowohl  $s_b$  als auch  $s_d$  im Verhältnis zu  $S_{0w}$  klein sind, so kann die Gl. (30,7) geschrieben werden:

$$\frac{P_0}{P'} = 1 - \left(1 - \frac{F_w}{F}\right) (1 - k) \left(1 + \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}}\right) \quad (30,8)$$

und gibt somit das Verhältnis, in dem die Eisproduktion pro  $m^3$  strömenden Wassers herabgesetzt wird, wenn ein Wasserlauf teilweise von einer Eisdecke bedeckt wird, deren relativer Wärmestrom  $k$  bekannt ist (vgl. 25).

*Zahlenbeispiel:*  $F = 10^6 m^2$ , offenes Areal  $F_w = 0,1 \cdot F$ ,  $S_{0w} = 24 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$ . Auf der eisbedeckten Fläche sei soviel Schnee, dass der relative Wärmestrom  $k = 0,1$  ist.

Weiter wird angenommen, dass  $s_b + s_d = 0,62$  und  $Q_m = 0$  ist. Dann wird nach (30,8)

$\frac{P'}{P_0} = 0,19$ , d. h. die Eisproduktion pro  $m^3$  Wasser ist auf 19% derjenigen bei ganz offenem Wasserlauf reduziert.

Bei der oben behandelten Eisproduktion wird das Eis nur teilweise *in situ* ausgeschieden: Auf den Strecken langsamer Bewegung als zusammenhängende Eisdecke, an Stellen stärkeren Gefälles teilweise als Grundeis, sonst aber als schwebende Eiskristalle, die dem Wasser folgen, um sich auf Strecken ruhigeren Laufes abzusetzen. Es können in dieser Weise sehr grosse Eismengen aufgesammelt werden; als Beispiel sei die Gl. (30,1) auf den folgenden Fall angewandt:

$$S_{0w} = 24 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}, \quad Q_m = 90 \text{ cal/cm}^2 \text{ Tag}, \quad q = 50 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$b = 100 \text{ m}, \quad \frac{h}{L} = 0,001 \text{ m}. \quad \text{Es wird dann } P = 62 \text{ kg Eis/m}^2 \text{ Tag},$$

also auf einer offenen Strecke von 1000 m Länge und 100 m Breite eine Gesamtproduktion von 6 200 000 kg pro Tag. Wird diese Eismasse als voluminöses treibendes Eis nach einer eisbedeckten Strecke geführt, so wird ein bedeutender Raum beansprucht, und der Lauf unterhalb der Eisdecke wird eingeengt. Eine Steigung des Wasserniveaus wird eintreten und Überschwemmung wird dann oft die Folge sein.

Eine wichtige Folge der Eisproduktion ist die *Abnahme der Wasserführung*. Es ist eine bekannte Erfahrung bei Kraftwerken, dass das Wasser bei eintretender Kälte zum Teil «weggefroren» wird. Obwohl der verringerte Ablauf vom Niederschlagsgebiet darin auch zum Ausdruck kommt, so ist jedoch auch die Eisproduktion im Wasserlauf selbst von Bedeutung. Einen Anhaltspunkt über die Grösse dieser Abnahme erhält man durch Anwendung der Gl. (30,5); die Eisproduktion der Wassermenge  $q$  ist  $q \cdot P'$ , und berücksichtigt man, dass 1 kg Eis/ $m^3$  Wasser = 0,001 ton/ $m^3$  Wasser ist, so ergibt sich nach (30,5):

Wenn das Wasser eines Wasserlaufes ein exponiertes Areal  $F \text{ km}^2$  passiert, wovon  $F_w \text{ km}^2$  offenes Wasser ist, so wird durch die Eisproduktion die Wasserführung  $q$  in folgendem Verhältnis reduziert:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{10^{-2}}{80 \cdot 3600} \frac{F}{q} S_{0w} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_w}{F} \right) (1 - k) \frac{s_b + s_d + \frac{Q_m}{24}}{S_{0w}} \right] \quad (30,9)$$

Dabei sind  $S_{0w}$ ,  $s_b$  und  $s_d$  in cal/cm<sup>2</sup>Stunde,  $F$  und  $F_w$  in m<sup>2</sup>,  $q$  in m<sup>3</sup>/sec angegeben.

*Zahlenbeispiel:* Wir nehmen an, dass die Breite proportional zur Wasserführung ist, bei  $q = 75$  m<sup>3</sup>/sec z. B.  $b = 100$  m. Bei einer Länge von 150 km wird  $\frac{F}{q} = \frac{15 \cdot 10^6}{75} = 2 \cdot 10^5$ . Es sei weiter  $s_b + s_d = 1,5$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde und  $Q_m = 0$ . Bei  $k = 0,5$ , was einer Eisdicke von etwa 10 cm entsprechen wird (vgl. Abb. 22), erhalten wir dann folgendes:

$L = 15\,000$  m

$S_{0w}$ cal/cm <sup>2</sup> Stunde	$k$	$\frac{F_w}{F}$	$\frac{\Delta q}{q}$
10	0,5	0,5	4,2 %
		0,1	2,8
20	0,5	0,5	9,4
		0,1	6,6
30	0,5	0,5	14,6
		0,1	10,4
40	0,5	0,5	19,7
		0,1	14,2

An diesem Beispiel sieht man, dass starke Variationen der meteorologischen Verhältnisse erhebliche Schwankungen der Wasserführung bewirken können.

### 31. Das Grundeis und das Gleichgewicht bei dynamischer Eisbildung.

Die Eisbildung in strömendem Wasser ist von dem Wachstum der Eiskecke ruhigen oder langsam strömenden Gewässers als Erscheinung so verschieden, dass es berechtigt ist, durch die Bezeichnungen *dynamische* bzw. *statische* Eisbildung die zwei Typen zu unterscheiden, obwohl eine scharfe Grenze nicht existiert.

Am auffälligsten ist die Bildung des *feststehenden Grundeises*, von der wir im Abschnitt 2 eine kurze Beschreibung gegeben haben. Das Grundeis ist im Laufe des letzten Jahrhunderts Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Die Erklärung der eigentümlichen Bildung von Eis auf dem Boden fließenden Gewässers war bis vor kurzem von zwei grundsätzlich verschiedenen Auffassungen geprägt: Von einer Seite wurde behauptet, dass die zur Eisbildung notwendige Wärmeabgabe durch Wärmestrahlung durch das Wasser hindurch stattfindet. Dabei wurde aber nicht verstanden, warum Grundeis nur in strömenden, aber nicht in ruhigen Gewässern gebildet wird. Von anderer Seite wurden die Wasserwirbel für den Transport verantwortlich gemacht, wobei allerdings die Ansichten darüber verschieden waren, ob die Eiskristalle an der Oberfläche oder erst am Boden selbst gebildet wurden. Wir brauchen hier auf die umfangreiche Literatur nicht einzugehen (Verzeichnis bei Schwalbe<sup>1)</sup>, denn der physikalische Vorgang ist durch die früher erwähnte Arbeit von Altberg<sup>2)</sup> in den Hauptzügen klargestellt worden.

<sup>1)</sup> G. Schwalbe: Aus dem Archiv d. Deutschen Seewarte, 44. Jahrg.

<sup>2)</sup> Altberg: Ann. d. Hydr. und mar. Met., LII, Jahrg. 1924, Hft. X.

Altberg wies erstens darauf hin, dass die physikalischen Untersuchungen über die Absorption der Wärmestrahlen in Wasser eine Wärmeausstrahlung von den tieferen Wasserschichten oder vom Boden ausschliessen (vgl. unsere quantitative Behandlung im Abschnitt 6). Zweitens konnte er durch experimentelle Untersuchungen nachweisen, dass die Wärmeabgabe, die ausschliesslich von der Oberfläche stattfindet, eine Unterkühlung zur Folge hat, welche keineswegs eine labile Erscheinung ist. Vielmehr konnte das Auftreten von unterkühltem Wasser am Flussboden konstatiert werden, und die Eisbildung war von der Berührung der festen Phase oder von anderen festen Kristallisationskernen abhängig.

Wir haben in Abschnitt 15 und 16 gesehen, dass diese Auffassung durch unsere Messungen durchaus bestätigt worden ist. Gegen die Untersuchungen von Altberg ist von Barnes<sup>1)</sup> der Einwand erhoben worden, dass Messungen, die von ihm ausgeführt worden sind, von einer Unterkühlung keine Andeutung geben, und er glaubt daher annehmen zu müssen, dass eine bisher unbekannte selektive Durchlässigkeit des Wassers für Wärmestrahlen doch existiert. Die Erklärung für diese verschiedenen Beobachtungsergebnisse ist, wie auch von Altberg erwähnt, darin zu finden, dass die Messungen Altbergs bei langsam strömendem Wasser gemacht worden sind, während die Messungen von Barnes bei kräftig durchmischem Wasser ausgeführt wurden. Nach unserer oben erwähnten Berechnung und Messung der Unterkühlung der Oberfläche (Abschnitt 15 u. 16) ist eine Messung mit gewöhnlichen Thermometern zum Nachweis der Unterkühlung im allgemeinen nicht anwendbar, denn teils sind die unterkühlten Wasserhäute zu dünn, und teils wird das Thermometer von Eis bedeckt werden, also 0° C annehmen. Nur bei sehr langsamer Bewegung und kräftiger Abkühlung kann die Unterkühlung direkt gemessen werden, wie Altberg in einigen Fällen beobachten konnte. (Vgl. die Formeln (15,8) und (15,9) für kurze und für lange Perioden T.)

Im folgenden werden wir unsere Auffassung von der Grundeisbildung kurz zusammenfassen.

Von strömendem Wasser wird Wärme nur von der Oberfläche abgegeben, teils als Wärmestrahlung, teils durch Verdunstung und Austausch. (Abschnitt 3.) Die tieferen Schichten werden nur durch Mischung Wärme abgeben; die Wärmeleitung spielt dabei eine untergeordnete Rolle. Die Art, in der die Wärmeübertragung durch Mischung vor sich geht, wird vor allem durch die Wirbelbewegung bestimmt. Ob diese langsam oder schnell vor sich geht, hängt von dem Gefälle ab, in jedem Falle aber ist das strömende Wasser von konservativen Wirbelflächen mehr oder weniger durchsetzt, die während ihrer Bewegung auch zeitweise an die Oberfläche hinauftauchen und als ein Teil derselben der Abkühlung ausgesetzt werden. Wenn eine Wirbelfläche dann wieder hinuntertaucht, wird die Temperatur der Wirbelfläche wieder allmählich steigen, weil dem umgebenden Wasser Wärme entnommen wird. Wichtig ist es hervorzuheben, dass dieser Ausgleich der Temperatur der Wirbelfläche nicht sofort eintritt, wenn die Fläche ins Wasser heruntertaucht; dies ist durch unsere Messungen (Abschnitt 16) erwiesen worden.

Wenn die Durchschnittstemperatur des Wassers sich 0° C nähert, so wird die Abkühlung der Oberfläche eine Unterkühlung derselben bewirken, und die Wirbelflächen werden sich dann als unterkühlte dünne Schichten durch das Wasser bewegen. Diese unterkühlten Wasserhäute werden dabei allmählich erwärmt, aber solange eine Unterkühlung besteht, ist die Möglichkeit zur Eisbildung vorhanden. Wo die Schicht mit einer festen Phase in Berührung kommt, wird Eis auskristallisieren. Dies geschieht erstens sowohl an der Oberfläche als auch auf dem Weg durch das Wasser, wo schwebende feste Partikeln und an solchen schon gebildete Eiskristalle die Kristallisationskerne bilden. So entsteht das *schwimmende und schwebende lose Grundeis*, das auf Strecken ruhigen Laufes als grosse schwammähnliche Eismassen die Oberfläche fast ganz decken kann, wie die Abb. 24 es zeigt.

<sup>1)</sup> H. T. Barnes: Ice Engineering, Montreal 1928.

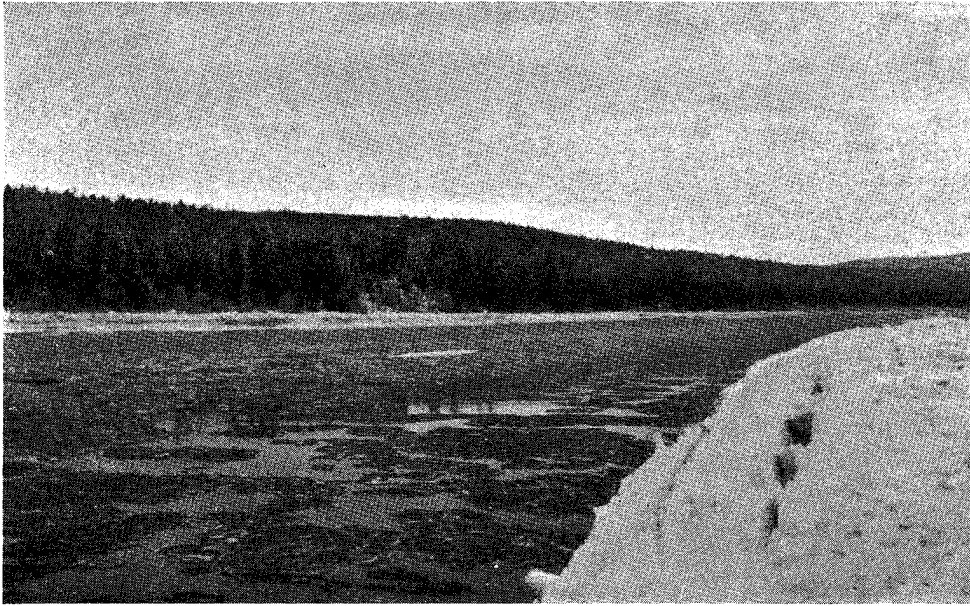


Abb. 24.

Foto O. B. Solem.

Loses Grundeis in der Glomma. Die steile Eiswand links auf dem Bild wurde durch einen vorhergehenden Eisgang gebildet.

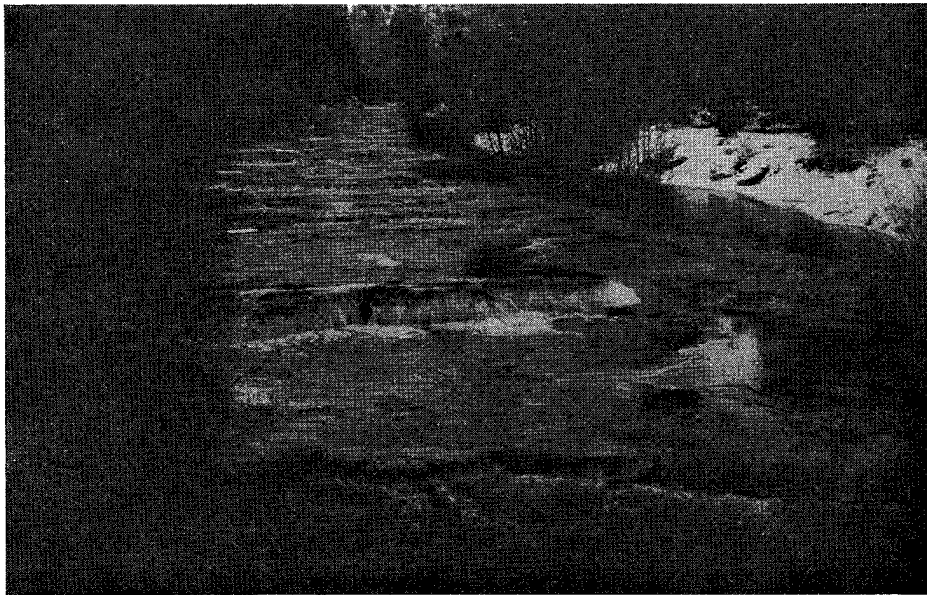


Abb. 25.

Foto O. B. Solem.

Die Bildung von Grundeis und Eisdämmen in der Try a (ein Nebenfluss der Glomma) hat das Flussbett um 1—2 m erhöht.

Zweitens aber besteht für die unterkühlte Wasserhaut auch die Möglichkeit Eis zu bilden, wenn sich die Haut der festen Bodenfläche des Wasserlaufes anschmiegt; dadurch entsteht das  *feste Grundeis* , das unter günstigen Umständen mächtige Eismassen bilden kann<sup>1)</sup>. So zeigt z. B. die Abb. 25 wie das ganze Flussbett von einer Grundeissschicht von etwa 1,5 m Dicke ganz bedeckt worden ist.

<sup>1)</sup> Vgl. auch G. Lüscher: Das Grundeis, Aarau 1906.



Abb. 26.

Foto O. B. Solem. 16—12—28.

Bildung von Grundeis in der A t n a, an einer Holzstange, die in dem offenen Wasserstrom während der Nacht 15.—16. Dez. 1928 angebracht war. Beim Herausnehmen ist das Grundeis teilweise abgefallen.

Das feste Grundeis kann in recht verschiedenen Formen gebildet werden, die offenbar mit der Intensität des Bildungsprozesses in Zusammenhang stehen. Die Unterschiede sind aber nicht grösser als die Unterschiede, die man an den verschiedenen Schneeformen beobachten kann, die unter thermischen und dynamischen Verhältnissen, die erheblich voneinander abweichen, gebildet worden sind. Nach Beobachtungen an der A t n a und der G l o m m a in Österdalen sind oft zwei Typen von festem Grundeis zu unterscheiden: An Tagen mit mässiger Abkühlung, also bei relativ langsamer Produktion, wird sich das Grundeis als einigermaßen feste und zähe Schicht am Boden des Wasserlaufes bilden; stösst man eine Stange in die Schicht hinein, werden ohne Schwierigkeit Stücke der blättrigen und ziemlich porösen Schicht losgerissen und steigen zur Oberfläche hinauf. Man kann auch beobachten, dass einzelne grosse Steinblöcke, die aus dem Boden emporragen, vom Grundeis nicht bedeckt werden, was der besseren Wärmeleitung vom Boden zuzuschreiben ist. Die Grundeis-Schicht der Abb. 25 wurde in der Hauptsache von diesem Typus gebildet.

Auf andere Weise wird das Grundeis an Tagen mit starker Abkühlung, also bei schneller Produktion, gebildet; es werden dann locker zusammenhängende Kristallmassen von korallenähnlichem Aufbau gebildet, welche leicht loszulösen sind. Diese setzen sich an allen festen Gegenständen ab; Abb. 26 zeigt die Ablagerung solchen Grundeises an einer Holzstange. Die lockere Struktur bewirkt, dass freischwimmende derartige Kristallmassen einen sehr kleinen Auftrieb haben; sie folgen den Wasserströmungen und geben leicht Anlass zur Verengung des Durchlaufes und nachfolgender Stauung des Wassers.

An Wasserkraftwerken können bekanntlich die Bildung von Grundeis und die Anhäufung von losem Grundeis, das unter Umständen die ganze Wassermasse durchsetzt, erhebliche Schwierigkeiten bewirken.<sup>1)</sup> Das oben besprochene Grundeis kann bei der G l o m m a in Österdalen das ganze Flussbett auf lange Fallstrecken vollständig mit einer dicken grünlichen Eisschicht decken. Bei dem Nebenfluss A t n a ist die Grundeisbildung

<sup>1)</sup> Für norwegische Verhältnisse, vgl. A. Ruths, *Isvanskeligheter ved norske kraftanlegg*, Elektrotekn. tidsskr. 1925, S. 177.

ausserordentlich ausgeprägt und bildet in jedem Winter einen Teilprozess der Eisbildung. Es sei übrigens bemerkt, dass die Grundeisbildung in unseren Breiten in jedem Wildbach bei eintretender Kälte beobachtet werden kann.

Für Strecken, wo das Gefälle grösser ist als 1—2 ‰, wird durch diese Grundeisbildung ein sehr interessanter Prozess eingeleitet, der auf die Bildung einer festen Eisdecke zielt. Erstens wird die Bildung der festsitzenden Grundeisschicht den Wasserstand erhöhen, und das Wasser überflutet das Randeis, das an den Ufern anfänglich gebildet worden ist. Die Abkühlung des Wassers ist sehr effektiv, wenn es in dünner Schicht über das Randeis rieselt (vgl. (30,1)), und das Randeis nimmt an Dicke schnell zu; die Beschaffenheit der so gebildeten Verstärkung des Randeises ist aber anders als die einer gewöhnlichen Eisdecke, welche auf der Unterseite wächst. Das neue Randeis ist anfänglich von geringer Festigkeit, denn es enthält viel Wasser, es ist kristallinisch-porös und lässt das Wasser wie durch einen Filter einigermaßen hindurch. Es ist eben Grundeis, das an einer Randeisfläche abgesetzt wird.

Gleichzeitig mit der Bildung der zusammenhängenden Grundeisschicht am Boden des Wasserlaufes und am Randeis, findet eine Produktion von losem Grundeis in der strömenden Wassermenge selbst statt. Durch die ständig erneute Durchsetzung des Wassers mit unterkühlten Wasserhäuten wird das Zusammenkitten dieser Eiskristalle begünstigt. Dadurch werden schwammartige Anhäufungen gebildet, die eine Umbildung der Strömungsverhältnisse in kurzer Zeit bewirken können. Einerseits werden sie an einigen Stellen von den Strömungen nach dem Boden geführt und können dort am Bodeneis haften bleiben. Andererseits werden die lokalen Geschwindigkeitsunterschiede — das lokale Akzelerationsfeld — die Eisschwämme dahin treiben, wo die lokale Akzeleration am geringsten ist.

Es wirken in diesem Falle sowohl der kinetische Auftrieb als auch die Turbulenz und die Friktion der Grenzschichten in demselben Sinne. Es sei an zwei wohlbekanntere Tatsachen erinnert: Bei einer Zentrifuge werden spezifisch leichte Partikeln nach der Rotationsachse hingetrieben; beim Umrühren einer Flüssigkeit in einem stillstehenden Gefässe werden sich auch ganz richtig leichte Partikeln um das Zentrum der bewegten Oberfläche ansammeln, an der stillstehenden Bodenfläche aber werden sich die schweren Partikeln nicht an der Aussenwand ansammeln, wie es in der Zentrifuge geschieht, sondern in der Mitte. Die erstere Wirkung kann man in einem Wasserlauf an treibenden Holzstücken, die letztere an der Verteilung des Sandes am Boden, leicht beobachten.

Wenden wir dies auf die treibenden und schwebenden Grundeismengen an, so erklärt sich leicht, warum sie sich stellenweise anhäufen. Und eine Ansammlung wirkt als eine sehr effektive Rückkoppelung: die Wassergeschwindigkeit wird durch die Ansammlung herabgesetzt, und dies bringt neue Eismengen herbei, die auch eingefangen werden. Die an dieser Stelle herabgesetzte Geschwindigkeit und die Verengung des Strömungsquerschnittes bewirken dann auch eine Erhöhung des Wasserstandes: der Aufbau eines *Eisdammes* hat begonnen. Am Anfang wird dieser Damm die Wasserströmung in beträchtlichem Mass hindurchlassen, er ist wie ein Filter, der die Strömung verlangsamt. Die Zufuhr von unterkühltem Wasser von der Oberfläche wird aber den ganzen Damm allmählich verstärken. Wo ein schwacher Punkt mit relativ grosser Durchströmung ist, wird gleichzeitig auch die Zufuhr unterkühlten Wassers gross sein, und die Ausbesserung geschieht automatisch. Es können in dieser Weise Eisdämme gebildet werden, die sich von der Grundeis-schicht erhebend quer über den ganzen Wasserlauf erstrecken und grosse Wassermengen aufdämmen. Einige Beispiele von der *G l o m m a* und dem *Tryssilelv* sind in den Abb. 27, 28, 29 gegeben, vgl. auch die Abb. 25, wo eine Reihe kleiner Eisdämme zu sehen ist.

Nach dieser Auffassung sind die Eisdämme primär durch die Strömungsverhältnisse bedingt; diese werden aber durch die Randeisbildung und durch die Absetzung der Grund-

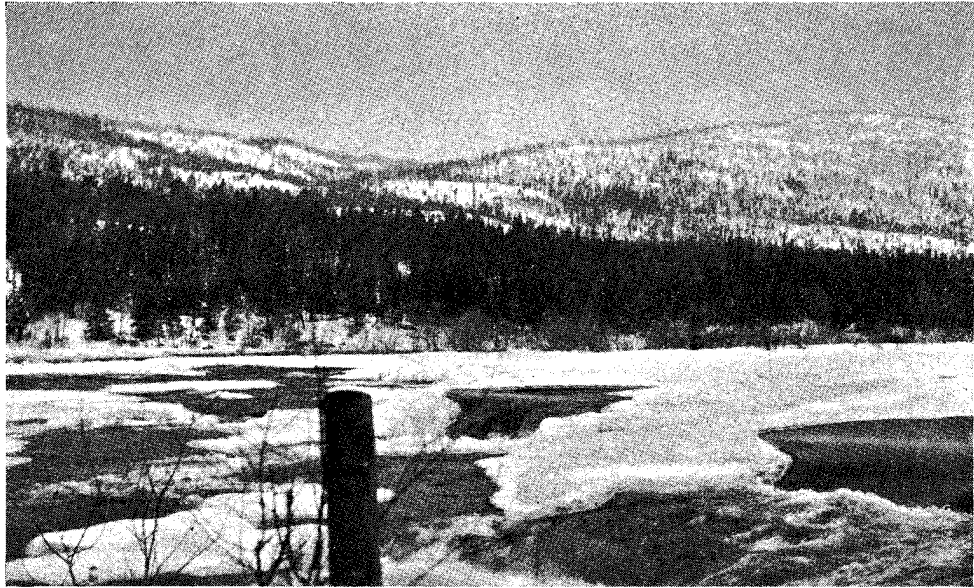


Abb. 27.

Foto O. B. Solem. 4-1-1928.

Eisdamm bei Barkald in der Glomma, am Anfang der Stromschnelle bei Urströmfoss.



Abb. 28.

Foto O. B. Solem 4-1-1928.

Eisdamm bei Barkald in der Glomma.

eisschicht abgeändert. Die ursprüngliche Topographie des Flussbodens wird also nur eine einleitende Rolle spielen. Demnach sind auch die Stellen, wo sich Eisdämme bilden, in der Regel sehr wechselnd. Nur an besonders günstigen Stellen werden sie oft regelmässig gebildet, wie am Anfang einer stärkeren Stromschnelle.

Auf jeden Fall aber ist zu betonen, dass die Bildung der Eisdämme ein *stabiler* Prozess ist, der in der Hauptsache einerseits dynamisch von dem Gefälle und andererseits thermisch von der Abkühlung der Oberfläche des strömenden Wassers bedingt ist.

Die wichtige Folge dieser Bildung der Eisdämme ist, dass die betreffende Fallstrecke *treppenförmig umgestaltet* wird, wodurch das Gefälle auf eine Reihe kleiner Wasserfälle





Abb. 29.

Foto O. B. Solem. 9—1—1929.

Eisdamm bei Tollfossen in Tolga (Glomma). Rechts die Reste eines Eisdammes, wo der Eisgang am 6. Jan. 1929 angefangen hatte. Links im Hintergrund ein neuer Eisdamm von 2 m Höhe.

an den Eisdämmen konzentriert wird. (Dies ist z. B. deutlich in den Abb. 25 und 29 zu sehen.) Die aufgedämmten Wassermagazine, wo die Wassergeschwindigkeit klein ist, werden bei fortgesetzter Kälte bald von zusammenhängenden Eisdecken bedeckt. Die Bildung der Eisdämme ist ein interessantes Beispiel für die natürliche Stabilisierung, durch die einem stabilen Gleichgewichtszustand der Wärmeprozesse zugestrebt wird. Wenn in der oben beschriebenen Weise die Fallstrecke treppenförmig eisbedeckt worden ist, so wird durch die zunehmende Eisdecke (bezw. hinzukommende Schneedecke) die Wärmeabgabe immer mehr herabgesetzt, und die Wärmezufuhr macht sich in steigendem Masse geltend: die Einstrahlung von Sonnenlicht und diffusem Licht, die Wärmezufuhr vom Boden und die Erwärmung durch Umsatz der Fallenergie. Die Eisbildung wird aufhören, die Grundeissschicht wird zuerst dort schmelzen, wo die Wärmezufuhr am grössten ist (an den Stellen der grössten Wassergeschwindigkeit), und das Wasser findet seinen Weg unterhalb einer schützenden Eisdecke. An den Stellen, wo das Gefälle am grössten ist, wird der Wasserlauf offen bleiben, und durch die Grösse dieser offenen Flächen wird auch bis zu einem gewissen Grade die Wärmeabgabe reguliert. Wir können hier die Betrachtungen des Abschnittes 29 als einen Anhaltspunkt für eine quantitative Beurteilung benutzen.

Der oben geschilderte Stabilisierungsprozess kann in unseren Breiten in solchen Wasserläufen zur Vollendung kommen, in denen die Wirbelbildung so stark ist (bei Gefällen grösser als 1—2‰), dass die Bildung einer normalen Eisdecke verhindert wird. Wo die Wirbelbildung gering ist, also bei schwachem Gefälle, wird die Bildung einer Eisdecke durch die Grundeisproduktion in einer abgeänderten Weise gefördert. Es werden dabei vor allem das lose Grundeis und vom Boden losgelöstes Grundeis als Dämpfung der Wirbelbewegung wirken, sodass eine zusammenhängende Oberflächenkruste der schwimmenden Eismassen nach und nach gebildet wird, an die sich der regelmässige Zuwachs anschliesst. Beim Lösen des Bodeneises spielt dabei die tägliche Periode der Einstrahlung eine gewisse Rolle. Beim Einsetzen der Kälte wächst das Grundeis am meisten in der Nacht, weniger am Tag, und der Zustand nähert sich bald einem Gleichgewicht. Ist dieser Gleichgewichtszustand z. B. am Ende eines Tages erreicht worden, so wird während der folgenden Nacht so viel Eis gebildet werden, dass die Wärmezufuhr zu den tieferen

Schichten am nächsten Morgen durch die unverändert gebliebene Wärmeabgabe nicht kompensiert wird. (Diese Kompensation geschieht durch Mischung.) Das Grundeis wird daher losgelöst werden können. Es ist also im Grunde eine richtige Erfahrung, wenn eine volkstümliche Regel aus Mittel-Schweden besagt, dass das Grundeis «am Anfang des dritten Tages gelöst wird»<sup>1)</sup>, nur ist die Zeitangabe mit allem Vorbehalt zu behandeln.

### 32. Eisgänge.

Die Lösung der Eisdecke eines Wasserlaufes im Frühling kann von Eisgängen begleitet sein, wenn eine bedeutende Erhöhung der Lufttemperatur oder anhaltender Regen einsetzt. Das Eis wird durch die starke Wärmezufuhr zum Teil gelöst und durch die erhöhte Wasserführung mit dem Fluss fortgeführt; wo der Lauf eingengt oder weniger tief ist, können die Eismassen angehäuft werden und bedeutende Wassermengen aufdämmen. Wenn der Damm dann nachgibt, kann bei genügendem Gefälle eine Flutwelle den Fluss entlang fortgepflanzt werden, die die ganze Eismasse auf der Strecke aufbrechen und in Bewegung setzen wird, bis die Flutwelle auf einer ruhigeren und breiteren Strecke abebben wird. Solche Frühlingseisgänge können in norwegischen und schwedischen Wasserläufen von grossem Umfang sein und grossen Schaden anrichten.

Ähnliche Eisgänge können aber nicht nur im Frühling vorkommen, sondern auch im Winter und nicht nur beim Eintreten warmen Wetters, sondern auch bei strenger Kälte. Von bedeutendem Umfang waren mehrere *Wintereisgänge* in der Glomma während der Winter 1926—27 und 1927—28, die von der in der Einleitung erwähnten Studienkommission untersucht wurden. Wegen der Einzelheiten verweisen wir auf die offizielle Publikation<sup>2)</sup>. Hier wird eine Diskussion der physikalischen Bedingungen der Wintereisgänge von Interesse sein.

Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet ein Wintereisgang eine plötzliche Unterbrechung des Stabilisierungsprozesses, den wir im vorhergehenden Abschnitt behandelt haben. Diese Unterbrechung hat sowohl ihre dynamische als auch ihre thermische Voraussetzung, welche wir gesondert behandeln werden.

Das Material, das von norwegischen und schwedischen Wasserläufen vorhanden ist<sup>3)</sup>, deutet darauf hin, dass *ein Wintereisgang aller Wahrscheinlichkeit nach seinen Ursprung an dem Bruch eines Eisdamms hat* (vgl. 31). Das Wassermagazin des Damms wird dann schnell entleert, die nächsten Eisdämme können mitgerissen werden, die Wassermenge steigt bei jedem Zuschuss, und in dieser Weise kann eine *Flutwelle* entstehen, die sich mit relativ steiler Front und bedeutender Geschwindigkeit den Wasserlauf hinab fortpflanzt, bis sie endlich gebremst wird, wo der Wasserlauf einen langsameren Lauf hat.

Bei einem Wintereisgang findet eine allgemeine Steigerung der Wasserführung nicht statt, er ist dynamisch bedingt: Den Anfang bewirkt ein plötzlicher Zuschuss zur Wasserführung, der als Flutwelle weiter wandert, wenn die Bedingungen dazu vorhanden sind. Im kleinen kann man ähnliche Flutwellen beobachten, wenn das Wasser über eine schiefe Ebene fliesst, deren Neigung so gross ist, dass das Wasser vorwärts «schießt». Nach Forchheimer<sup>4)</sup> ist die Bedingung für den Übergang eines Stromes in einen Wildbach, dass das Gefälle grösser ist als  $\frac{g}{c^2}$ . Dabei ist  $c$  ein Koeffizient, der für natürliche Wasserläufe zwischen 30 und 50 m sec<sup>-1</sup> liegt, bei sehr ebenem Boden bis 80 m sec<sup>-1</sup>. Die entsprechenden Werte des kritischen Gefälles würden 0,011, 0,004 bis 0,0015 sein.

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», Medd. fra Norges Vassdrags- og Elektrisitetsvesen, V. 2, Oslo 1929.

<sup>2)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», l. c.

<sup>3)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», l. c.

<sup>4)</sup> Th. Forchheimer: Hydraulik, Teubner 1929.

Wasserschwell und Wassersenk, Teubner 1924.

Wenn man dieselbe Bedingung für einen grösseren Wasserlauf als gültig betrachten darf, so wären die dynamischen Bedingungen für die Fortpflanzung einer Flutwelle nur vorhanden, wenn der Wasserlauf ein gleichmässiges Gefälle  $> 0,004$  bzw.  $> 0,0015$  hätte.

Diese Überlegung wird durch die Erfahrung bestätigt. Nach Angaben von A. Ekwall<sup>1)</sup> ist in Schweden *das Auftreten von Wintereisgängen auf solche Strecken begrenzt, wo das Gefälle grösser ist als 2 m/km (= 0,002)*. Dies stimmt auch mit den Beobachtungen in norwegischen Wasserläufen überein.

Wo das Gefälle diesen kritischen Wert nicht erreicht, werden die Bedingungen für die Fortpflanzung einer Flutwelle verschwinden. Wenn die Flutwelle in ihrem Anfang ist, wird vielleicht die horizontale Strecke eines grösseren Eisdammes genügen um die Flutwelle abebben zu lassen. Von diesem Gesichtspunkt aus ist die dynamische Eisbildung mit treppenförmiger Umbildung der Fallstrecke eine gewisse Sicherheit *gegen* das Zustandekommen einer Flutwelle; die Bildung der Eisdämme ist nicht nur in thermischer sondern auch in dynamischer Beziehung ein Stabilisierungsprozess. Andererseits ist zu bemerken, wenn ein einzelner Eisdamm wegen irgendeiner Schwächung durchbricht, dann auch die übrigen Eisdämme in der Regel durch dieselbe Einwirkung geschwächt worden sind, und die treppenförmige Umbildung bedeutet dann ein erhöhtes Risiko.

Zur Illustration der Wintereisgänge sei auf die folgenden Abbildungen hingewiesen: In der Abb. 29 (Tolga) stehen rechts auf dem Bilde die Reste eines Eisdammes, welcher der Ausgangspunkt eines Eisganges am 6. Jan. 1929 war. (Ein neuer Eisdamm ist links und weiter oben deutlich sichtbar.) Der Eisgang ging als Flutwelle eine Strecke von 2 km, wobei alles Eis wegtransportiert wurde, bis nach Tolga neue Brücke, wo die Eismassen gestaut wurden, wie Abb. 30 zeigt. In Abb. 31 sind die Eismassen abgebildet, die an die Front eines Eisganges in Trysil (<sup>19/1</sup> 29) bis zu diesem Endpunkt vorgeschoben wurden.

Wie oben bemerkt, kommt das Eintreffen eines Wintereisganges sowohl bei Umschlag zu mildem Wetter als auch bei anhaltender strenger Kälte vor. Es liegt natürlich die Möglichkeit vor, dass ein einsetzender Bruch eines Eisdammes wegen zufälliger Überlastung

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Österdalen» etc., l. c.

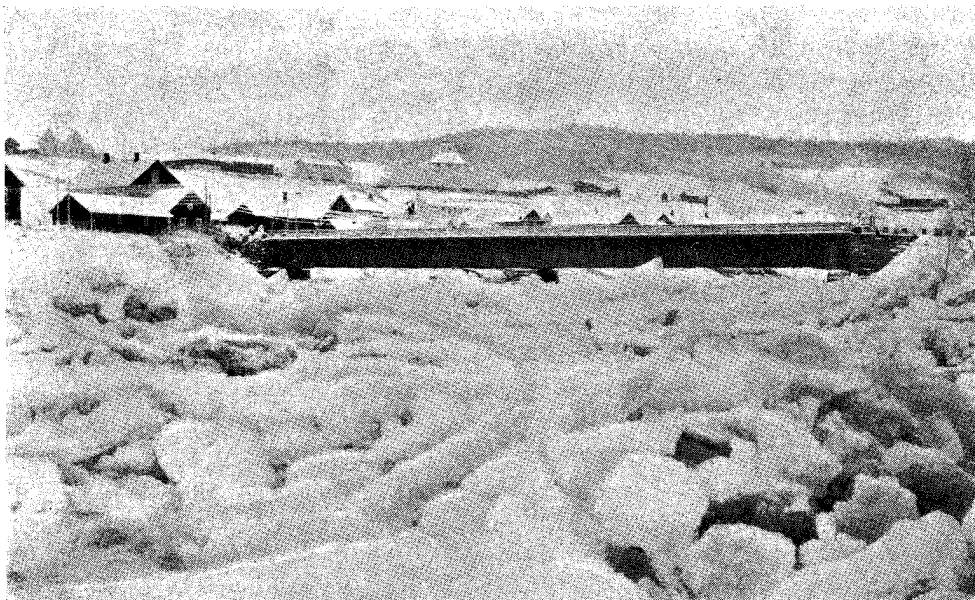


Abb. 30.

Foto O. B. Solem. 9-1-1929.

Eismassen, die durch einen Eisgang bei Tolga in Österdalen aufgestaut wurden.

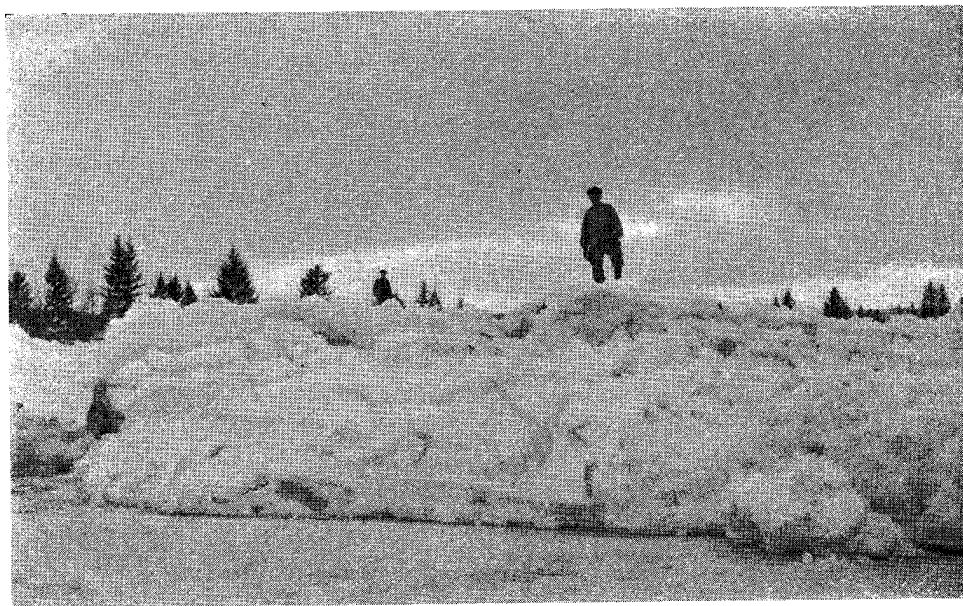


Abb. 31.

Foto O. B. Solem. 11-1-1929.

Das untere Ende der aufgelagerten Eismassen eines Eisganges in Trysil, der an dieser Stelle gebremst wurde.

auf einem schwachen Punkt bewirkt wird; wie früher betont, ist aber die Bildung der Eisdämme ein Prozess, der auf Stabilität hinzielt, und daher wollen wir im folgenden die physikalischen Bedingungen untersuchen, die ausser der oben erwähnten dynamischen (dem kritischen Gefälle) beim Eintreffen eines Eisganges von Wichtigkeit sind.

Eine Schwächung eines Dammes, der vom Eis gebaut ist, wird vor allem durch *Wärmezufuhr* bewirkt. Diese kann in folgender Weise geschehen:

- a) Durch Wärmeleitung vom Bodenmaterial.
- b) Durch Erwärmung durch Umsatz der Fallenergie.
- c) Durch Zufuhr von wärmerem Grundwasser.
- d) Durch Einstrahlung von Sonnenlicht und diffuser Himmelsstrahlung.
- e) Durch Steigerung der Gegenstrahlung der Atmosphäre ohne Änderung der Lufttemperatur an der Erdoberfläche.
- f) Durch erhöhte Wärmezufuhr aus der Luft bei eintretender Temperatursteigerung.

Betreffs a) sei bemerkt, dass die Grösse des Wärmestromes vom Boden den anderen Wärmeprozessen gegenüber von geringer Bedeutung ist, wenn die langen Perioden betrachtet werden (vgl. Abschnitt 14). Die gleichmässige Zufuhr von Wärme wird den Zuwachs einer Grundeisschicht begrenzen, aber eine jähe Lösung nicht bewirken. Für die kurzen Perioden des Wärmestromes vom Boden, welche durch die wechselnde Lichteinstrahlung verursacht werden, vgl. unten bei d).

Betreffs b) sei bemerkt, dass der Umsatz der Fallenergie, der im Abschnitt 26, Gl. (26,4), gegeben ist, eine sehr gleichmässige Zufuhr von Wärme bedeutet und daher für die Lösung eines Eisdammes von geringer Bedeutung sein muss.

Betreffs c) ist zu bemerken, dass eine lokale Zufuhr von wärmerem Grundwasser die Lösung gebildeter Eisdämme begünstigen würde. Es wird auch für einzelne Wasserläufe als Erfahrung angegeben, dass solche Faktoren, die auf die Grundwasserzufuhr einwirken, auch die Häufigkeit der Eisgänge beeinflussen<sup>1)</sup>. Als solche Faktoren

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», l. c.

werden folgende angeführt: Die Regenmenge im Herbst, die Dauer des Frostes vor dem ersten Schneefall und die Schneemenge. Das Material ist aber zu ungenügend, um sichere Schlüsse zu erlauben.

Betreffs d) verweisen wir auf die Abschnitte 8, 9, 10, wo der Wärmestrom der einfallenden Lichtstrahlung behandelt worden ist. Aus der Tabelle 5 geht hervor, dass bei *horizontaler* Oberfläche in unseren Breiten das *direkte Sonnenlicht* bei dem niedrigen Sonnenstande des Winters im wesentlichen reflektiert werden wird. Die Intensität des eindringenden Restes wird von geringer Wirkung sein. Anders aber ist es, wenn das direkte Sonnenlicht auf eine steile Eisfläche fällt, wie z. B. auf die Vorderfläche eines Eisdammes, die sehr oft in kleinen Absätzen aufgebaut ist. Aus der Tabelle 6 ist ersichtlich, dass dann bedeutende Energiemengen in der Bodenfläche des Eisdammes absorbiert werden können. Es werde z. B. ein Eisdamm von 2 m Höhe bei senkrechter Inzidenz der Sonnenstrahlen Anfang Dezember betrachtet; in der Mittagszeit würde dann die Wärmezufuhr durch Absorption in der Bodenfläche etwa  $8 \text{ cal/cm}^2 \text{ Stunde}$  sein, wenn das Eis homogen wäre. Nehmen wir an, dass das Eis so undurchsichtig ist, dass dieser Betrag auf ein Zehntel reduziert wird, so würde doch eine Eisschicht von 0,1 mm Dicke an der Bodenfläche pro Stunde geschmolzen werden.

An einem Eisgange in der Atna (5. Dez. 1928) konnte der Verfasser bei einer Inspektion einige Tage später nachweisen, dass der Ausgangspunkt des Eisganges an einem Eisdamm war, der wahrscheinlich plötzlich entleert worden war. Dieser Eisdamm lag auf der einzigen Stelle einer langen Fallstrecke, wo die Sonnenstrahlen zur betreffenden Jahreszeit den Fluss erreichen konnten. Der Zeitpunkt und die meteorologischen Verhältnisse stimmten auch damit überein, dass der direkte Sonnenschein in diesem Falle zur Eislösung hat mitwirken müssen.

Um einen objektiven Überblick über diesen Faktor zu erhalten, wurden im Abschnitt 10 die Karten ausgearbeitet, die die maximale lokale Sonnenscheindauer in dem Gebiet Koppang—Bellingmo angeben. Aus diesen Karten ist ersichtlich, dass auf der Fallstrecke von Barkald (bei 436 km auf der Abb. 7) 15—20 km stromabwärts, wo mehrere Eisgänge aufgezeichnet worden sind, die Sonnenstrahlen auch mitten im Winter den Wasserlauf erreichen werden können.

Eine wichtige Rolle spielt offenbar auch die *diffuse Lichtstrahlung* vom Himmel und von den Wolken, die ins Eis und Wasser hineindringt. Die Wärmeabgabe der Oberflächenschicht wird dadurch nur wenig beeinflusst, und es kann daher die Bildung von Eis an der Oberfläche stattfinden, während die tieferen Schichten durch Einstrahlung erwärmt werden. Dass diese Wirkung unter Umständen auffällig sein kann, zeigt die im vorigen Abschnitt erwähnte volkstümliche Regel aus Mittel-Schweden.

Die Wirkung der Einstrahlung betreffend sei übrigens auf den Versuch hingewiesen, der im Abschnitt 15 beschrieben worden ist.

Für die lösende Wirkung der Einstrahlung ist auch die Beschaffenheit des Grundeises von Bedeutung; darauf werden wir bei f) zurückkommen.

Betreffs e), *eine Steigerung der Gegenstrahlung der Atmosphäre*, sei erstens darauf hingewiesen, dass eine solche Zunahme der Wärmeeinstrahlung die Unterkühlung der Oberflächenschicht verringern wird. Dadurch wird nicht nur die Produktion von losem Grundeis herabgesetzt, sondern auch die Zufuhr zur Bodenschicht von unterkühltem Wasser. Es muss für eine feste Grundeisschicht ein Grenzwert der Wärmeabgabe existieren, bei dem das Wachstum aufhören wird; dafür wird die jeweilig stattfindende Wärmezufuhr sorgen. Wenn dieser Grenzwert der Wärmeabgabe, die durch unterkühltes Wasser stattfindet, nicht erreicht wird, ist das Gleichgewicht gestört und Grundeis muss schmelzen. Man muss demnach schliessen, dass eine erhöhte Wärmeeinstrahlung in die Oberflächenschicht indirekt als eine erhöhte Wärmezufuhr zur Bodenschicht des Grundeises wirken würde. (Es muss daran erinnert werden, dass das Grundeisgebilde vom Wasser

mehr oder weniger durchströmt wird.) Wir werden bei der Besprechung einzelner Eisgänge nachweisen können, dass dies auch der Fall ist.

Die Gegenstrahlung der Atmosphäre, von der die effektive Ausstrahlung abhängig ist, haben wir in dem Abschnitt 11 behandelt. Die Grundlage bildete die empirische Formel (11,3) von Ångström, die als Durchschnitt einer grossen Anzahl von Messungen gewonnen wurde und somit zur Voraussetzung eine durchschnittliche Zusammensetzung der Atmosphäre hat. Eine Abweichung von dieser durchschnittlichen Zusammensetzung wird eine geänderte Gegenstrahlung bzw. effektive Ausstrahlung bewirken. Besonders wichtig für unsere Untersuchung ist das Eintreten einer *Inversion*. Wenn eine Sprungschicht der Temperatur und der Feuchtigkeit existiert, so ist die wärmere Schicht von um so grösserem Einfluss auf die effektive Ausstrahlung, je tiefer die Sprungschicht gelegen ist. *In erster Annäherung ist die wirkliche effektive Ausstrahlung aus den Werten  $T'$  und  $f'$  zu berechnen, die bei Extrapolation der Verhältnisse der wärmeren Schicht für die Erdoberfläche gelten würden.*

Es sei z. B. die Wassertemperatur  $0^{\circ}$  C und die Lufttemperatur an der Erdoberfläche  $-20^{\circ}$  C. Bei Bewölkung 0 ist die Ausstrahlung gemäss (11) dann  $= 16,8$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde. (Tabelle Abb. 10 u. 11.) Es kommt dann ein warmer Luftstrom z. B. oberhalb 500 m Höhe herein, sodass die Temperatur dort auf  $0^{\circ}$  C steigt. Bei einem Temperaturgradienten von  $0,5^{\circ}$  C/100 m würde dies einer Temperatur von  $2,5^{\circ}$  C an der Erdoberfläche entsprechen. Die entsprechende effektive Ausstrahlung wäre  $9,6$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde bei klarem Himmel. Der warme Luftstrom wird aber Wolken bilden; wenn wir  $N=10$  und nur hohe Wolken annehmen, für welche  $c=0,7$  zu setzen ist (Tabelle 13), so wird die effektive Ausstrahlung auf  $6,6$  cal/cm<sup>2</sup>Stunde reduziert.

Als Resultat können wir daher folgendes aussprechen, wobei wir auch die Änderung der effektiven Ausstrahlung mit der Bewölkung einschliessen:

*Ohne Änderung der Lufttemperatur an der Erdoberfläche kann die effektive Ausstrahlung derselben bedeutend abnehmen, wenn die Bewölkung zunimmt, oder bei Ersetzen der höheren Luftschichten durch wärmere Luft, oder durch beides zusammen.*

Zur Berechnung der Abnahme dienen die im Abschnitt 11 gegebenen Tabellen; im Falle einer Inversion wird in erster Annäherung von der untersten kalten Schicht abgesehen und die Temperatur und Feuchtigkeit der extrapolierten warmen Schicht für die Erdoberfläche angewandt.

Betreffs  $f$ ), die Wärmezufuhr bei eintretender *Temperatursteigerung*, können wir uns in Kürze fassen. Bei einer Zufuhr von warmer Luft, welche sich bis zur Erdoberfläche hinab erstreckt, wird nicht nur die effektive Ausstrahlung sondern auch die Wärmeabgabe durch Verdunstung und Austausch herabgesetzt. Bei Temperaturen über null Grad kann der resultierende Wärmestrom sein Vorzeichen wechseln. Dass eine solche Änderung eine Lösung der Grundeisdecke bzw. der Eisdämme bewirken kann, ist einleuchtend. Es ist auch eine bekannte Erfahrung, dass Eisgänge oft die Folge eines Wetterumschlags sind. Wir werden unten Beispiele davon angeben.

In Verbindung mit der oben angegebenen Analyse der möglichen Ursachen zur Lösung von Grundeis bzw. von Eisdämmen, wollen wir auch darauf aufmerksam machen, dass *die Beschaffenheit des Grundeises* ein wichtiger Faktor ist. Wir haben früher (Abschnitt 31) erörtert, dass langsam gebildetes Grundeis grössere Festigkeit haben kann als Grundeis, das bei der durch strenge Kälte verursachten intensiven Produktion entsteht. Dementsprechend wäre zu erwarten, dass Eisdämme, die unter den letztgenannten Bedingungen gebildet wurden, eine kleinere Festigkeit und Stabilität aufweisen werden. Die Beobachtungen deuten auch darauf hin, dass dies der Fall ist. Die meisten Eisgänge treten während strenger Kälte oder bei dem Übergang von strenger Kälte zu mildem Wetter auf, während dagegen bei einer längeren Periode von mässiger Kälte grosse Grundeissschichten gebildet werden können, die bei einem vorübergehenden Wetterumschlag

nicht gelöst werden; solche Beispiele sind aus dem Beobachtungsmaterial von der A t n a bekannt.

Aus der oben gegebenen Analyse können wir folgern, dass *die Änderung der meteorologischen Faktoren, die Einstrahlung, Ausstrahlung, Verdunstung und Austausch bestimmen, als Hauptursache eines Eisganges zu betrachten ist*. Es muss aber noch hinzugefügt werden, dass die *Vorgeschichte der Grundeisbildungen auch in Betracht zu ziehen ist*.

Kurz gesagt sind die meteorologischen Änderungen jedenfalls als wichtige, wahrscheinlich auch als notwendige, aber nicht immer als hinreichende Bedingungen der Eisgänge zu betrachten.

### 33. Anwendung auf Eisgänge in norwegischen Wasserläufen.

Die Analyse der vorhergehenden Abschnitte werden wir auf die Eisgänge anwenden, die während der Jahre 1926—29 in den Wasserläufen G l o m m a (mit der A t n a) und T r y s s i l e l v e n eingetroffen sind<sup>1)</sup>. Es muss dabei bemerkt werden, dass die meteorologischen Observationen nur zur Rekonstruktion der Hauptzüge der meteorologischen Verhältnisse brauchbar sind. Sie geben nur Messungen zu drei Zeitpunkten des Tages, 8, 14 und 19 Uhr, und in den Zwischenzeiten haben vor allem Bewölkung und Wind grossen Abweichungen unterworfen sein können. Zur Beurteilung der Temperaturverteilung in der Höhe werden die Observationen von R ö r o s sowie die Wetterkarten (von 8 Uhr morgens) des Norwegischen Meteorologischen Instituts verwendet.

*Eisgang der Glomma und der A t n a, 2. Dez. 1926.* Dieser traf am Ende einer Kälteperiode ein. Die Temperatur in Österdalen stieg sowohl in S t r a n d als auch in R ö r o s um sechs bis sieben Grad bis nahe an den Nullpunkt. Ein gleichzeitig eingetretener Barometerfall zeigte, dass eine warme Luftschicht von bedeutender Mächtigkeit hereingeströmt war. Dies wird von der Wetterkarte bestätigt. Am 2. Dez. kommt ein Regengebiet über Süd-Norwegen herein, mit starkem Wind an der ganzen Westküste. Die warme Luft dringt über das Land ein und bahnt den Weg für den nächsten Vorstoss, der am 3. Dez. kommt.

*Eisgang der Glomma, 11. Dez. 1926.* Dieser schwere Eisgang traf bei Umschlag zu mildem Wetter ein, dessen Wirkung durch den stark erhöhten Wind verstärkt wurde. Die Wetterkarte zeigt, dass am 11. Dez. ein Regengebiet mit westlichem starken Wind über die Küste zwischen B e r g e n und B o d ö hereingekommen ist. Die Front der warmen Luft passiert um 8 Uhr eine Linie R ö r o s—H a p a r a n d a.

*Eisgang der Glomma, 23. Dez. 1926.* Dieser traf bei tiefer Temperatur ( $-20^{\circ}\text{C}$  bei S t r a n d) ein, aber Wind und Bewölkung zeigen eine Änderung in höheren Schichten an. Dies wird durch die Observationen in R ö r o s bestätigt, wo die Temperatur am Morgen von  $-24^{\circ},7$  bis  $-2^{\circ},3$  stieg. Es ist eine ausgeprägte Inversion. Die Wetterkarten zeigen einen Hochdruck über dem südlichen Norwegen; ein bedeutender Vorstoss kommt herein. Im nördlichen Norwegen erreicht die Grenzfläche der warmen Luftmassen die Erdoberfläche.

*Eisgang der Glomma, 15. Nov. 1927.* Die Temperatur stieg bei S t r a n d von  $-20^{\circ},3$  bis  $-8^{\circ},4$ , die Bewölkung nahm stark zu, der Wind kam von NW, wahrscheinlich böigen Charakters. R ö r o s meldet: ganz bewölkt und neblig, die Temperatur war am Morgen von  $-15^{\circ},4$  bis  $-6^{\circ},8$  gestiegen. Strenge Kälte hatte längere Zeit gedauert. Die Wetterkarten zeigen einen Hochdruck über Süd-Norwegen. Eine Zyklone ist eben nördlich von Norwegen passiert, und eine neue ist im Passieren begriffen. Eine Temperatur-

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», l. c.

grenze ist von Varangerfjord bis Helgeland zu beobachten. Das südliche Norwegen befindet sich unterhalb einer Grenzfläche eines wärmeren Luftstromes.

(Die lang dauernde Kälte hat offenbar zur Folge gehabt, dass eine mässige Änderung der Strahlungsverhältnisse einen Eisgang bewirken konnte.)

*Eisgang der Glomma, 25.—26. Nov. 1927.* Die Temperatur bei Strand war gleichmässig,  $-7^{\circ}$  bis  $-8^{\circ}$ . In Røros stieg die Temperatur von  $-13^{\circ},8$  bis  $-2^{\circ},8$ , es wurde ganz bewölkt und etwas Schnee fiel. Der Luftdruck war im Steigen. Die Wetterkarten zeigen während der vorhergehenden Tage einen Hochdruck über Russland. Am 23. kommt ins Norwegische Meer ein kräftiger Luftstrom, welcher den Luftdruck dort vertieft. Die warmen Luftmassen senden während der folgenden Tage mehrere Vorstösse über die Skandinavische Halbinsel hinein, welche nach und nach den russischen Hochdruck reduzieren. Die kalte Luft in Österdalen bleibt dabei in Ruhe.

*Eisgang der Glomma, 11. Dez. 1927.* Dieser traf bei tiefer Temperatur in Österdalen ein. In Røros dagegen stieg die Temperatur von  $-15^{\circ},5$  bis  $0^{\circ},5$ . Die Wetterkarten zeigen einen Hochdruck von Südost-Russland bis Süd-Norwegen, wovon ein Sattel nach Grönland fortsetzt. Ein Vordringen warmer Luft im Eismeer nördlich von Finnmarken wird im Laufe des 11. Dez. verstärkt, und der warme Luftstrom strömt südwärts, sodass der Hochdruck über Süd-Norwegen am 12. Dez. verschwunden ist.

*Eisgang der Glomma, 18.—19. Dez. 1927.* Dieser traf bei sehr tiefer Temperatur, etwa  $-30^{\circ}$ , ein. Auf Røros liegt die Temperatur unterhalb  $-30^{\circ}$ , aber der Luftdruck fällt in der Nacht, der Himmel bewölkt sich, und der Wind nimmt zu. Dass ein warmer Luftstrom in der Höhe hereingekommen ist, wird von den Wetterkarten bestätigt.

*Eisgang der Glomma und Atna, 5. Dez. 1928.* Dieser traf bei Umschlag zu mildem Wetter ein. Direktes Sonnenlicht hat wahrscheinlich auch mitgewirkt, wie eine Inspektion an der Atna einige Tage später erweisen konnte (vgl. Abschnitt 32). Die Wetterkarten zeigen einen kräftigen Vorstoss warmer Luft über Süd-Norwegen mit ausgedehntem Regen an seiner Front.

*Kleine Eisgänge bei Tolga in der Glomma, in der Nacht vom 14.—15. Dez. und am 16. Dez. 1928.* Am 14. und 15. ist es kalt in Österdalen, aber ein kleiner Schneefall bei Strand (15. Dez.) deutet auf Änderungen in den höheren Schichten. Am 16. ist starke Kälte bei Strand und in Røros ( $-25^{\circ}$  bis  $-30^{\circ}$ ). Rena und Engerdalen melden etwas Schnee. Die Wetterkarten zeigen, dass ein Hochdruck während mehrerer Tage über Skandinavien und Finnland gelegen hat. Am 14. und 15. passieren südlich von diesem Hochdruck mehrere Vorstösse warmer Luft, deren Niederschlagsgebiet sich über Süd-Schweden nach N erstreckt. Ein kleines Schneegebiet liegt östlich von Røros am Morgen des 15. Dez. Am 16. Dez. kommt eine recht kräftige Front von West, und eine allgemeine Strömung warmer Luft strömt über Süd-Norwegen herein ohne die Erdoberfläche in Österdalen zu erreichen.

*Anfang eines Eisganges bei Urstrømmen in der Glomma 21. Dez. 1928.* Am Vormittag stieg die Temperatur bei Strand und in Røros um etwa  $7^{\circ}$ . Die Wetterkarten zeigen, dass am 20. Dez. eine Warmfront über Süd-Norwegen hereingekommen ist ohne den Luftdruck nennenswert zu ändern. Am 21. fällt etwas Niederschlag in Ost-Norwegen und in Trøndelagen. Der schwache Vorstoss hört auf.

*Eisgang im Tryssilelven, 6. Jan. 1929.* Dieser traf nach einer langen Kälteperiode ein, bei einem Temperaturanstieg von  $7-8^{\circ}$  C und bei zunehmendem Wind. Die Wetter-



karten zeigen einen Hochdruck von Süd-Norwegen bis Mittel-Russland, und der Luftdruck wird durch einen östlichen kalten Luftstrom erhöht, der sich von Russland bis über die Britischen Inseln erstreckt. Eine warme Luftmasse überflutet am 5. Jan. das Norwegische Meer bis an die Küste von Statt bis Nordkap; diese Luftmasse wird in die Höhe gezwungen und gibt am 6. Jan. um 8 Uhr bewölkten Himmel im Hochdruckgebiet, unter anderem auch im östlichen Norwegen.

*Eisgang der Glomma bei Tolga, 8. Jan. 1929.* An den meteorologischen Terminbeobachtungen sind keine besonderen Änderungen merkbar. Die Wetterkarten zeigen, dass ein Hochdruck über dem inneren Skandinavien und dem Bottnischen Meerbusen liegt. Eine warme Luftmasse von bedeutendem Umfang strömt am 8. Jan. vom Norwegischen Meer über Skandinavien herein, wodurch der Luftdruck etwas sinkt. Die Grenzfläche der warmen Luft erreicht hier zwar nicht die Erdoberfläche, aber die Bewegung der warmen Luft kann aus den Druckänderungen abgeleitet werden.

*Eisgang im Tryssilelven, 19. Jan. 1929.* Dieser Eisgang ist von besonderem Interesse, denn in diesem Wasserlauf kommen Eisgänge sehr selten vor; in der Glomma dagegen traf bei dieser Gelegenheit kein Eisgang ein. Der Eisgang traf nach ziemlich gleichmässiger Kälte bei etwa  $-20^{\circ}$  C ein. Engerdalen in Tryssil meldet klaren Himmel zum Observationstermin. R ö r o s notiert Schneefall, der Luftdruck steigt und am Mittag wird der Himmel klar. Aus den Terminbeobachtungen ist nichts Besonderes abzuleiten. Die Wetterkarten dagegen geben wichtige Auskunft. An den vorhergehenden Tagen liegt ein Hochdruck über Skandinavien, aber am 18. Jan. kommt vom Norwegischen Meer eine begrenzte warme Luftmasse, eine intensive Zyklone von kleinem Umfang, die über Süd-Norwegen passiert und am 19. nach der Ostsee gekommen ist. Am 18. war Sturm auf der Strecke Lindesnes—Færder. R ö r o s und S t r a n d melden Windstille, sowohl am Abend des 18. als auch zu allen Terminen des 19. R e n a meldet am 19. nördlichen Wind, Stärke 1. Tryssil hat nördlichen Wind, Stärke 1 oder 2, mit Umschlag zu südlichem Wind, Stärke 2, im Laufe der Nacht 18.—19. Jan. Diese Observationen deuten darauf hin, dass die intensive kleine Zyklone, die 18.—19. Jan. über Süd-Norwegen passierte, eine sehr steile Grenzfläche gehabt haben muss; diese hätte dann offenbar das nördliche Österdalen nicht berührt sondern über Tryssil passiert, wo an der Erdoberfläche südlicher Wind ohne erhebliche Temperatursteigerung auftrat, wie die Observationen es zeigen. Durch die Passage der warmen Luftmassen müssen die Einstrahlung und Ausstrahlung in Tryssil 18.—19. Jan. starken Änderungen unterworfen gewesen sein, und darin wäre der Grund für den eigentümlichen Fall zu suchen, dass Eisgang in Tryssil auftrat, aber nicht in Österdalen.

Die oben erwähnten Eisgänge umfassen *sämtliche* notierten Eisgänge während der Jahre 1926—29 (von früheren Jahren liegt kein vollständiges Material vor). Unsere Analyse zeigt, dass *in allen Fällen am Tage des Eisganges derartige meteorologische Änderungen eingetroffen sind, die eine Lösung von Grundeis bzw. Eisdämmen bewirken können.* Entweder ist während einer Kälteperiode ein warmer Luftstrom über Österdalen hereingekommen, der die kalte Luft wegtreibt und einen Wetterumschlag auch im Tal gibt, oder der warme Luftstrom strömt in der Höhe oberhalb der kalten Bodenschicht, wodurch die Strahlungsverhältnisse geändert werden. Eine Hauptursache der erwähnten Eisgänge ist damit klargelegt. Die Bedeutung der Beschaffenheit des Grundeises für die Auslösung eines Eisganges muss nach diesem Resultat in zweite Reihe gestellt werden. Für eine genauere Untersuchung dieser Frage ist aber das bisher vorliegende Material nicht genügend.

Die vorliegende Arbeit ist durch «Norges Vassdrags- og Elektrisitetsvesen» veranlasst worden und wurde von dessen Vorstand mit bereitwilligem Interesse unterstützt. Es sei mir auch gestattet zu erwähnen, dass ich Herrn Vassdragsdirektör Hugo-Sørensen, sowie meinen Kollegen der Studienkommission, Oberingenieur A. Ekwall, Oberingenieur N. Saxegård und Ingenieur O. B. Solem viele Anregungen betreffs des vielseitigen Eisbildungsproblems schuldig bin.

Die in Abschnitt 16 beschriebene Messung der Unterkühlung wurde durch Mittel ausgeführt, die von der Stiftung «Den Tekniske Höiskoles Fond» bewilligt worden waren.

Physikalisches Institut der Norwegischen Technischen Hochschule.

Nidaros (Trøndhjem) im Juni 1930.

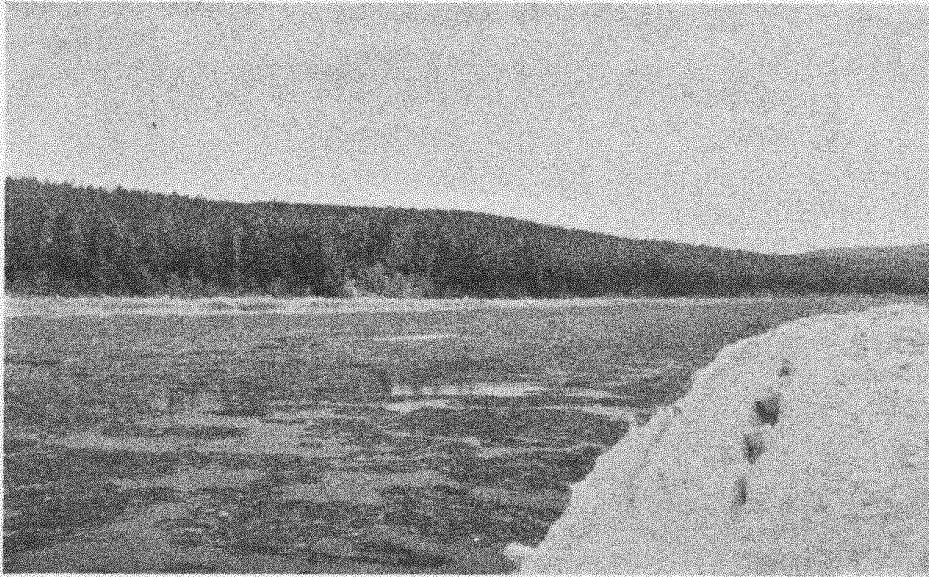


Abb. 24.

Foto O. B. Solem.

Loses Grundeis in der Glomma. Die steile Eiswand links auf dem Bild wurde durch einen vorhergehenden Eisgang gebildet.

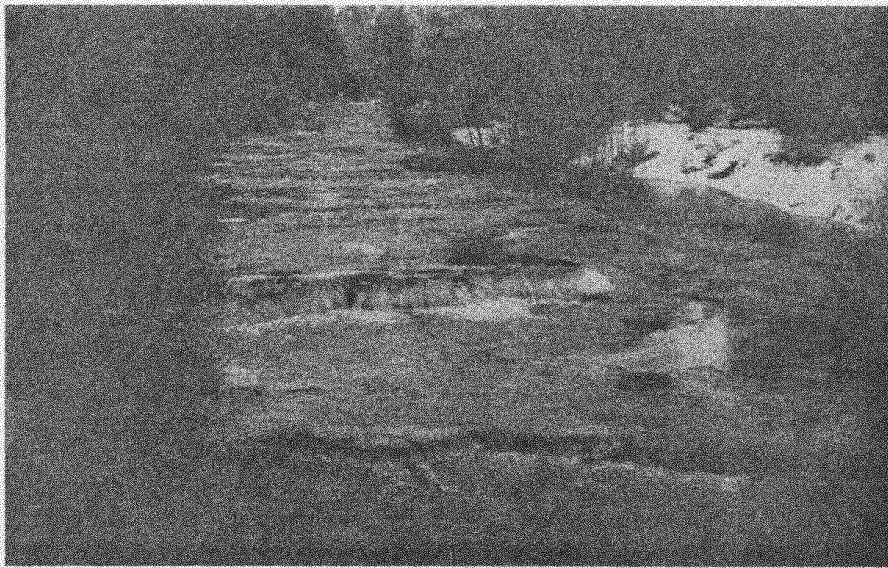


Abb. 25.

Foto O. B. Solem.

Die Bildung von Grundeis und Eisdämmen in der Trya (ein Nebenfluss der Glomma) hat das Flussbett um 1–2 m erhöht.

Zweitens aber besteht für die unterkühlte Wasserhaut auch die Möglichkeit Eis zu bilden, wenn sich die Haut der festen Bodenfläche des Wasserlaufes anschmiegt; dadurch entsteht das  *feste Grundeis* , das unter günstigen Umständen mächtige Eismassen bilden kann<sup>1)</sup>. So zeigt z. B. die Abb. 25 wie das ganze Flussbett von einer Grundeissschicht von etwa 1,5 m Dicke ganz bedeckt worden ist.

<sup>1)</sup> Vgl. auch G. Lüscher: Das Grundeis, Aarau 1906.



Abb. 26.

Foto O. B. Solem. 16-12-28.

Bildung von Grundeis in der Atna, an einer Holzstange, die in dem offenen Wasserstrom während der Nacht 15.—16. Dez. 1928 angebracht war. Beim Herausnehmen ist das Grundeis teilweise abgefallen.

Das feste Grundeis kann in recht verschiedenen Formen gebildet werden, die offenbar mit der Intensität des Bildungsprozesses in Zusammenhang stehen. Die Unterschiede sind aber nicht grösser als die Unterschiede, die man an den verschiedenen Schneeformen beobachten kann, die unter thermischen und dynamischen Verhältnissen, die erheblich voneinander abweichen, gebildet worden sind. Nach Beobachtungen an der Atna und der Glomma in Österdalen sind oft zwei Typen von festem Grundeis zu unterscheiden: An Tagen mit mässiger Abkühlung, also bei relativ langsamer Produktion, wird sich das Grundeis als einigermassen feste und zähe Schicht am Boden des Wasserlaufes bilden; stösst man eine Stange in die Schicht hinein, werden ohne Schwierigkeit Stücke der blättrigen und ziemlich porösen Schicht losgerissen und steigen zur Oberfläche hinauf. Man kann auch beobachten, dass einzelne grosse Steinblöcke, die aus dem Boden emporragen, vom Grundeis nicht bedeckt werden, was der besseren Wärmeleitung vom Boden zuzuschreiben ist. Die Grundeis-Schicht der Abb. 25 wurde in der Hauptsache von diesem Typus gebildet.

Auf andere Weise wird das Grundeis an Tagen mit starker Abkühlung, also bei schneller Produktion, gebildet; es werden dann locker zusammenhängende Kristallmassen von korallenähnlichem Aufbau gebildet, welche leicht loszulösen sind. Diese setzen sich an allen festen Gegenständen ab; Abb. 26 zeigt die Ablagerung solchen Grundeises an einer Holzstange. Die lockere Struktur bewirkt, dass freischwimmende derartige Kristallmassen einen sehr kleinen Auftrieb haben; sie folgen den Wasserströmungen und geben leicht Anlass zur Verengung des Durchlaufes und nachfolgender Stauung des Wassers.

An Wasserkraftwerken können bekanntlich die Bildung von Grundeis und die Anhäufung von losem Grundeis, das unter Umständen die ganze Wassermasse durchsetzt, erhebliche Schwierigkeiten bewirken.<sup>1)</sup> Das oben besprochene Grundeis kann bei der Glomma in Österdalen das ganze Flussbett auf lange Fallstrecken vollständig mit einer dicken grünlichen Eisschicht decken. Bei dem Nebenfluss Atna ist die Grundeisbildung

<sup>1)</sup> Für norwegische Verhältnisse, vgl. A. Ruths, *Isvanskeligheter ved norske kraftanlegg*, Elektrotekn. tidskr. 1925, S. 177.



Abb. 27.

Foto O. B. Solem. 4-1-1928.

Eisdamm bei Barkald in der Glomma, am Anfang der Stromschnelle bei Urströmfoss.



Abb. 28.

Foto O. B. Solem 4-1-1928.

Eisdamm bei Barkald in der Glomma.

eisschicht abgeändert. Die ursprüngliche Topographie des Flussbodens wird also nur eine einleitende Rolle spielen. Demnach sind auch die Stellen, wo sich Eisdämme bilden, in der Regel sehr wechselnd. Nur an besonders günstigen Stellen werden sie oft regelmässig gebildet, wie am Anfang einer stärkeren Stromschnelle.

Auf jeden Fall aber ist zu betonen, dass die Bildung der Eisdämme ein *stabiler* Prozess ist, der in der Hauptsache einerseits dynamisch von dem Gefälle und andererseits thermisch von der Abkühlung der Oberfläche des strömenden Wassers bedingt ist.

Die wichtige Folge dieser Bildung der Eisdämme ist, dass die betreffende Fallstrecke *treppenförmig umgestaltet* wird, wodurch das Gefälle auf eine Reihe kleiner Wasserfälle

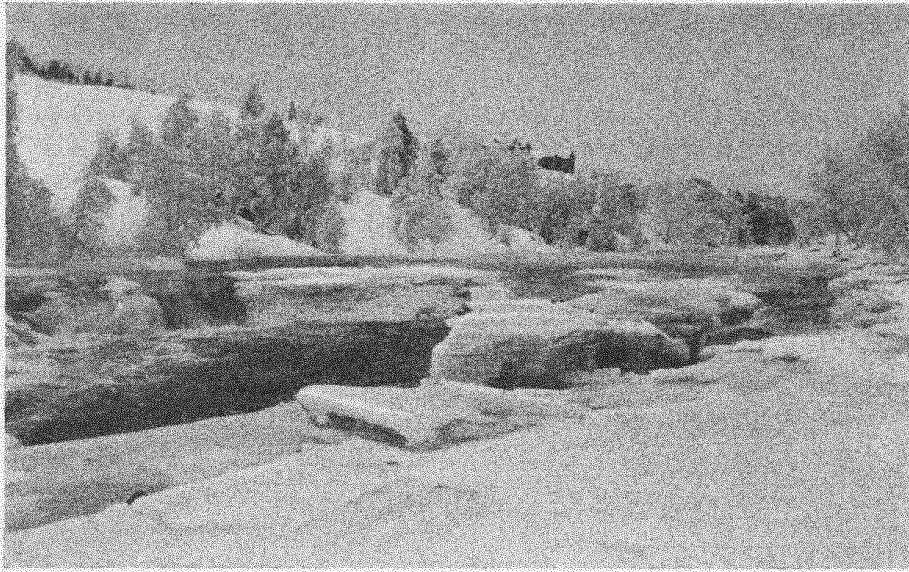


Abb. 29.

Foto O. B. Solem. 9-1-1929.

Eisdamm bei Tollfossen in Tolga (Glomma). Rechts die Reste eines Eisdammes, wo der Eisgang am 6. Jan. 1929 angefangen hatte. Links im Hintergrund ein neuer Eisdamm von 2 m Höhe.

an den Eisdämmen konzentriert wird. (Dies ist z. B. deutlich in den Abb. 25 und 29 zu sehen.) Die aufgedämmten Wassermagazine, wo die Wassergeschwindigkeit klein ist, werden bei fortgesetzter Kälte bald von zusammenhängenden Eisdecken bedeckt. Die Bildung der Eisdämme ist ein interessantes Beispiel für die natürliche Stabilisierung, durch die einem stabilen Gleichgewichtszustand der Wärmeprozesse zugestrebt wird. Wenn in der oben beschriebenen Weise die Fallstrecke treppenförmig eisbedeckt worden ist, so wird durch die zunehmende Eisdecke (bezw. hinzukommende Schneedecke) die Wärmeabgabe immer mehr herabgesetzt, und die Wärmezufuhr macht sich in steigendem Masse geltend: die Einstrahlung von Sonnenlicht und diffusem Licht, die Wärmezufuhr vom Boden und die Erwärmung durch Umsatz der Fallenergie. Die Eisbildung wird aufhören, die Grundeissschicht wird zuerst dort schmelzen, wo die Wärmezufuhr am grössten ist (an den Stellen der grössten Wassergeschwindigkeit), und das Wasser findet seinen Weg unterhalb einer schützenden Eisdecke. An den Stellen, wo das Gefälle am grössten ist, wird der Wasserlauf offen bleiben, und durch die Grösse dieser offenen Flächen wird auch bis zu einem gewissen Grade die Wärmeabgabe reguliert. Wir können hier die Betrachtungen des Abschnittes 29 als einen Anhaltspunkt für eine quantitative Beurteilung benutzen.

Der oben geschilderte Stabilisierungsprozess kann in unseren Breiten in solchen Wasserläufen zur Vollendung kommen, in denen die Wirbelbildung so stark ist (bei Gefällen grösser als  $1-2\text{‰}$ ), dass die Bildung einer normalen Eisdecke verhindert wird. Wo die Wirbelbildung gering ist, also bei schwachem Gefälle, wird die Bildung einer Eisdecke durch die Grundeisproduktion in einer abgeänderten Weise gefördert. Es werden dabei vor allem das lose Grundeis und vom Boden losgelöstes Grundeis als Dämpfung der Wirbelbewegung wirken, sodass eine zusammenhängende Oberflächenkruste der schwimmenden Eismassen nach und nach gebildet wird, an die sich der regelmässige Zuwachs anschliesst. Beim Lösen des Bodeneises spielt dabei die tägliche Periode der Einstrahlung eine gewisse Rolle. Beim Einsetzen der Kälte wächst das Grundeis am meisten in der Nacht, weniger am Tag, und der Zustand nähert sich bald einem Gleichgewicht. Ist dieser Gleichgewichtszustand z. B. am Ende eines Tages erreicht worden, so wird während der folgenden Nacht so viel Eis gebildet werden, dass die Wärmezufuhr zu den tieferen

Wenn man dieselbe Bedingung für einen grösseren Wasserlauf als gültig betrachten darf, so wären die dynamischen Bedingungen für die Fortpflanzung einer Flutwelle nur vorhanden, wenn der Wasserlauf ein gleichmässiges Gefälle  $> 0,004$  bzw.  $> 0,0015$  hätte.

Diese Überlegung wird durch die Erfahrung bestätigt. Nach Angaben von A. Ekwall<sup>1)</sup> ist in Schweden *das Auftreten von Wintereisgängen auf solche Strecken begrenzt, wo das Gefälle grösser ist als 2 m/km (= 0,002)*. Dies stimmt auch mit den Beobachtungen in norwegischen Wasserläufen überein.

Wo das Gefälle diesen kritischen Wert nicht erreicht, werden die Bedingungen für die Fortpflanzung einer Flutwelle verschwinden. Wenn die Flutwelle in ihrem Anfang ist, wird vielleicht die horizontale Strecke eines grösseren Eisdammes genügen um die Flutwelle abebben zu lassen. Von diesem Gesichtspunkt aus ist die dynamische Eisbildung mit treppenförmiger Umbildung der Fallstrecke eine gewisse Sicherheit *gegen* das Zustandekommen einer Flutwelle; die Bildung der Eisdämme ist nicht nur in thermischer sondern auch in dynamischer Beziehung ein Stabilisierungsprozess. Andererseits ist zu bemerken, wenn ein einzelner Eisdamm wegen irgendeiner Schwächung durchbricht, dann auch die übrigen Eisdämme in der Regel durch dieselbe Einwirkung geschwächt worden sind, und die treppenförmige Umbildung bedeutet dann ein erhöhtes Risiko.

Zur Illustration der Wintereisgänge sei auf die folgenden Abbildungen hingewiesen: In der Abb. 29 (Tolga) stehen rechts auf dem Bilde die Reste eines Eisdammes, welcher der Ausgangspunkt eines Eisganges am 6. Jan. 1929 war. (Ein neuer Eisdamm ist links und weiter oben deutlich sichtbar.) Der Eisgang ging als Flutwelle eine Strecke von 2 km, wobei alles Eis wegtransportiert wurde, bis nach Tolga neue Brücke, wo die Eismassen gestaut wurden, wie Abb. 30 zeigt. In Abb. 31 sind die Eismassen abgebildet, die an die Front eines Eisganges in Trysil (<sup>10/1</sup> 29) bis zu diesem Endpunkt vorgeschoben wurden.

Wie oben bemerkt, kommt das Eintreffen eines Wintereisganges sowohl bei Umschlag zu mildem Wetter als auch bei anhaltender strenger Kälte vor. Es liegt natürlich die Möglichkeit vor, dass ein einsetzender Bruch eines Eisdammes wegen zufälliger Überlastung

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Østerdalen» etc., l. c.



Abb. 30.

Foto O. B. Solem. 9-1-1929.

Eismassen, die durch einen Eisgang bei Tolga in Østerdalen aufgestaut wurden.

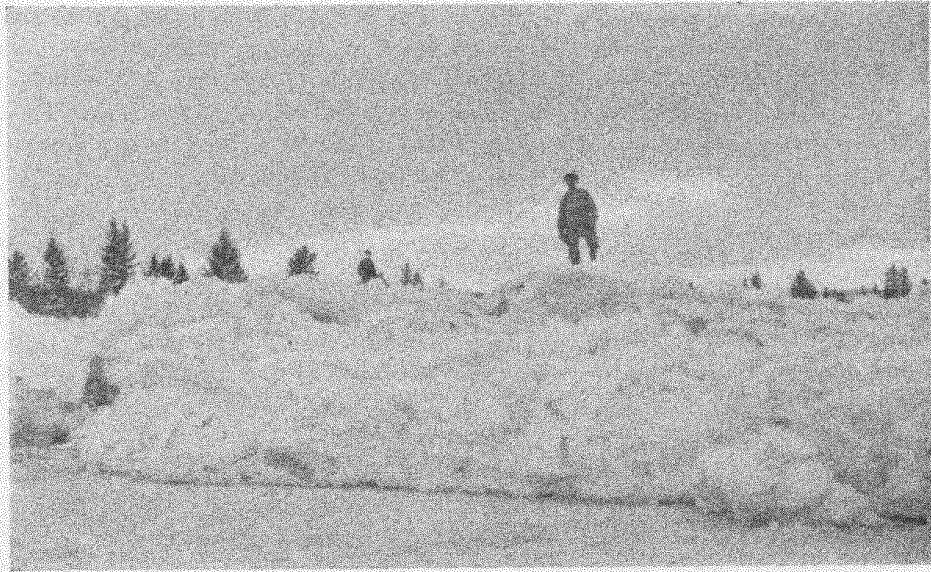


Abb. 31.

Foto O. B. Solem. 11-1-1929.

Das untere Ende der aufgelagerten Eismassen eines Eisganges in Trysil, der an dieser Stelle gebreust wurde.

auf einem schwachen Punkt bewirkt wird; wie früher betont, ist aber die Bildung der Eisdämme ein Prozess, der auf Stabilität hinzielt, und daher wollen wir im folgenden die physikalischen Bedingungen untersuchen, die ausser der oben erwähnten dynamischen (dem kritischen Gefälle) beim Eintreffen eines Eisganges von Wichtigkeit sind.

Eine Schwächung eines Dammes, der vom Eis gebaut ist, wird vor allem durch *Wärmezufuhr* bewirkt. Diese kann in folgender Weise geschehen:

- a) Durch Wärmeleitung vom Bodenmaterial.
- b) Durch Erwärmung durch Umsatz der Fallenergie.
- c) Durch Zufuhr von wärmerem Grundwasser.
- d) Durch Einstrahlung von Sonnenlicht und diffuser Himmelsstrahlung.
- e) Durch Steigerung der Gegenstrahlung der Atmosphäre ohne Änderung der Lufttemperatur an der Erdoberfläche.
- f) Durch erhöhte Wärmezufuhr aus der Luft bei eintretender Temperatursteigerung.

Betreffs a) sei bemerkt, dass die Grösse des Wärmestromes vom Boden den anderen Wärmeprozessen gegenüber von geringer Bedeutung ist, wenn die langen Perioden betrachtet werden (vgl. Abschnitt 14). Die gleichmässige Zufuhr von Wärme wird den Zuwachs einer Grundeissschicht begrenzen, aber eine jähe Lösung nicht bewirken. Für die kurzen Perioden des Wärmestromes vom Boden, welche durch die wechselnde Lichteinstrahlung verursacht werden, vgl. unten bei d).

Betreffs b) sei bemerkt, dass der Umsatz der Fallenergie, der im Abschnitt 26, Gl. (26,4), gegeben ist, eine sehr gleichmässige Zufuhr von Wärme bedeutet und daher für die Lösung eines Eisdammes von geringer Bedeutung sein muss.

Betreffs c) ist zu bemerken, dass eine lokale Zufuhr von wärmerem Grundwasser die Lösung gebildeter Eisdämme begünstigen würde. Es wird auch für einzelne Wasserläufe als Erfahrung angegeben, dass solche Faktoren, die auf die Grundwasserzufuhr einwirken, auch die Häufigkeit der Eisgänge beeinflussen<sup>1)</sup>. Als solche Faktoren

<sup>1)</sup> «Vinterisganger i Österdalen», l. c.