

ÜBER DAS VERHÄLTNISS ZWISCHEN DRUCKKRAFT UND WIND

VON

TH. HESSELBERG

(Manuskript am 20. Oktober 1931 eingeliefert.)

Das barische Windgesetz über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind in der Nähe der Erdoberfläche kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

1. Auf der nördlichen Halbkugel erscheint die Luftströmung nach rechts abgelenkt um einen Winkel, dessen Wert im allgemeinen 90° nicht erreicht. Auf der südlichen Halbkugel geschieht die Ablenkung nach links (*Buys-Ballots Gesetz*).

2. Die Windgeschwindigkeit wächst mit der Grösse des Gradienten und ist dort am grössten, wo die Isobaren am engsten aneinanderrücken.

Diese Regeln sind durch die Wetterkarten so gut bestätigt worden, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass sie in den Hauptzügen die Beziehung zwischen Luftdruckgradient und Wind richtig wiedergeben.

Es wurde aber schon vor längerer Zeit von *Cl. Ley*¹⁾, *Loomis*²⁾ und *Hoffmeyer*³⁾ gefunden, dass der Ablenkungswinkel φ für die verschiedenen Windrichtungen im Mittel verschieden ist. Auch das Verhältnis $\frac{v}{G}$ zwischen Windgeschwindigkeit und Druckgradient wurde für die verschiedenen Winde verschieden gefunden.⁴⁾ Diese Ergebnisse sind später von einer Reihe von Verfassern bestätigt worden.⁵⁾

Die von den verschiedenen Autoren gefundenen Verteilungen von φ und $\frac{v}{G}$ nach den Windrichtungen sind sehr verschieden. Trotzdem ist eine gewisse Gesetzmässigkeit nicht zu verkennen. Das Maximum von φ findet man beinahe überall für die Windrichtungen N bis SW, während das Minimum auf die Windrichtungen S bis NE entfällt.

Schon *Cl. Ley* sah die Ursache der geringen Ablenkung der SE-Winde in dem Umstand, dass sie beginnende Winde sind, Luftmassen, die durch das herannahende Minimum erst in Bewegung gesetzt werden und deshalb noch einer geringeren Ablenkung unterliegen, während die NW-Winde auf der Rückseite der Depression schon von weiter

¹⁾ *Cl. Ley*, Results of an Inquiry into the mean Inclination of Wind towards the lower Isobaries. Journal Scottish Met. Soc., Vol. IV, 1873, S. 66.

²⁾ *Loomis*, Results of an Examination of the United States Weather Maps for 1872 and 1873. Amer. Journ. of Science and Arts, Vol. VII, 1874.

³⁾ *Hoffmeyer*, Die Verteilung des Luftdruckes über dem nordatlantischen Ozean während des Winters, und deren Einfluss auf das Klima von Europa. Österreich. Zeitschr. f. Meteor. Bd. XIII, 1878.

⁴⁾ *Cl. Ley* in «Quarterly Journ. of Roy. Met. Soc., Vol. VIII, 1872» und *Sprung* in «Archiv der Deutschen Seewarte 1879».

⁵⁾ Vergl. *Hann*, Lehrbuch der Meteorologie. Dritte Auflage. Leipzig 1913/14, S. 512—516 und S. 761 und 762.

herkommen und daher eine grössere Ablenkung erfahren haben. Dieser Gedanke ist von Köppen¹⁾ weitergeführt und mathematisch ausgedrückt worden. Später habe ich das Problem behandelt und nachgewiesen, dass die Verteilungen von φ im inneren Teile der Zyklonen und Antizyklonen durch die Trägheit der Luftmassen erklärt werden können.²⁾ In einer zweiten Abhandlung³⁾ habe ich mehr allgemein gezeigt, wie die Trägheit der Luftmassen bewirkt, dass der Wind nicht allein von dem Druckgradienten abhängig ist, sondern auch von den Gradientenänderungen, denen die Luftmassen ausgesetzt werden. Im folgenden sollen diese Untersuchungen weitergeführt werden, wobei wir uns auf die Verhältnisse in Erdbodennähe beschränken.

§ 1. Die Beziehung zwischen Druckkraft, Wind und Beschleunigung.

Wir gehen von den Bewegungsgleichungen in folgender Form⁴⁾ aus:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha G_x = \frac{dv_x}{dt} + cv_x - lv_y \\ \alpha G_y = \frac{dv_y}{dt} + lv_x + cv_y \end{cases}$$

wo die Buchstaben bedeuten:

- α = spezifisches Volumen
- G_x = X-Komponente des Druckgradienten
- G_y = Y-Komponente der Druckgradienten
- v_x = X-Komponente der Geschwindigkeit
- v_y = Y-Komponente der Geschwindigkeit
- t = Zeit
- e und l = Konstanten.

Für die Komponenten der individuellen Beschleunigung hat man⁵⁾:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned}$$

Wir werden ein paar einfache Fälle (Fall 1—2) behandeln, bevor wir mit Hilfe der Gleichungen (1) den Einfluss der Trägheit auf den Wind im allgemeinen Fall ableiten (Fall 3).

Fall 1. Wir setzen zuerst voraus, dass der Wind überall im Felde derselbe ist, und dass er sich nicht mit der Zeit ändert. In diesem Fall hat man:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = 0$$

und die Gleichungen (1) reduzieren sich auf:

$$\begin{aligned} \alpha G_{xN} &= cv_x - lv_x \\ \alpha G_{yN} &= lv_x + cv_y \end{aligned}$$

¹⁾ W. Köppen, Über die mechanische Ursache der Ortsveränderung atmosphärischer Wirbel. Österr. Zeitschr. f. Met., Bd. XV, 1880, S. 41.

²⁾ Th. Hesselberg, Über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind im nichtstationären Fall. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, H. 6.

³⁾ Th. Hesselberg, Über eine Beziehung zwischen Druckgradient, Wind und Gradientenänderung. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, H. 7.

⁴⁾ Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup, Die Reibung in der Atmosphäre. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, H. 9, S. 308.

⁵⁾ Th. Hesselberg und A. Friedmann, Die Grössenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Zweite Serie, Bd. I, H. 5, S. 165.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l}{c} \quad \text{und} \quad \frac{v}{\alpha G_N} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + c^2}},$$

wo ψ der Winkel zwischen dem Druckgradienten G_N und dem Wind v ist. (Siehe Fig. 1.) Den Wind in diesem beschleunigungslosen Fall werden wir den Normalwind nennen und den dazu gehörigen Druckgradienten mit dem Index N kennzeichnen.

Fall 2. Wir nehmen jetzt an, dass der Wind im Felde überall derselbe ist, dass er sich aber mit der Zeit ändert. Wir haben dann:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t},$$

und die Gleichungen (1) lauten:

$$\alpha G_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + cv_x - lw_y$$

$$\alpha G_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + lw_x + cv.$$

Wenn wir hier:

$$\alpha G_{x \cdot N} = cv_x - lw_y$$

$$\alpha G_{y \cdot N} = lw_x + cv_y$$

einführen, so bekommen wir:

$$\alpha G_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \alpha G_{x \cdot N}$$

$$\alpha G_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha G_{y \cdot N}$$

oder:

$$\alpha G = \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha G_N$$

In Fig. 2 ist ein Fall dargestellt, in dem der Wind etwas retardiert und nach links gedreht wird. Man sieht, dass der Wind in diesem Fall schwach relativ zur Gradientenkraft ist, und dass der Ablenkungswinkel gross ist.

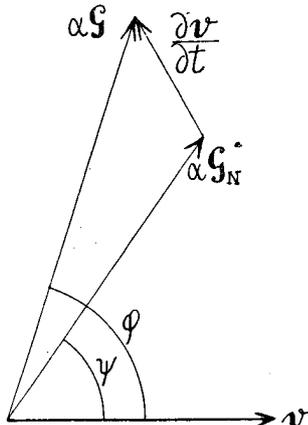


Fig. 2.

Fall 3. Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, in dem der Wind sowohl örtlich wie zeitlich veränderlich ist. Wenn wir dann wieder:

$$\alpha G_{x \cdot N} = cv_x - lw_y$$

$$\alpha G_{y \cdot N} = lw_x + cv_y$$

einführen, so bekommen wir aus den Gleichungen (1):

$$\alpha G = \frac{dv}{dt} + \alpha G_N.$$

Wenn die Beschleunigung in die Richtung von v fällt (Richtung I in Fig. 3), so ist der Wind wenig von dem Gradienten abgelenkt und relativ schwach. Wenn wir die Richtung der Beschleunigung sukzessive ändern, ihre Grösse aber unverändert bleiben lassen, so wird die Pfeilspitze

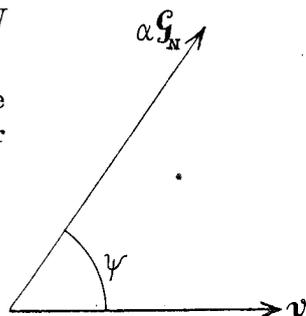


Fig. 1.

des Vektors $\frac{dv}{dt}$ den in Fig. 3 eingezeichneten Kreis beschreiben. Aus der Figur findet man dann leicht folgendes Schema für den Ablenkungswinkel φ und für das Verhältnis zwischen Wind und Druckkraft.

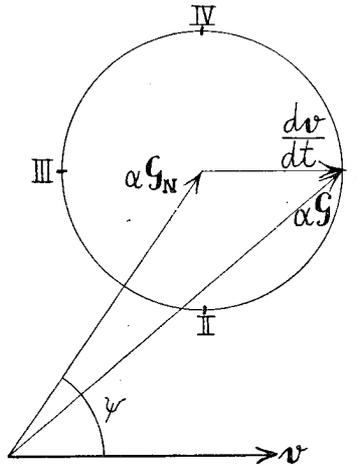


Fig. 3.

Richtung von $\frac{dv}{dt}$ auf Fig. 3	Änderung der Bewegung der Luftmasse	φ	$\frac{v}{\alpha G}$
I	Zunahme der Geschwindigkeit	klein	klein
» II	Rechtsdrehung	klein	gross
» III	Abnahme der Geschwindigkeit	gross	gross
» IV	Links-drehung	gross	klein

Man sieht auch, dass die Ablenkung am kleinsten ist, wenn man Rechtsdrehung und Geschwindigkeitszunahme hat, während das Maximum der Ablenkung bei Links-drehung und Geschwindigkeitsabnahme auftritt. Der Wind ist am kräftigsten relativ zum Gradienten bei Rechtsdrehung

und Geschwindigkeitsabnahme und am schwächsten bei Links-drehung und Geschwindigkeitszunahme.

Es muss aber hervorgehoben werden, dass diese Regeln für die Änderungen der Bewegung der individuellen Luftmasse gelten, und dass diese im allgemeinen von der Windänderung an einem Ort abweichen ($\frac{dv}{dt} \neq \frac{\partial v}{\partial t}$). Es kann z. B. vorkommen, dass der Wind an Ort und Stelle abnimmt, während die Geschwindigkeit der individuellen Luftmasse zunimmt.

Dieses kompliziert die Verhältnisse, und es ist nicht leicht die oben gegebenen einfachen Gleichungen und Regeln auf wirkliche Fälle, z. B. auf den Wind in Zyklonen und Antizyklonen, anzuwenden. Man kann nur ganz qualitativ sehen, dass z. B. die SE-Winde auf der Vorderseite einer heranrückenden Zyklone relativ schwach und wenig von dem Gradienten abgelenkt sein müssen, weil die Luftmassen hier eine Zunahme der Geschwindigkeit erleiden (Fall I in Fig. 3).

Um quantitative Resultate zu erhalten, werden wir Fälle wählen, die in einfacher Weise analytisch behandelt werden können, und die die Verhältnisse in der Natur so genau wie möglich wiedergeben.

§ 2. Ein lineares Bewegungsfeld, das sich ohne Änderungen fortpflanzt.

Wir setzen voraus, dass ein lineares Bewegungsfeld:

$$\begin{aligned} v_x &= Ax + By + C, \\ v_y &= Dx + Ey + F, \end{aligned}$$

wo A , B , C , D , E und F Konstanten sind, sich ohne Änderungen mit einer Geschwindigkeit u fortpflanzt. Wir erhalten dann das Bewegungsfeld:

$$(2) \quad \begin{cases} v_x = A(x - u_x t) + B(y - u_y t) + C, \\ v_y = D(x - u_x t) + E(y - u_y t) + F. \end{cases}$$

Um das entsprechende Druckfeld zu finden, führen wir diese Werte von v_x und v_y in die Bewegungsgleichungen (1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha G_x &= (A^2 + BD - lD + cA)(x - u_x t) + (AB + BE - lE + cB)(y - u_y t) \\ &\quad + (AC + BF - lF + cC - Au_x - Bu_y), \\ \alpha G_y &= (AD + DE + lA + cD)(x - u_x t) + (BD + E^2 + lB + cE)(y - u_y t) \\ &\quad + (CD + EF + lC + cF - Du_x + Eu_y) \end{aligned}$$

Indem man hier:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= A^2 + BD - lD + cA \\ M &= AB + BE - lE + cB \\ M &= AD + DE + lA + cD \\ N &= BD + E^2 + lB + cE \\ O &= AC + BF - lF + cC - Au_x - Bu_y \\ P &= CD + EF + lC + cF - Du_x - Eu_y \end{aligned} \right.$$

setzt und ferner:

$$\alpha G_x = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \alpha G_y = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y}$$

einführt, bekommt man:

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= L(x - u_x t) + M(y - u_y t) + O \\ -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= M(x - u_x t) + N(y - u_y t) + P \end{aligned}$$

Hieraus findet man durch Integration, wenn α als Konstante betrachtet wird:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} -\alpha p &= \frac{1}{2} L(x - u_x t)^2 + M(x - u_x t)(y - u_y t) + \\ &+ \frac{1}{2} N(y - u_y t)^2 + O(x - u_x t) + P(y - u_y t) + Q \end{aligned} \right.$$

wo Q eine Integrationskonstante ist.

Dies ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, die sich mit einer Geschwindigkeit u ohne Änderungen fortpflanzt. Diese Fläche gibt das Druckfeld, das dem Bewegungsfeld (2) entspricht.

Wir haben:

$$\begin{aligned} M &= AB + BE - lE + cB \\ M &= AD + DE + lA + cD \end{aligned}$$

gesetzt oder:

$$(5) \quad AB + BE - lE + cB = AD + DE + lA + cD.$$

Dieses ist die Bedingung dafür ein Druckfeld finden zu können, dass dem Bewegungsfeld (2) entspricht. Nur wenn die Koeffizienten A , B , D und E der Gleichung (5) genügen, ist das Bewegungsfeld (2) dynamisch möglich.

Wenn ein Bewegungsfeld (2) gegeben ist, das die Bedingungsgleichung (5) erfüllt, ist es sehr einfach die Koeffizienten L , M , N , O und P mit Hilfe der Gleichungen (3) zu bestimmen, und Gleichung (4) gibt das entsprechende Druckfeld.

Wenn das Druckfeld gegeben ist, so muss man mit Hilfe der Gleichungen (3) die Koeffizienten A , B , C , D , E und F bestimmen, und die Gleichungen (2) geben dann das Bewegungsfeld. Diese Aufgabe ist aber eine schwierige, weil es sehr mühsam ist, die Koeffizienten A , B , C , D , E und F mit Hilfe der Gleichungen (3) zu bestimmen. Man kann indessen durch ein Drehen des Koordinatensystems eine gewisse Vereinfachung erhalten. Man kann das Koordinatensystem so wählen, dass $M = O$ wird. Das Druckfeld wird dann:

$$(6) \quad -\alpha p = \frac{1}{2} L(x - u_x t)^2 + \frac{1}{2} N(y - u_y t)^2 + O(x - u_x t) + P(y - u_y t) + Q.$$

Wenn dieses Druckfeld gegeben ist, hat man zur Bestimmung der Koeffizienten A , B , D und E die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} L = A^2 + BD - lD + cA \\ O = AB + BE - lE + cB \\ O = AD + DE + lA + cD \\ N = BD + E^2 + lB + cE \end{cases}$$

Wenn man aus diesen Gleichungen A , B , D und E bestimmt hat, so geben die zwei letzten Gleichungen (3):

$$(8) \quad \begin{cases} C = \frac{(Au_x + Bu_y + O)(c + E) + (Du_x + Eu_y + P)(l - B)}{(c + A)(c + E) + (l - B)(l + D)} \\ F = \frac{(Du_x + Eu_y + P)(c + A) - (Au_x + Bu_y + O)(l + D)}{(c + A)(c + E) + (l - B)(l + D)} \end{cases}$$

Die oben entwickelten Gleichungen können jetzt in verschiedener Weise benutzt werden.

1°. Man wählt ein Druckfeld (6), das sich so gut wie möglich einem wirklichen Druckfeld anschmiegt. Da man für $t = x = y = 0$ folgende Beziehungen hat:

$$(9) \quad \begin{cases} L = -\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, & N = -\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \\ O = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x}, & P = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y}, & Q = -\alpha p, \end{cases}$$

so können die Koeffizienten L , N , O , P und Q so gewählt werden, dass die Fläche zweiten Grades (Gleichung 6) in Origo die ersten und zweiten Derivierten mit der wirklichen Druckfläche gemeinsam hat, und sich somit in der Nähe von Origo eng an diese Druckfläche anschmiegt.

Wenn das Druckfeld (6) auf diese Weise gewählt worden ist, findet man mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8) die Koeffizienten des Bewegungsfeldes (2).

2°. Man wählt ein Bewegungsfeld (2), das so nahe wie möglich mit einem wirklichen Bewegungsfeld übereinstimmt. Da man für $t = x = y = 0$

$$(10) \quad \begin{cases} A = \frac{\partial v_x}{\partial x}, & B = \frac{\partial v_x}{\partial y}, & C = v_x \\ D = \frac{\partial v_y}{\partial x}, & E = \frac{\partial v_y}{\partial y}, & F = v_y \end{cases}$$

hat, kann man die Konstanten A , B , C , D , E und F so wählen, dass die Geschwindigkeit und ihre erste Derivierte in Origo dieselben werden wie in dem wirklichen Bewegungsfeld. In dieser Weise bekommt man eine gute Übereinstimmung zwischen dem Bewegungsfeld (2) und dem wirklichen Bewegungsfeld in der Nähe von Origo.

Wenn man in dieser Weise das Bewegungsfeld (2) gewählt hat, findet man mit Hilfe der Gleichungen (3) die Koeffizienten des Druckfeldes (4).

§ 3. Das Bewegungsfeld in der Nähe eines singulären Punktes im Druckfeld, der sich ohne Änderungen fortpflanzt.

Wenn man in den Gleichungen (2):

$$C = -Aa - Bb, \quad F = -Da - Eb,$$

oder:

$$a = \frac{BF - CE}{AE - BD}, \quad b = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

einführt, bekommt man:

$$(11) \quad \begin{cases} v_x = A(x - (a + u_x t)) + B(y - (b + u_y t)) \\ v_y = D(x - (a + u_x t)) + E(y - (b + u_y t)). \end{cases}$$

Wenn

$$AE \geqslant BD$$

ist so hat das Bewegungsfeld einen singulären Punkt $(a + u_x t, b + u_y t)$, der im Endlichen liegt²⁾ und sich unverändert fortpflanzt. Wir haben ein *Windzentrum*, das sich ohne Änderungen fortbewegt. Ein Punkt in dem der Druckgradient Null ist, werden wir entsprechend ein *Druckzentrum* nennen.

Wenn wir die in den Gleichungen (11) gegebenen Werte von v_x von v_y in die Bewegungsgleichungen (1) einführen, bekommen wir wie im vorhergehenden Paragraphen ein Druckfeld:

$$-ap = \frac{1}{2} L(x - u_x t)^2 + M(x - u_x t)(y - u_y t) + \frac{1}{2} N(y - u_y t)^2 + O(x - u_x t) + P(y - u_y t) + Q,$$

wo:

$$\begin{aligned} L &= A^2 + BD - lD + cA \\ M &= AB + BE - lE + cB \\ N &= AD + DE + lA + cD \\ N &= BD + E^2 + lB + cE \end{aligned}$$

ist, und weiter findet man:

$$(12) \quad \begin{cases} O = -La - Mb - Au_x - Bu_y \\ P = -Ma - Nb - Du_x - Eu_y \end{cases}$$

Wir gehen jetzt von einem Druckfeld aus, wo Origo zur Zeit $t = 0$ im Druckzentrum liegt, und wo die Achsen so gedreht sind, dass $M = 0$ wird. Wir haben dann $M = O = P = 0$ und folglich das Druckfeld:

$$(13) \quad -ap = \frac{1}{2} L(x - u_x t)^2 + \frac{1}{2} N(y - u_y t)^2 + Q.$$

Zur Bestimmung von A, B, D und E hat man dann die Gleichungen

$$(14) \quad \begin{cases} L = A^2 + BD - lD + cA \\ O = AB + BE - lE + cB \\ O = AD + DE + lA + cD \\ N = BD + E^2 + lB + cE, \end{cases}$$

während a und b durch die Gleichungen:

$$(15) \quad a = -\frac{1}{L}(Au_x + Bu_y), \quad b = -\frac{1}{N}(Du_x + Eu_y)$$

geben sind.

Da das Druckzentrum in Origo liegt, bedeuten die Gleichungen (15), dass das Windzentrum (a, b) von dem Druckzentrum entfernt ist, wenn das System sich fortpflanzt, während die zwei Zentren zusammenfallen, wenn das System stationär ist ($u_x = u_y = 0$).

¹⁾ Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup, Das Bewegungsfeld bei einfachen Luftbewegungen. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Zweite Serie, Bd. I, H. 4.

§ 4. Die Luftströmung im inneren Gebiet einer kreisförmigen Antizyklone oder Zyklone, die sich fortbewegt ohne ihre Gestalt zu ändern.¹⁾

Wenn man in Gleichung (13):

$$L = N = k$$

setzt, so bekommt man:

$$(16) \quad -\alpha p = \frac{1}{2} k (x - u_x t)^2 + \frac{1}{2} k (y - u_y t)^2 + Q.$$

Wenn man der Grösse k einen passenden positiven Wert gibt, so hat man hier die Gleichung einer Druckfläche, die annähernd den Verhältnissen nahe am Zentrum einer kreisförmigen Antizyklone entspricht, während die Gleichung für negative k das innere Gebiet einer Zyklone darstellt.

Zur Bestimmung der Koeffizienten A , B , D und E geben die Gleichungen (14):

$$k = A^2 + BD - lD + cA$$

$$0 = AB + BE - lE + cB$$

$$0 = AD + DE + lA + cD$$

$$k = BD + E^2 + lB + cE$$

In diesen Gleichungen tritt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht auf. Sie gelten also auch für den Fall, dass diese Null ist, und dann muss die Bewegung um das Bewegungszentrum symmetrisch sein. Wir haben in diesem Fall (siehe Fig. 4), dass v_x für

$x = r, y = 0$ gleich v_y für $x = 0, y = r$ und dass v_y für $x = r, y = 0$ gleich $-v_x$ für $x = 0, y = r$ sein muss. Dieses gibt:

$$E = A \text{ und } D = -B.$$

Setzen wir diese Werte von D und E in obige Gleichungen ein, so werden die erste und die vierte Gleichung identisch und ebenso die zweite und die dritte Gleichung. Das Gleichungssystem reduziert sich dann auf:

$$(17) \quad \begin{cases} A^2 - B^2 + lB + cA = k \\ 2AB - lA + cB = 0. \end{cases}$$

Wenn man A und B aus diesen Gleichungen bestimmt hat, findet man mit Hilfe der Gleichungen (15):

$$(18) \quad a = -\frac{Au_x + Bu_y}{k}, \quad b = \frac{Bu_x - Au_y}{k},$$

und man kennt sämtliche Konstanten des Bewegungsfeldes

$$(19) \quad \begin{cases} v_x = A(x - (a + u_x t)) + B(y - (b + u_y t)) \\ v_y = -B(x - (a + u_x t)) + A(y - (b + u_y t)). \end{cases}$$

Wenn man hier statt A und B zwei neue Konstanten k_1 und ε einführt:

$$(20) \quad A = k_1 \cos \varepsilon, \quad B = k_1 \sin \varepsilon,$$

wobei k_1 eine positive Grösse ist, so bekommt man:

$$\begin{aligned} v_x &= k_1 \cos \varepsilon (x - (a + u_x t)) + k_1 \sin \varepsilon (y - (b + u_y t)) \\ v_y &= -k_1 \sin \varepsilon (x - (a + u_x t)) + k_1 \cos \varepsilon (y - (b + u_y t)). \end{aligned}$$

¹⁾ Vergl. *Th. Hesselberg*: Über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind im nichtstationären Fall. Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig. Zweite Serie, Bd. I, H. 6, S. 182.

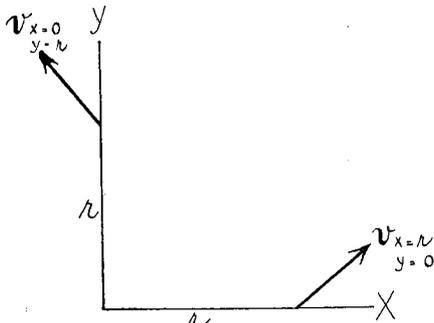


Fig. 4.

Aus diesen Gleichungen ersieht man leicht (vergl. Fig. 5), dass der Winkel zwischen dem Radiusvektor r vom Windzentrum Z_w und v überall ε ist, und dass:

$$v = k_1 r, \text{ wo } k_1 = +\sqrt{A^2 + B^2}$$

ist. Die Stromlinien sind folglich logarithmische Spiralen um das Windzentrum, und die Kurven gleicher Geschwindigkeit sind Kreise um dasselbe Zentrum.

Wenn die X-Achse längs der Fortpflanzungsrichtung u gelegt wird, geben die Gleichungen (18):

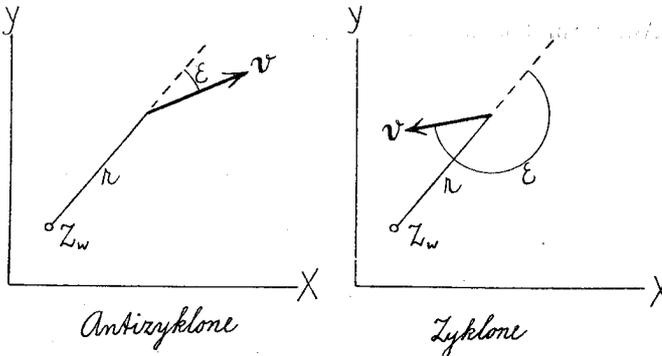


Fig. 5.

$$a = -\frac{A}{k} u, \quad b = \frac{B}{k} u$$

oder nach Gleichung (20):

$$a = -\frac{k_1}{k} \cos \varepsilon u, \quad b = \frac{k_1}{k} \sin \varepsilon u.$$

Wenn die Zyklone oder Antizyklone stationär ist, fallen Windzentrum und Druckzentrum zusammen. Der Ablenkungswinkel φ des Windes vom Gradienten ist dann (vergl. Fig. 5) für eine Antizyklone:

$$\varphi = \varepsilon$$

und für eine Zyklone:

$$\varphi = \varepsilon - \pi.$$

Wenn man in die Gleichungen für a und b den Winkel φ statt ε einführt, bekommt man für eine Antizyklone:

$$a = -\frac{k_1}{k} \cos \varphi u, \quad b = \frac{k_1}{k} \sin \varphi u$$

und für eine Zyklone:

$$a = \frac{k_1}{k} \cos \varphi u, \quad b = -\frac{k_1}{k} \sin \varphi u.$$

Da k bei einer Antizyklone positiv und bei einer Zyklone negativ ist, so ersieht man, dass a in beiden Fällen negativ ist und b positiv. Man bekommt sowohl für Zyklonen als auch für Antizyklonen die Regel, dass das Windzentrum Z_w eine Strecke:

$$R = \left| \frac{k_1}{k} u \right|$$

vom Druckzentrum Z_p verschoben wird u. zw. in einer Richtung, die einen Winkel:

$$\pi - \varphi$$

mit der Fortpflanzungsrichtung bildet (Fig. 6).

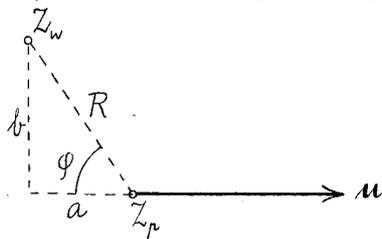


Fig. 6.

Beispiel 1. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, \quad l = 10^{-4}, \quad \alpha = 800$$

$$k = -10^{-8}, \quad Q = -77600, \quad u = 10$$

im M. T. S.-System. Diese Zahlen entsprechen etwa den Verhältnissen im inneren Gebiet einer Zyklone. Mit Hilfe der oben gefundenen Gleichungen findet man dann:

$$A = -0.315 \cdot 10^{-4}, \quad B = -0.470 \cdot 10^{-4}, \quad k_1 = 0.566 \cdot 10^{-4}$$

$$R = 56,6 \text{ km}, \quad \varphi = 56^\circ, 2.$$

Auf Grund dieser Zahlen ist Fig. 7 konstruiert worden. Die ausgezogenen Kreise sind

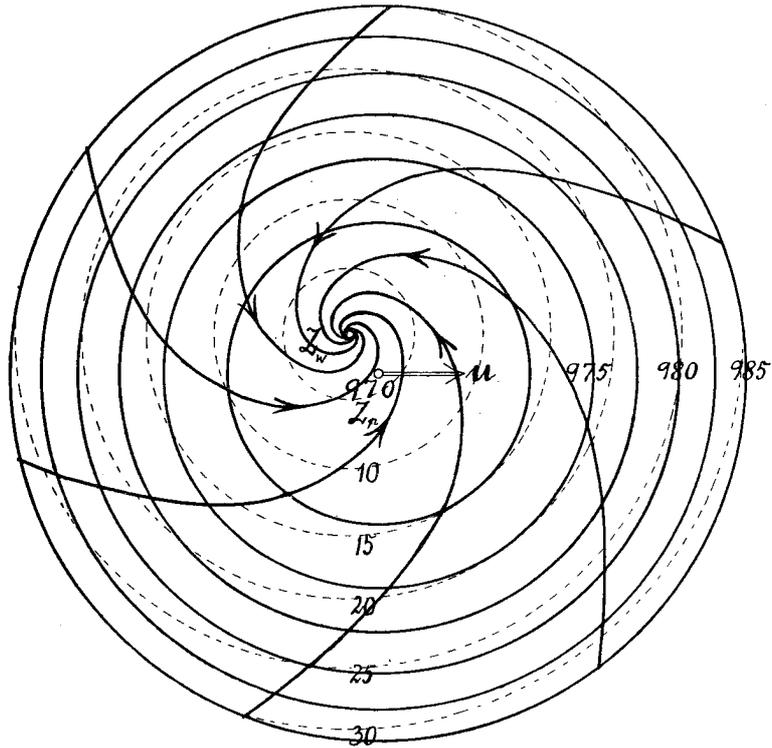


Fig. 7.

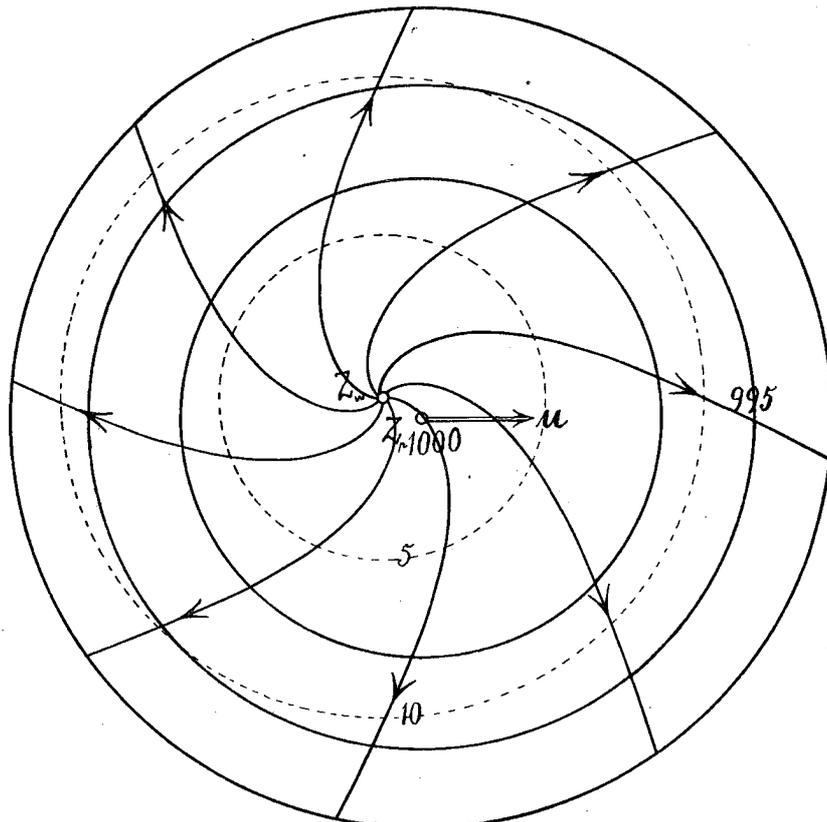


Fig. 8.

Isobaren, die mit einem Intervall von 2,5 mb. gezogen worden sind. Die Spiralen sind die Stromlinien, und die gestrichelten Kreise sind Kurven gleicher Geschwindigkeit. Es sind für diese nur diejenigen von 5, 10, 15. . . m/sek gezeichnet worden. Der Masstab der Zeichnung ist 1 : 10 000 000.

Beispiel 2. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, \alpha = 800$$

$$k = 0.4 \cdot 10^{-8}, Q = -80000, u = 10$$

und finden:

$$A = 0.198 \cdot 10^{-4}, B = 0.117 \cdot 10^{-4}, k_1 = 0.230 \cdot 10^{-4}$$

$$R = 57.6 \text{ km}, \varphi = 30^\circ.6.$$

In Fig. 8 ist diese Antizyklone in derselben Weise dargestellt wie die Zyklone in Fig. 7.

§ 5. Die Luftströmung in der Nähe eines Sattelpunktes im Druckfeld, der sich fortbewegt ohne seine Gestalt zu ändern.

Wir setzen in Gleichung (13):

$$L = -k_x, N = k_y,$$

wo k_x und k_y positive Größen sind und bekommen:

$$(21) \quad -cp = -\frac{1}{2} k_x (x - u_x t)^2 + \frac{1}{2} k_y (y - u_y t) + Q.$$

Man hat hier zwei geradlinige Isobaren, die zur Zeit $t = 0$ durch Origo gehen und durch die Gleichungen

$$y = +\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} x \text{ und } y = -\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} x$$

gegeben sind. Die anderen Isobaren sind Hyperbeln. Wenn man passende Werte von k_x und k_y wählt gibt Gleichung (21) die Verhältnisse in der Nähe eines Sattelpunktes im Druckfeld wieder (Fig. 9).

Wir werden versuchen, ob man solche Werte von k_x und k_y wählen kann, dass das entsprechende Bewegungsfeld einen neutralen Punkt hat, und der Einfachheit halber sollen die Stromlinien gleichseitige Hyperbeln sein, und die Geschwindigkeit soll dem Abstand vom Windzentrum proportional sein. Wir werden zuerst die Gleichungen dieses Bewegungsfeldes bestimmen.

Wenn die Stromlinien gleichseitige Hyperbeln sind, bildet nach einer bekannten Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbeln die Geschwindigkeit v einen Winkel -2β mit dem Radiusvektor r vom Windzentrum, wo β der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Ausströmungsachse ist.

Die Koordinaten des Windzentrums seien a und b und der Winkel zwischen der Ausströmungsachse und der X-Achse sei δ . Man hat dann (vergl. Fig. 10):

$$v_x = k_1 r \cos(\delta + \beta - 2\beta) = k_1 r \cos(2\delta - (\delta + \beta))$$

$$v_y = k_1 r \sin(\delta + \beta - 2\beta) = k_1 r \sin(2\delta - (\delta + \beta))$$

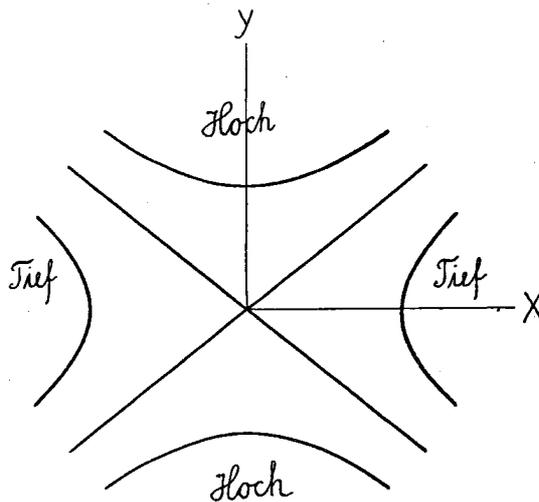


Fig. 9.

oder:

$$\begin{aligned} v_x &= k_1 r \cos 2\delta \cos(\delta + \beta) + k_1 r \sin 2\delta \sin(\delta + \beta) \\ v_y &= k_1 r \sin 2\delta \cos(\delta + \beta) - k_1 r \cos 2\delta \sin(\delta + \beta). \end{aligned}$$

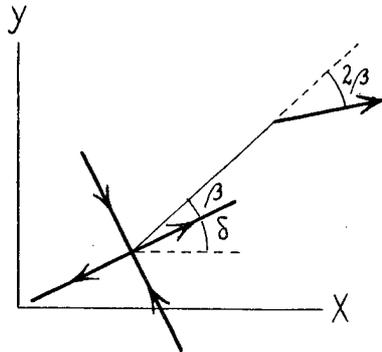


Fig. 10.

Führt man hier:

$$\begin{aligned} x - a &= r \cos(\delta + \beta) \\ y - b &= r \sin(\delta + \beta) \end{aligned}$$

ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} v_x &= k_1 \cos 2\delta (x - a) + k_1 \sin 2\delta (y - b) \\ v_y &= k_1 \sin 2\delta (x - a) - k_1 \cos 2\delta (y - b). \end{aligned}$$

Ein Bewegungsfeld:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = A(x - (a + u_x t)) + B(y - (b + u_y t)) \\ v_y = B(x - (a + u_x t)) - A(y - (b + u_y t)), \\ \text{in dem} \\ A = k_1 \cos 2\delta, \quad B = k_1 \sin 2\delta, \quad k_1 = \sqrt{A^2 + B^2} \end{array} \right.$$

ist, stellt also ein Bewegungsfeld von den gesuchten Eigenschaften dar, das sich mit einer Geschwindigkeit u forpflanz.

Zur Bestimmung der Koeffizienten A und B , geben die Gleichungen (14):

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} -k_x = A^2 + B^2 - lB + cA \\ k_y = A^2 + B^2 + lB - cA \\ 0 = lA + cB \end{array} \right.$$

wobei die dritte und zweite Gleichung (14) einander identisch werden.

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \frac{c}{c^2 + l^2} (k_x + k_y), \quad B = \frac{1}{2} \frac{l}{c^2 + l^2} (k_x + k_y) \\ k_x = -k_y - (c^2 + l^2) + \sqrt{(c^2 + l^2)^2 + 4k_y(c^2 + l^2)} \\ k_y = -k_x + (c^2 + l^2) \pm \sqrt{(c^2 + l^2)^2 - 4k_x(c^2 + l^2)}. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man A , B und k_x finden, wenn k_y gegeben ist, oder A , B und k_y , wenn k_x gegeben ist.

Die Gleichungen (15) geben:

$$(25) \quad a = \frac{1}{k_x} (A u_x + B u_y), \quad b = -\frac{1}{k_y} (B u_x - A u_x)$$

oder, wenn die Werte (24) von A und B eingesetzt werden:

$$a = -k_y \frac{k_x + k_y}{2k_x k_y (c^2 + l^2)} (c u_x - l u_y), \quad b = -k_x \frac{k_x + k_y}{2k_x k_y (c^2 + l^2)} (l u_x + c u_y).$$

Wenn der Winkel zwischen u und der X-Achse γ genannt wird, erhält man weiter:

$$(26) \quad a = -k_y K \cos(\psi + \gamma) u, \quad b = -k_x K \sin(\psi + \gamma) u,$$

wo ψ der Ablenkungswinkel des Normalwindes ist (vergl. § 1, Fall 1), und wo

$$K = \frac{k_x + k_y}{2k_x k_y \sqrt{c^2 + l^2}}$$

ist.

Wenn man in den Gleichungen (26) k_x , k_y und u konstant hält, den Winkel γ aber variieren lässt, so beschreibt der Punkt (a, b) eine Ellipse mit den Achsen längs den Koordinatenachsen und der Gleichung:

$$(27) \quad \frac{a^2}{(k_y Ku)^2} + \frac{b^2}{(k_x Ku)^2} = 1.$$

Da k_y im allgemeinen grösser ist als k_x , hat die Ellipse gewöhnlich die lange Achse längs der X-Achse. Die Verschiebung des Windzentrums vom Druckzentrum ist also gewöhnlich am grössten, wenn sie längs der X-Achse geschieht, und am kleinsten längs der Y-Achse.

Um das Windzentrum zu finden, kann man folgende Konstruktion benutzen (Fig. 11). Man zeichnet die Ellipse (27) und schlägt ausserdem um das Druckzentrum einen Kreis mit dem Radius $(k_y Ku)$. Von der Fortpflanzungsrichtung setzt man den Winkel $(\pi + \psi)$ ab. Im Schnittpunkt d mit dem Kreis fällt man ein Lot auf die X-Achse. Dieses Lot schneidet die Ellipse im Windzentrum Z_w .

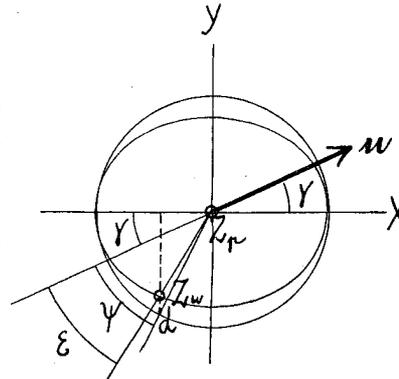


Fig. 11.

Wenn man diese Konstruktion für verschiedene u ausführt, findet man, dass die Richtung vom Druckzentrum zum Windzentrum einen Winkel:

$$\pi + \varepsilon$$

mit der Fortpflanzungsrichtung bildet, wo ε bald etwas kleiner als ψ und bald etwas grösser ist.

Die Gleichungen (26) geben:

$$\frac{b}{a} = \frac{k_x}{k_y} \operatorname{tg}(\psi + \gamma).$$

Da man ausserdem:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}(\varepsilon + \gamma)$$

hat, so findet man, dass ε durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon + \gamma) = \frac{k_x}{k_y} \operatorname{tg}(\psi + \gamma)$$

bestimmt ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Achsen des Druckfeldes und des Bewegungsfeldes ihre Richtung während der Fortpflanzung des Systems unverändert beibehalten.

Wenn man die entsprechenden Berechnungen für den Fall ausführt, dass die Achsen sich mit einer Geschwindigkeit $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ während der Fortbewegung drehen, so findet man, dass die oben gefundene Regel für die Verschiebung des Windzentrums vom Druckzentrum auch in diesem Fall gilt, wenn man nur statt l den Wert $\left(l + 2 \frac{\partial \delta}{\partial t} \right)$ einführt.

Beispiel. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, \quad l = 10^{-4}, \quad \alpha = 800, \quad k_x = 0.4 \cdot 10^{-8}$$

$$Q = -79200, \quad u = 10, \quad \gamma = 20^\circ, \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$$

und finden:

$$k_y = 0.58 \cdot 10^{-4}, \quad A = -0.237 \cdot 10^{-4}, \quad B = 0.182 \cdot 10^{-4}$$

$$k_1 = 0.298 \cdot 10^{-4}, \quad \psi = 37^\circ.7, \quad K = 1.287 \cdot 10^{12}$$

$$k_y Ku = 64.7 \text{ km}, \quad k_x Ku = 51.5 \text{ km}.$$

In Fig. 12 ist dieser Sattelpunkt in derselben Weise dargestellt wie die Zyklone in Fig. 7.

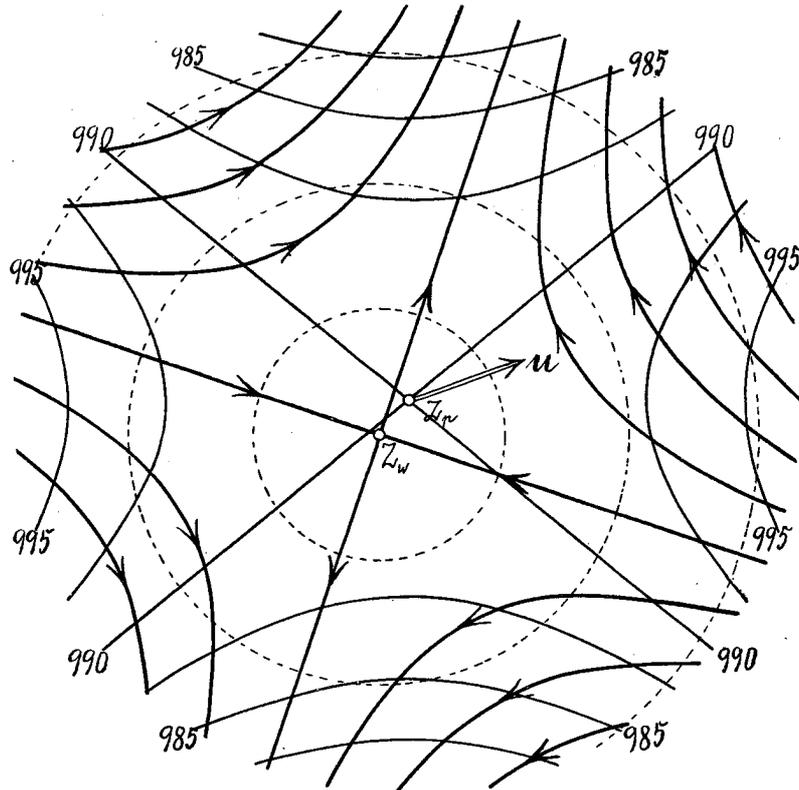


Fig. 12.

§ 6. Der Ablenkungswinkel φ und das Verhältnis $\frac{v}{\alpha G}$ im inneren Gebiet der kreisförmigen Zyklonen und Antizyklonen.

Wenn die Zyklone oder Antizyklone stationär ist, fallen Druckzentrum und Windzentrum zusammen, vergl. Gleichung (18), und man erhält:

$$\alpha G = k r, \quad v = k_1 r$$

und folglich:

$$\frac{v}{\alpha G} = \frac{k_1}{k} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{k}.$$

Für den Ablenkungswinkel hat man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$$

Wenn man in den Gleichungen (17) einen Wert von A wählt, findet man leicht die entsprechenden Werte von k und B und dann mit Hilfe obiger Gleichungen die entsprechenden Werte von φ und $\frac{v}{\alpha G}$. Wenn man verschiedene Werte von A wählt, so findet man in dieser Weise eine Reihe von zusammengehörigen Werten von $\frac{v}{\alpha G}$, φ und k .

In Fig. 13 sind $\frac{v}{\alpha G}$ und φ als Funktionen von k in sowohl Zyklonen als auch in Antizyklonen dargestellt. Dabei ist vorausgesetzt worden, dass $l = 10^{-4}$ und $c = 1.3 \cdot 10^{-4}$ ist.

Für diese Werte von l und c geben die in § 1, Fall 1, gegebenen Gleichungen für den Normalwind:

$$\psi = 37^{\circ}.6, \quad \frac{v}{\alpha G_N} = 0.61 \cdot 10^{-4}.$$

Aus der Figur ersieht man, dass dies eben diejenigen Werte von ψ und $\frac{v}{\alpha G}$ sind, die man in den stationären Zyklonen und Antizyklonen erhält, wenn k gegen Null geht.

In den ganz flachen Zyklonen ist der Wind stärker als der Normalwind, sonst ist er schwächer als dieser, und um so schwächer, je steiler die Zyklonen oder Antizyklonen sind. Ferner ist der Wind bei gleicher k schwächer in der Antizyklone als in der Zyklone.

Die Ablenkung ist am kleinsten für die kräftigen Antizyklonen. Wenn k abnimmt, wächst die Ablenkung und nähert sich der des Normalwindes, wenn k gegen Null geht. Bei den Zyklonen wächst der Ablenkungswinkel mit dem Zahlenwert von k d. h. er wird grösser, je kräftiger die Zyklone ist.

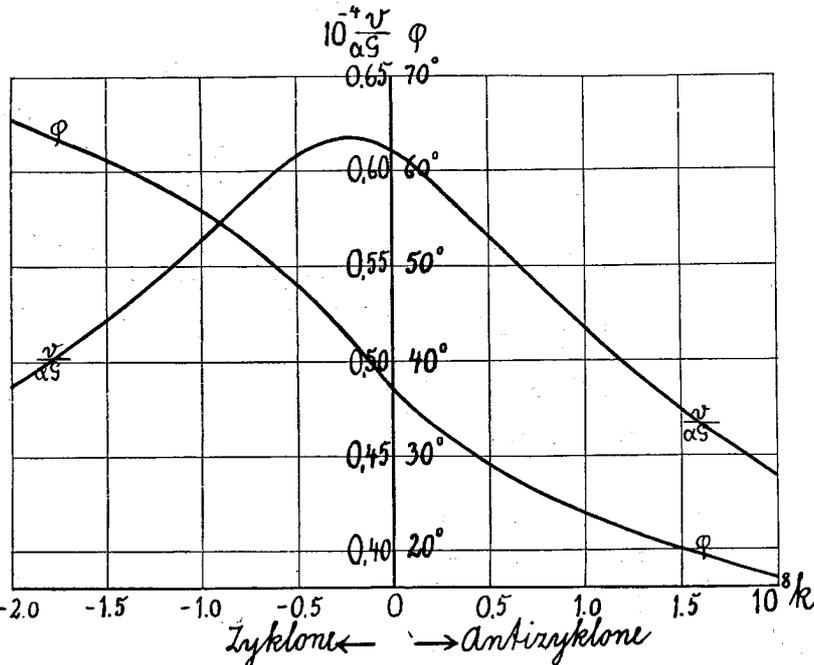


Fig. 13.

Beispielsweise gibt Fig. 13 für $k = -1.0 \cdot 10^{-8}$ in der Zyklone $\varphi = 56^{\circ}$, $\frac{v}{\alpha G} = 0.563 \cdot 10^{-4}$.

Wenn man hier $v = 5$ m/sek wählt, bekommt man $\alpha G = 8.88 \cdot 10^{-4}$ und $\varphi = 56^{\circ}$, während man für den Normalwind $\alpha G_N = 8.20 \cdot 10^{-4}$ und $\psi = 37^{\circ}.6$ hat.

Diese Werte sind bei der Konstruktion von Fig. 14 benutzt worden. Aus dieser Figur ersieht man, dass der Wind relativ schwach und vom Gradienten stark abgelenkt ist. Da man nach § 1, Fall 3:

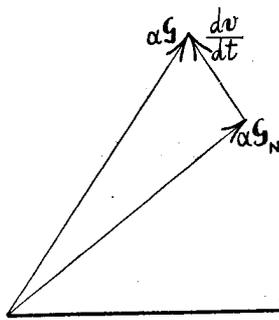


Fig. 14.

$$\frac{dv}{dt} = \alpha G - \alpha G_N$$

hat, so sieht man unmittelbar, dass dieses dadurch zu erklären ist, dass die Luftmassen im inneren Teil der stationären Zyklone retardiert und nach links gedreht werden.

In derselben Weise kann man zeigen, dass der Wind v im inneren Teil der stationären Antizyklone relativ schwach und wenig vom Gradienten abgelenkt ist, weil die Luftmassen hier akzeleriert und nach rechts gedreht werden (Fig. 15).

Wir gehen jetzt zu einer kreisförmigen Antizyklone oder Zyklone über, die sich fortbewegt. Um in bequemer Weise Werte für φ und $\frac{v}{\alpha G}$ hier berechnen zu können, legen

wir Origo in einen Abstand r_1 vom Druckzentrum Z_p und die negative X-Achse nach diesem (Fig. 16). Für das Druckfeld gibt dann Gleichung (6):

$$-\alpha p = \frac{k}{2} (x - u_x t)^2 + \frac{k}{2} (y - u_y t)^2 + k r_1 (x - u_x t) + Q.$$

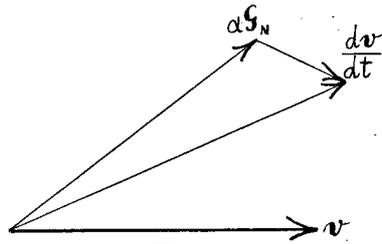


Fig. 15.

Wenn wir die Gleichungen für das Bewegungsfeld in der Form:

$$\begin{aligned} v_x &= Ax + By + C \\ v_y &= -Bx + Ay + F \end{aligned}$$

schreiben, geben die Gleichungen (8) für den Wind in Origo zur Zeit $t = 0$:

$$(28) \quad \begin{cases} v_x = \frac{(Au_x + Bu_y + kr_1)(c + A) - (Bu_x - Au_y)(l - B)}{(c + A)^2 + (l - B)^2} \\ v_y = \frac{-(Bu_x - Au_y)(c + A) - (Au_x + Bu_y + kr_1)(l - B)}{(c + A)^2 + (l - B)^2} \end{cases}$$

Wenn wir hier sukzessive:

- I $u_x = u, u_y = 0$
- II $u_x = 0, u_y = u$
- III $u_x = -u, u_y = 0$
- IV $u_x = 0, u_y = -u$

setzen, werden die Gleichungen (28) den Wind in einen Abstand r_1 vom Druckzentrum

- I auf der Vorderseite,
- II auf der rechten Seite,
- III auf der Rückseite,
- IV auf der linken Seite

der sich fortbewegenden Zyklone oder Antizyklone geben (siehe Fig. 16).

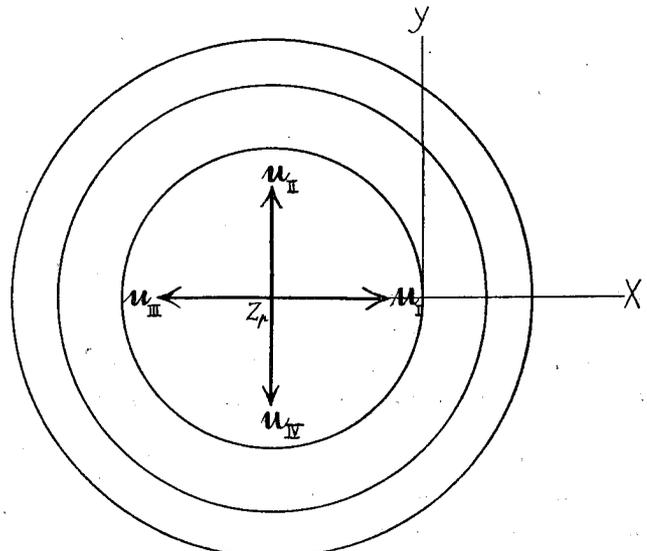


Fig. 16.

Beispiel 1. Wenn wir

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, k = -10^{-8}, u = 10, r_1 = 200 \text{ km}$$

wählen, so finden wir die in Tabelle 1 gegebenen Werte für v_x und v_y und dadurch auch $\frac{v}{\alpha G}$ und φ . In der letzten Zeile der Tabelle sind die Werte für $u_x = u_y = 0$ (stationäre Zyklone) gegeben.

Tabelle 1.

	v_x	v_y	v	$10^4 \frac{v}{\alpha G}$	φ	
Innerer Teil der Zyklone	Vorderseite	- 5.1	12.3	13.4	0.67	68°
	Rechte Seite	- 9.3	10.6	14.1	0.70	49°
	Rückseite	- 7.5	6.4	9.9	0.49	41°
	Linke Seite	- 3.4	8.1	8.8	0.44	67°
	Stationäre Zyklone . .	- 6.3	9.4	11.3	0.56	56°

Beispiel 2. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, k = 0.4 \cdot 10^{-8}, u = 10, r_1 = 200 \text{ km}$$

und bekommen die in Tabelle 2 gegebenen Werte für $\frac{v}{\alpha G}$ und φ .

Tabelle 2.

	v_x	v_y	v	$10^4 \frac{v}{\alpha G}$	φ	
Innerer Teil der Anti- zyklone	Vorderseite der Antizyklone . .	4.6	— 3.5	5.8	0.72	37°
	Rechte Seite » » . .	5.1	— 1.7	5.4	0.68	18°
	Rückseite » » . .	3.3	— 1.2	3.5	0.44	19°
	Linke Seite » » . .	2.8	— 3.0	4.0	0.51	47°
	Stationäre Antizyklone . .	4.0	— 2.3	4.6	0.57	30°

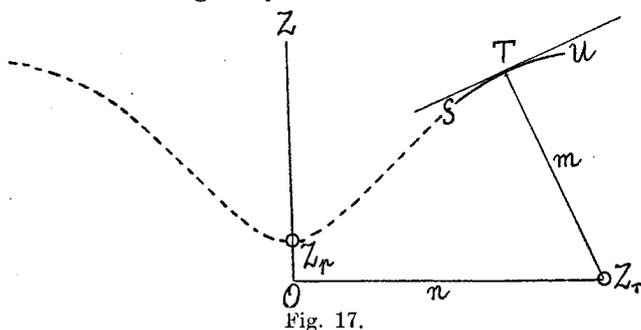
Die in den Tabellen 1—2 gegebenen Verteilungen von $\frac{v}{\alpha G}$ und φ lassen sich natürlich durch den Einfluss der Trägheit der Luftmassen auf ihre Bewegungen erklären. Wenn die Zyklonen und Antizyklonen sich fortbewegen, ist es aber nicht mehr so leicht zu überschauen, welchen Beschleunigungen die individuellen Luftmassen ausgesetzt werden. Einige grobe Züge lassen sich aber leicht erklären.

Auf der Vorderseite der Zyklone muss z. B. die Geschwindigkeit abnehmen, teils weil die Luftströmung gegen das Zentrum geht, und teils weil dieses sich dem Ort nähert. Hier kann man also relativ kräftige und stark abgelenkte Winde erwarten, ein Resultat, das durch die in Tabelle 1 gegebenen Werte von $\frac{v}{\alpha G}$ und φ bestätigt wird.

Auf der Rückseite der Antizyklone muss andererseits die Geschwindigkeit zunehmen, teils weil die Luftströmung sich vom Zentrum hinweg bewegt, und teils weil das Zentrum sich vom Ort entfernt. Hier sollte man demnach relativ schwache wenig abgelenkte Winde erwarten, was man in Tabelle 2 bestätigt findet.

§ 7. Der Ablenkungswinkel φ und das Verhältnis $\frac{v}{\alpha G}$ im äusseren Teil einer kreisförmigen Zyklone.

In Fig. 17 stellt die gestrichelte Kurve einen Vertikalschnitt durch die Druckfläche einer kreisförmigen Zyklone dar. Durch einen Punkt T des äusseren Teils legen wir einen oskulierenden Kreisbogen STU .



Wenn dieser Kreisbogen um die vertikale Achse OZ , die durch das Druckzentrum Z_p gelegt ist, gedreht wird, bildet er einen Torus, der in der Umgebung des Kreises, der von dem Punkt T beschrieben wird, sich der wirklichen Druckfläche eng anschmiegt. Der Radius TZ_T des Kreisbogens sei m und der Abstand des

Zentrums Z_T von der Umdrehungsachse sei n . Der Torus hat dann die Gleichung:

$$z^2 = m^2 - (n - \sqrt{x^2 + y^2})^2.$$

Wir wählen jetzt die Konstanten m und n so, dass man für $x = 600$ km, $y = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10^{-3} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -0.4 \cdot 10^{-8}$$

bekommt, und finden für den Torus die Gleichung:

$$z^2 = (5 \cdot 10^{-8})^2 - (8.5 \cdot 10^{-5} - \sqrt{x^2 + y^2})^2.$$

Hieraus findet man dann für $x = 600$ km, $y = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.168 \cdot 10^{-8}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Wir verlegen jetzt Origo in den Punkt $x = 600$ km, $y = 0$ und ersetzen den Torus in seiner Umgebung mit einer Fläche zweiten Grades, die die ersten und zweiten Derivierten mit dem Torus gemeinsam hat. Wir erhalten dann für die Koeffizienten der Fläche zweiten Grades:

$$L = 0.4 \cdot 10^{-8}, M = 0, N = -0.168 \cdot 10^{-8}$$

$$O = -10^{-3}, P = 0, Q = -\alpha p_0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7) findet man dann, wenn $l = 10^{-4}$ und $c = 1.3 \cdot 10^{-4}$ gesetzt werden:

$$A = 0.178 \cdot 10^{-4}, B = 0.066 \cdot 10^{-4}, E = -0.092 \cdot 10^{-4}, D = -0.129 \cdot 10^{-4}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8) können wir jetzt den Wind in Origo zur Zeit 0 bestimmen. Indem wir verschiedene Richtungen von u wählen, wird sich Origo in verschiedenen Teilen der sich fortpflanzenden Zyklone befinden. Setzen wir $u = 10$ und variiert die Fortpflanzungsrichtung, so bekommen wir die in Tabelle 3 gegebenen Werte für v_x und v_y und dann auch die Verteilungen von $\frac{v}{\alpha G}$ und φ .

Tabelle 3.

		v_x	v_y	v	$10^4 \frac{v}{\alpha G}$	φ
Äusserer Teil der Zyklone	Vorderseite der Zyklone . .	-4.2	1.9	4.6	0.46	25°
	Rechte Seite » » . .	-5.1	2.9	5.9	0.59	30°
	Rückseite » » . .	-4.7	4.5	6.5	0.65	44°
	Linke Seite » » . .	-3.8	3.5	5.2	0.52	43°
	Stationäre Zyklone . .	-4.5	3.2	5.5	0.55	36°

Wie zu erwarten war, finden wir, dass der Wind auf der Vorderseite, wo die Luftmassen erst in Bewegung gesetzt werden, relativ schwach und wenig abgelenkt ist, während die absterbenden Winde auf der Rückseite relativ kräftig und stark abgelenkt sind.

§ 8. Die Luftströmung in der Nähe eines Hochdruckkeiles oder einer Tiefdruckrinne, die sich fortbewegt ohne ihre Gestalt zu ändern.

Wenn man ein Bewegungsfeld:

$$v_x = Ax + By + C$$

$$v_y = Dx + Ey + F$$

hat, wo:

$$BD = AE$$

ist, so ist das Windzentrum unendlich fern (vergl. § 3). Wenn man:

$$\frac{D}{A} = \frac{E}{B} = f$$

eingeführt, wo f eine Konstante ist, so bekommt man folgende Gleichungen für das Bewegungsfeld:

$$\begin{aligned} v_x &= Ax + By + C \\ v_y &= fAx + fBy + F. \end{aligned}$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems können diese Gleichungen in einer Form:

$$\begin{aligned} v_x &= A^1(x - a) \\ v_y &= D^1(x - a) + F^1 \end{aligned}$$

gebracht werden, in der A^1, D^1, F^1 und a Konstanten sind. Man sieht jetzt unmittelbar, dass die Gleichungen ein Bewegungsfeld darstellen, wo man parallel mit der Y -Achse eine singuläre Gerade $x = a$ hat, die eine Divergenzlinie oder eine Konvergenzlinie ist, je nachdem der Koeffizient A^1 positiv oder negativ ist.

Wenn das Bewegungsfeld sich ohne Änderungen mit einer Geschwindigkeit u fortzupflanzen soll, so erhält man:

$$\begin{aligned} v_x &= A^1(x - (a + ut)) \\ v_y &= D^1(x - (a + ut)) + F^1 \end{aligned}$$

oder, wenn man die Markierung der Buchstaben fortlässt:

$$(29) \quad \begin{cases} v_x = A(x - (a + ut)) \\ v_y = D(x - (a + ut)) + F. \end{cases}$$

Wenn diese Werte von v_x und v_y in die Bewegungsgleichungen (1) eingeführt werden, so bekommen wir ein Druckfeld (4), in dem:

$$(30) \quad \begin{cases} L = A^2 - lD + cA \\ M = 0 \\ M = AD + lA + cD = 0 \\ N = 0 \\ O = -La - lF - Au \\ P = cF - Du \end{cases}$$

ist. Hier ist die dritte Gleichung diejenige, die die Koeffizienten A und D erfüllen müssen, damit das Bewegungsfeld dynamisch möglich sein soll.

Wir erhalten also eine Druckfläche:

$$(31) \quad -ap = \frac{L}{2}(x - ut)^2 + O(x - ut) + Py + Q$$

Die Isobaren sind also Parabeln mit einer gemeinsamen Achse, die zur Zeit $t = 0$ die Linie:

$$x = -\frac{O}{L}$$

ist.

Wenn man von dem Druckfeld ausgeht und das entsprechende Bewegungsfeld suchen will, kann man das Koordinatensystem so wählen, dass die Y -Achse zur Zeit $t = 0$ mit der Achse der Parabeln zusammenfällt. Man hat dann ein Druckfeld:

$$(32) \quad -ap = \frac{k}{2}(x - ut)^2 - qy + Q,$$

in dem k und q Konstanten sind.

Zur Bestimmung der Koeffizienten A , D , F und des Bewegungsfeldes geben dann die Gleichungen (30):

$$(33) \quad \begin{cases} k = A^2 - lD + cA \\ 0 = AD + lA + cD \\ 0 = -ka - lF - Au \\ -q = cF - Du \end{cases}$$

Wenn man aus den zwei ersten dieser Gleichungen A und D bestimmt hat, geben die zwei letzten Gleichungen:

$$(34) \quad \begin{cases} F = \frac{1}{c}(Du - q) \\ a = \frac{lq}{ck} - \frac{cA + lD}{ck} u. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die singuläre Gerade des Bewegungsfeldes selbst im stationären Fall nicht mit der Achse der parabelförmigen Isobaren zusammenfällt, und dass sie eine weitere Verschiebung erleidet, wenn das System sich fortbewegt. Wird die erste Verschiebung a_1 und die zweite a_2 genannt, so hat man

$$(35) \quad \begin{cases} a = a_1 + a_2 u \\ \text{wo} \quad a_1 = \frac{lq}{ck}, \quad a_2 = -\frac{cA + lD}{ck} \end{cases}$$

ist.

Die Gleichung (32) gibt:

$$\alpha G_x = kx, \quad \alpha G_y = -q$$

Wenn man hier $x = a_1$ einführt, bekommt man:

$$\alpha G_x = \frac{l}{c}q, \quad \alpha G_y = -q.$$

Hieraus ersieht man, dass man im stationären Fall den Winkel ψ (vergl. Fig. 18) zwischen der singulären Geraden und dem Druckgradienten hat. Das ist leicht verständlich. Da sich die Luftmassen in der singulären Linie ohne jede Beschleunigung geradlinig bewegen, muss man hier den Normalwind haben.

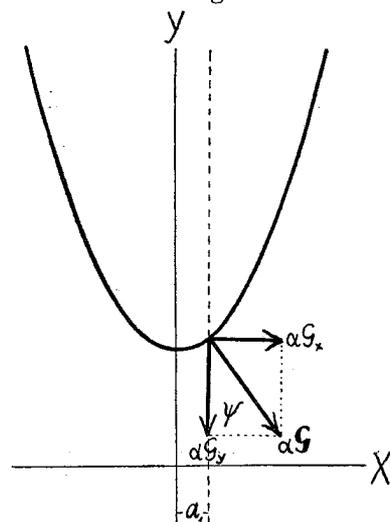


Fig. 18.

Weiter sieht man aus Gleichung (35), dass a_1 positiv ist, wenn k und q dasselbe Vorzeichen haben. In diesem Fall haben die parabelförmigen Isobaren die Öffnung in der Richtung der negativen Y -Achse, und a_1 ist negativ. Da wir das Koordinatensystem so wählen können, dass die positive Y -Achse in die Richtung der Isobarenöffnung zeigt, brauchen wir nur diesen Fall zu behandeln. Wir können uns somit auf den Fall beschränken, in dem k und q desselben Vorzeichens sind. Wenn man einen Hochdruckkeil hat, so sind k und q positiv, wogegen beide negativ sind, wenn das Druckfeld eine Tiefdruckrinne darstellt.

Wenn man einen Wert von k wählt, so kann man mit Hilfe der zwei ersten Gleichungen (33) die entsprechenden Werte von A und D finden, und die letzte Gleichung (35) gibt den Wert von a_2 . Wenn man verschiedene Werte von k wählt, bekommt man A , D

und a_2 als Funktionen von k (vergl. Fig. 19, wo und $l = 10^{-4}$ und $c = 1.3 \cdot 10^{-4}$ gewählt worden ist).

Man sieht, das A dasselbe Vorzeichen hat wie k . Wenn das Druckfeld einen Hochdruckkeil darstellt (k pos.), ist deshalb die singuläre Linie des Bewegungsfeldes eine Divergenzlinie, während man bei der Tiefdruckrinne eine Konvergenzlinie hat.

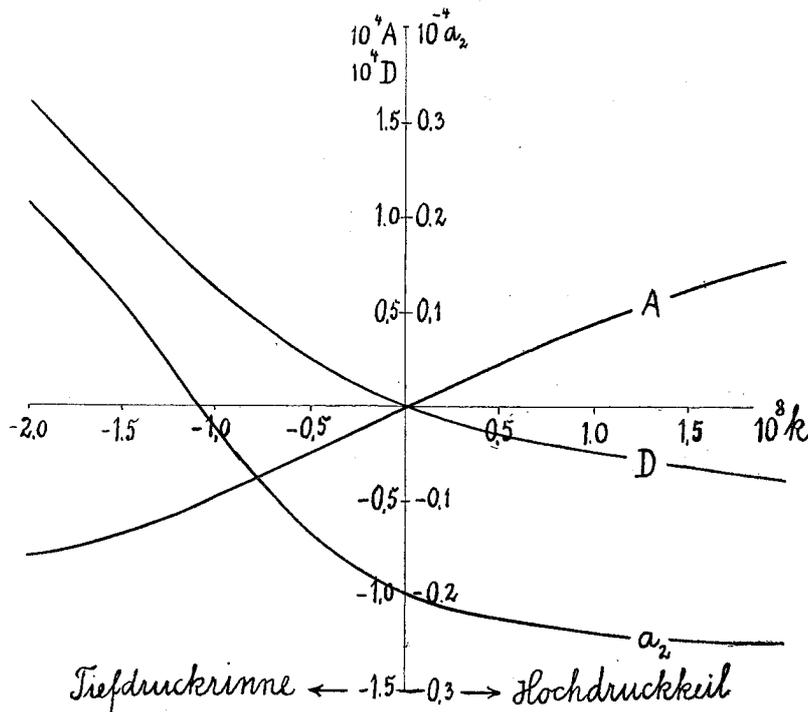


Fig. 19.

Weiter sieht man, dass a_2 bei dem Hochdruckkeil negativ ist. Wenn das System sich fortbewegt, ist also die Divergenzlinie nach hinten verschoben, relativ zu der Divergenzlinie im stationären Fall.

Dasselbe gilt für die Verschiebung der Konvergenzlinie, wenn die Tiefdruckrinnen relativ flach ist. Bei kräftigen Tiefdruckrinnen geschieht der Verschiebung nach vorn, weil a_1 positiv ist für $k < \left[\frac{(l^2 - c^2)^2}{c^2} + 2(l^2 - c^2) \right]$. Wenn man hier $l = 10^{-4}$ und $c = 1.3 \cdot 10^{-4}$ setzt, so findet man die Grenze für $k = -1.098 \cdot 10^{-8}$.

Beispiel 1. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, \alpha = 800, Q = -79200.$$

$$k = 0.4 \cdot 10^{-8}, q = 4 \cdot 10^{-4}, u = 0.$$

Das Druckfeld (32) stellt dann einen stationären Hochdruckkeil vor. Man findet:

$$A = 0.185 \cdot 10^{-4}, D = -0.125 \cdot 10^{-4}, F = -3.08$$

$$a_1 = 77.0 \text{ km}, a_2 u = 0, a = 77.0 \text{ km}.$$

Die Gleichung des Druckfeldes ist:

$$- \alpha p = 0.2 \cdot 10^{-8} x^2 - 4 \cdot 10^{-4} y - 79200,$$

und die Gleichungen des Bewegungsfeldes sind:

$$v_x = 0.185 \cdot 10^{-4} (x - 7.7 \cdot 10^4)$$

$$v_y = -0.125 \cdot 10^{-4} (x - 7.7 \cdot 10^4) - 3.08.$$

In Fig. 20 ist dieser Hochdruckkeil in derselben Weise dargestellt wie die Zyklone in Fig. 7.

Beispiel 2. Wir wählen

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, \alpha = 800 \quad Q = -79200.$$

$$k = 0.4 \cdot 10^{-8}, q = 4 \cdot 10^{-4}, u = 10.$$

Wir haben dann dasselbe Druckfeld wie im Beispiel 1, es soll sich aber jetzt mit einer Geschwindigkeit von 10 m/sek in positiver Richtung fortpflanzen.

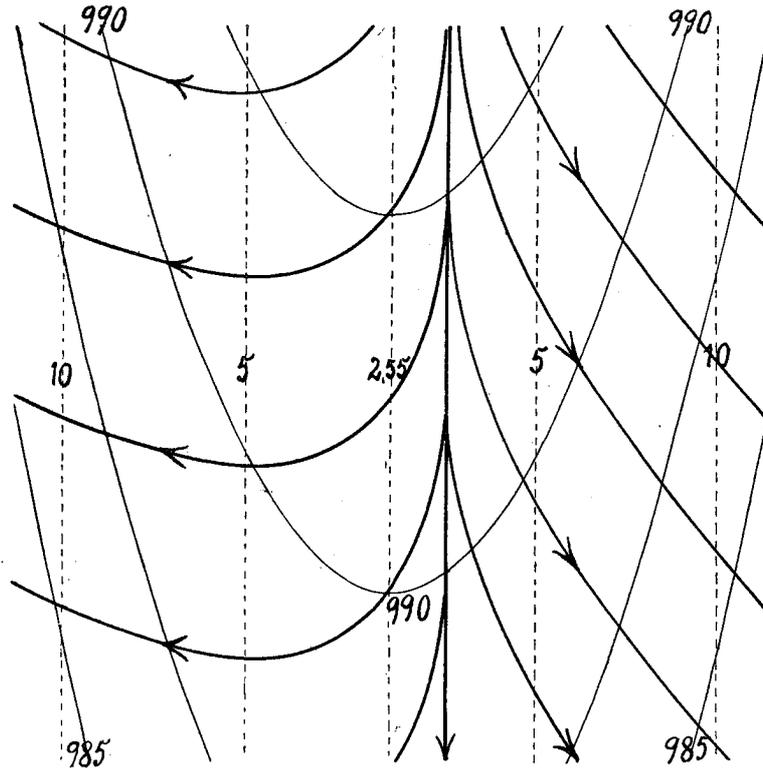


Fig. 20.

Man findet in diesem Fall:

$$A = 0.185 \cdot 10^{-4}, D = -0.125 \cdot 10^{-4}, F = -4.04$$

$$a_1 = 77.0 \text{ km}, a_2 = -0.223 \cdot 10^4, a = 54.7 \text{ km}.$$

Wir haben also ein Bewegungsfeld, das sich von dem Bewegungsfeld im Beispiel 1 durch einen konstanten Vektor unterscheidet, Durch diese Addition wird die Divergenzlinie in negativer Richtung etwas nach hinten verschoben.

Beispiel 3. Wir wählen

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, k = -0.4 \cdot 10^{-8}, q = -4 \cdot 10^{-4}, u = 10.$$

Das Druckfeld gibt dann eine relativ flache Tiefdruckrinne wieder, die sich mit einer Geschwindigkeit $u = 10$ in positiver Richtung fortpflanzt.

Man findet:

$$A = -0.199 \cdot 10^{-4}, D = 0.181 \cdot 10^{-4}, F = 4.47$$

$$a_1 = 77.0 \text{ km}, a_2 = -0.150 \cdot 10^4, a = 62.0 \text{ km}.$$

Man sieht, dass die Geschwindigkeiten relativ zu den Gradienten hier grösser sind als im Falle der Hochdruckkeile (Beispiel 2), und dass infolge der Fortpflanzung die Konvergenzlinie weniger nach hinten verschoben wird als die Divergenzlinie.

Beispiel 4. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, k = -0.4 \cdot 10^{-4}, q = -4 \cdot 10^{-4}, u = -10.$$

Das Druckfeld ist dann dasselbe wie im Beispiel 3, es soll sich aber jetzt mit einer Geschwindigkeit 10 m/sek in negativer Richtung fortbewegen. Man findet dann:

$$A = -0.199 \cdot 10^{-4}, D = 0.181 \cdot 10^{-4}, F = 1.69$$

$$a_1 = 77.0 \text{ km}, a_2 = -0.150 \cdot 10^4, a = 92 \text{ km.}$$

Die Konvergenzlinie ist also auch in diesem Falle infolge der Fortpflanzung nach hinten verschoben relativ zur Fortpflanzungsrichtung.

Beispiel 5. Wir wählen:

$$c = 1.3 \cdot 10^{-4}, l = 10^{-4}, k = -10^{-8}, q = 6 \cdot 10^{-4}, u = 10.$$

Das Druckfeld ist dann eine kräftige Tiefdruckrinne, die sich in positiver Richtung fortbewegt. Wir finden:

$$A = -0.489 \cdot 10^{-4}, D = 0.603 \cdot 10^{-4}, F = 9.26$$

$$a_1 = 46.1 \text{ km}, a_2 = -0.025 \cdot 10^4, a = 43.6 \text{ km.}$$

Die Verschiebung der Konvergenzlinie infolge der Fortpflanzung ist also hier sehr klein.

Beispiel 6. Wir berechnen für die in den Beispielen 1—5 gewählten Hochdruckkeile und Tiefdruckrinnen den Wind in einem Abstand von 200 km von der Achse des Druckfeldes und finden die in Tabelle 4 gegebenen Werte. In der Tabelle wird eine Tiefdruckrinne, die sich mit der Isobarenöffnung nach rechts bewegt, als retrograd bezeichnet ist.

Tabelle 4.

		$10^8 k$	$10^4 q$	u	v	$10^{-4} \frac{v}{\alpha G}$	φ
Stationärer Hochdruckkeil	Positive Seite	0.4	4	0	5.1	0.57	37°
	Negative Seite	0.4	4	0	5.1	0.57	31°
Bewegte Hochdruckkeil	Vorderseite	0.4	4	10	6.4	0.72	39°
	Rückseite	0.4	4	10	5.0	0.55	18°
Bewegter Tiefdruckrinne	Vorderseite	-0.4	-4	10	7.5	0.84	42°
	Rückseite	-0.4	-4	10	5.2	0.58	30°
Retrograd bewegte Tiefdruckrinne	Vorderseite	-0.4	-4	-10	6.8	0.76	59°
	Rückseite	-0.4	-4	-10	4.2	0.47	33°
Bewegte Tiefdruckrinne	Vorderseite	-1.0	-6	10	22.0	1.07	50°
	Rückseite	-1.0	-6	10	13.1	0.64	41°

Aus dieser Tabelle sieht man, dass der Wind auf der Vorderseite der Konvergenz- und Divergenzlinien relativ kräftig und stark abgelenkt ist, während er auf der Rückseite relativ schwach und wenig abgelenkt ist. Nahe der Konvergenzlinie ist der Wind unter denselben Bedingungen kräftiger und mehr abgelenkt als in der Nähe der Divergenzlinie.

§ 9. Über die Verrückung der singulären Punkte und Linien des Windfeldes relativ zu denjenigen des Druckfeldes.

In meinem früher erwähnten Aufsatz «Über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind im nichtstationären Fall» habe ich die Verrückungen der Einströmungspunkte und der Ausströmungspunkte des Windfeldes von den entsprechenden singulären Punkten des Druckfeldes untersucht. Ich habe die Wetterkarten des Weather Bureau der Vereinigten Staaten von Nordamerika untersucht und für das Jahr 1906 eine Reihe von Stromlinien-

karten und detaillierten Druckkarten gezeichnet. Es war dann auffallend, dass jedes Druckzentrum, selbst wenn es noch so wenig ausgeprägt war, eine entsprechende Singularität im Windfeld bedingte. Die singulären Punkte des Windfeldes fielen aber selten mit dem dazu zugehörigen singulären Punkt des Druckfeldes zusammen. Der Abstand betrug gewöhnlich 50—100 km, konnte aber zuweilen bis zu einigen hundert Kilometern betragen.

Von theoretischen Überlegungen geleitet, untersuchte ich ob ein Zusammenhang zwischen diesen Verrückungen und der Fortpflanzung der Druckzentren nachzuweisen wäre. Der Winkel zwischen der Richtung vom Druckzentrum nach dem Windzentrum und der Fortpflanzungsrichtung wurde gemessen, und in den durch diesen Winkel gegebenen Richtungen wurden Vektoren von Länge eins abgesetzt. Dadurch wurde ein mittlerer Winkel zwischen der Richtung vom Druckzentrum nach dem Windzentrum und der Fortpflanzungsrichtung gefunden.

Für Antizyklonen betrug dieser Winkel 142° , als Mittel von 11 Fällen (Fig. 21, A) und für Zyklonen 130° , im Mittel von 20 Fällen (Fig. 21, Z).

In § 4 dieser Abhandlung haben wir durch theoretische Betrachtungen gefunden, dass das Windzentrum Z_w vom Druckzentrum Z_p in einer Richtung verschoben wird, die einen Winkel $(\pi - \varphi)$ mit der Fortpflanzungsrichtung u bildet. In Beispiel 1—2 wurde φ für eine Antizyklone zu 31° , für eine Zyklone zu 56° bestimmt. Hieraus bekommt man für die Antizyklone:

$$\pi - \varphi = 149^\circ$$

und für die Zyklone:

$$\pi - \varphi = 124^\circ.$$

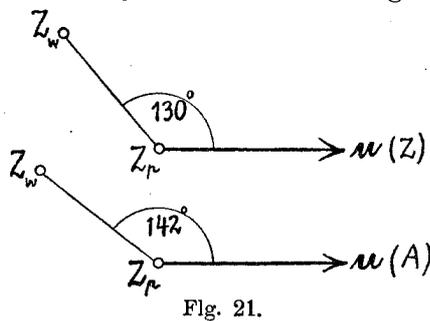


Fig. 21.

Wie man sieht, herrscht eine ziemlich gute Übereinstimmung zwischen der Richtung dieser theoretisch abgeleiteten Verrückungen und der Richtung der durch Messungen auf den amerikanischen Wetterkarten gefundenen Verrückungen (Fig. 21). Man muss berücksichtigen dass das statistisch bearbeitete Material spärlich ist, und die verwendete Methode zur Mittelbildung nicht ganz einwandfrei ist. Ausserdem sind die theoretisch abgeleiteten Verrückungen durch die Wahl der Werte von c , l , α und k beeinflusst. Durch andere Wahl dieser Konstanten würden wir in den Beispielen 1—2 andere Werte für $(\pi - \varphi)$ gefunden haben. Eine vollkommene zahlenmässige Übereinstimmung kann man unter diesen Umständen natürlich nicht erwarten.

Um ein grösseres statistisches Material zu erhalten und um die Untersuchung zu erweitern, so dass sie nicht nur die Verrückungen der Windzentren der Zyklonen und Antizyklonen umfasst, sondern auch die Verrückung des neutralen Punktes des Windfeldes von dem Sattelpunkt im Druckfeld, die Verrückung der Konvergenzlinien des Stromfeldes von der Achse der Tiefdruckrinne und die Verrückung der Divergenzlinien von den Achsen der Hochdruckkeile, habe ich die amerikanischen Wetterkarten für 1927 systematisch bearbeitet.

Es wurden Stromlinien in der Nähe der singulären Punkte und Kurven des Druckfeldes gezeichnet. Da die Richtung des Windes nur sehr ungenau angegeben ist und das Stationsnetz ziemlich spärlich ist, können die Stromlinien nur die Hauptzüge der Luftbewegung wiedergeben. Die Angaben von der Windgeschwindigkeit waren viel zu spärlich um das Zeichnen von Kurven gleicher Geschwindigkeit zu erlauben. Geschwindigkeitsangaben fehlen nämlich regelmässig von der Mehrzahl der Stationen. Um den Einfluss der Gebirge auf die Druckgebilde und die Luftströmungen zu vermeiden, wurden die Untersuchungen auf die Ebenen beschränkt.

In Fig. 22—24 sind ein paar von diesen Stromlinienkarten wiedergegeben. Die dünnen Kurven sind die Isobaren, während die dicken Kurven mit Pfeilspitzen die Stromlinien sind. Die gestrichelten Linien geben die zeitliche Ortsveränderung der Singularitäten an.

In Fig. 22 ist ein Ausschnitt der Wetterkarte für 7. Dezember 1927 im Masstab 1 : 20 000 000 wiedergegeben. Wir haben hier eine grosse Zyklone mit Zentrum im Punkt *T*. Zwölf Stunden früher war das Zentrum im Punkt *A* und zwölf Stunden später im Punkt *B*. Die gestrichelte Kurve *ATB* gibt deshalb die Bahn des Zyklonenzentrums. Das Windzentrum ist etwa 90 km vom Druckzentrum verschoben u. zw. in einer Richtung, die einen Winkel von 130° mit der Fortpflanzungsrichtung bildet. Weiter sieht man auf der Karte zwei Konvergenzlinien, die beide von der Achse der Tiefdruckrinne verschoben sind, 140 km bzw. 110 km, in der Richtung, die man nach den theoretischen Entwicklungen des § 8 erwarten konnte.

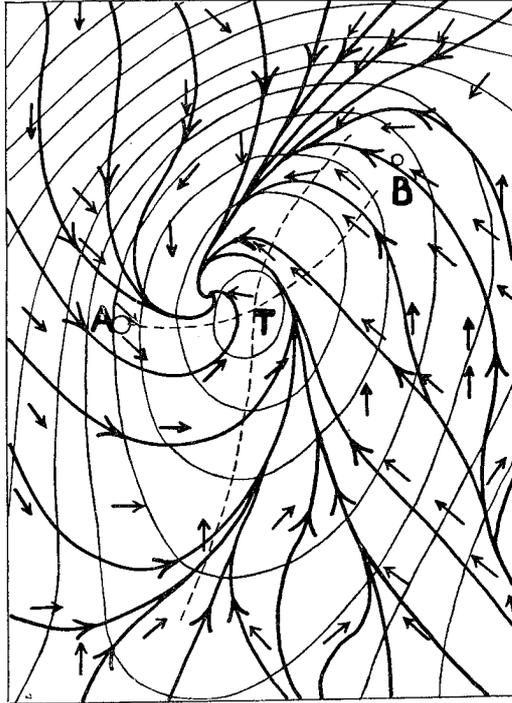


Fig. 22.

In Fig. 23 ist ein Ausschnitt der Wetterkarte für 13. Dezember 1927 wiedergegeben. Wir haben hier eine kleine Zyklone mit dem Zentrum *T*, dessen Bahn durch eine gestrichelte Kurve gegeben ist. Nördlich der Zyklone hat man einen Sattelpunkt *S*, dessen Bahn auch durch eine gestrichelte Kurve angegeben ist. Für die Zyklone findet man eine Verschiebung des Windzentrums vom Druckzentrum von 140 km, in einer Richtung, die einen Winkel von 140° mit der Fort-

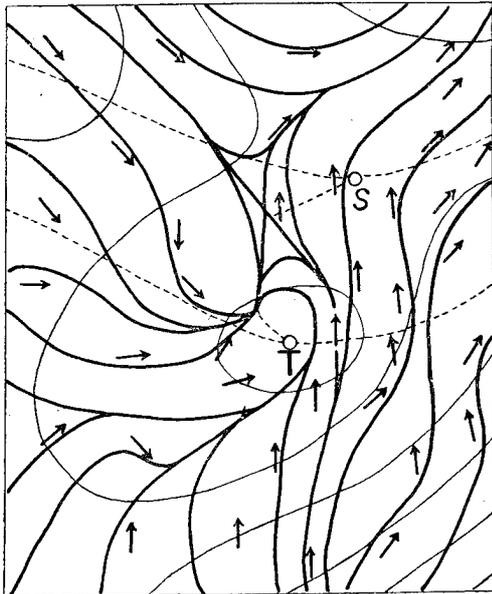


Fig. 23.

pflanzungsrichtung bildet, während der neutrale Punkt 240 km vom Sattelpunkt in einer Richtung verschoben ist, die einen Winkel von 200° mit der Fortpflanzungsrichtung bildet. Die Verrückungen geschehen also in naher Übereinstimmung mit den in § 4—5 in theoretischer Weise gefundenen Regeln.

Fig. 24 zeigt schliesslich einen Teil der Wetterkarte für 15. Oktober 1927. Man hat hier eine Antizyklone mit Zentrum im Punkt *A*, einen Sattelpunkt *S* und eine Tiefdruckrinne *ST*. Zwölf Stunden später ist das Zentrum der Antizyklone im Punkt *A'*, der Sattelpunkt in *S'* und die Achse der Tiefdruckrinne in *S' T'*. Man sieht, dass die entsprechenden Singularitäten des Windfeldes auch hier in Übereinstimmung mit der Theorie verschoben sind.

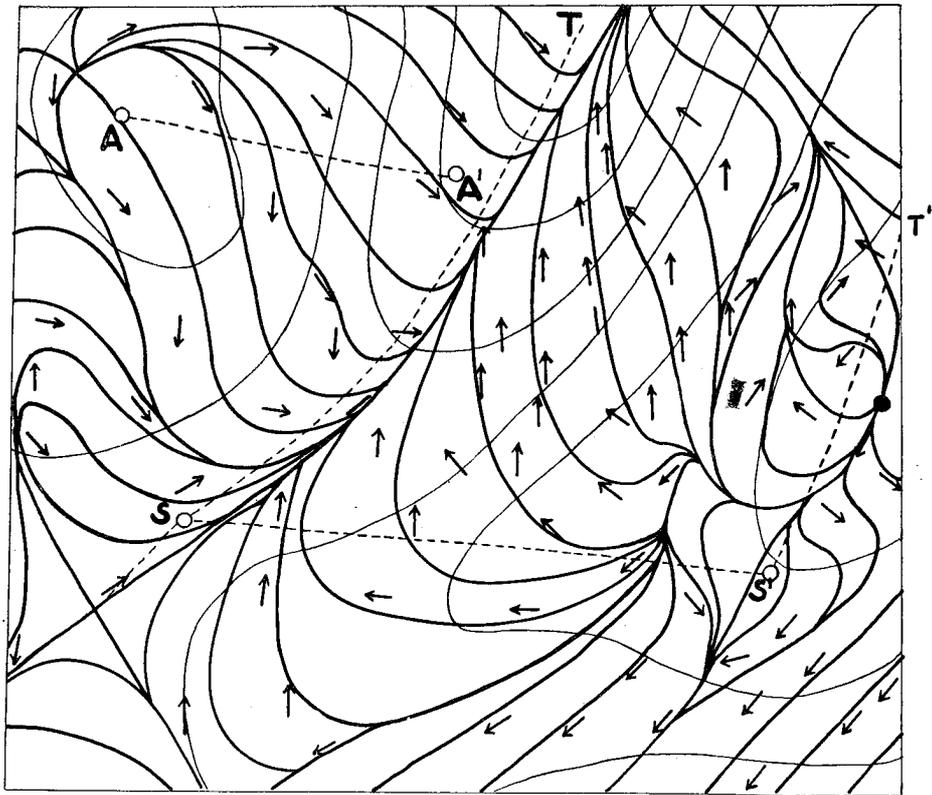


Fig. 24.

§ 10. Ausmessungen auf den Wetterkarten.

Karten wie die, die in Fig. 22—24 wiedergegeben sind, wurden für jeden Tag im Jahre 1927 gezeichnet, und verschiedene Messungen wurden ausgeführt.

Die Messungen wurden in allen Fällen gemacht, wo ich über der grossen nord-amerikanischen Ebene einigermaßen einfache Druckgebilde fand, deren Fortpflanzung sich bestimmen liessen.

In den Einzelfällen fand ich grosse Abweichungen von den in § 4—8 abgeleiteten Regeln für die Verrückung der singulären Punkte und Linien des Windfeldes von denjenigen im Druckfeld. Die gemessenen Ablenkungswinkel und die gemessenen Werte des Verhältnisses $\frac{v}{aG}$ sind auch in den Einzelfällen von denen sehr verschieden, die wir theoretisch abgeleitet haben. Etwas anderes ist auch nicht zu erwarten, den viele Ursachen tragen dazu bei, Abweichungen in den Einzelfällen hervorzurufen.

Erstens sind die Druckgebilde und die Bewegungen in der Natur nie so symmetrisch und unveränderlich, wie wir es in den theoretischen Ableitungen vorausgesetzt haben. Die Zyklonen und die Tiefdruckrinnen haben gewöhnlich mehr oder weniger unregelmässige Formen, und in einigen Fällen vertiefen sie sich, während sie sich in anderen Fällen während der Fortbewegung ausfüllen. Noch grösser sind die Unregelmässigkeiten bei den Antizyklonen, Sattelpunkten und Hochdruckkeilen, und es zeigte sich deshalb auch, dass die Abweichungen von den in § 4—8 gefundenen Regeln für diese Druckgebilde am grössten sind.

Ferner bringt das Zeichnen von Isobaren und Stromlinien zwar eine Ausgleichung, aber auch eine gewisse Willkür hinein.

Weiter muss erwähnt werden, dass wir in der Theorie mit der groben Annahme gerechnet haben, dass die Reibungskraft einen bestimmten Winkel mit der Windrichtung bildet, und mit der Geschwindigkeit proportional ist (vergl. Gleichung (1) S. 4).

Schliesslich muss bemerkt werden, dass der Ablenkungswinkel und das Verhältniss $\frac{v}{\alpha G}$ theoretisch nur für gewisse Abstände von dem Druckzentrum oder von der Achse des Hochdruckkeiles oder der Tiefdruckrinne berechnet worden sind, und dass es bei den Ausmessungen auf den Karten nicht möglich ist, immer die Messungen in diesen Abständen auszuführen. Ferner sind φ und $\frac{v}{\alpha G}$ nur für bestimmte Werte von k berechnet. Bei anderer Wahl von k würden die absoluten Werte anders ausfallen.

Es sind also viele Gründe dafür vorhanden, dass man in den Einzelfällen gewöhnlich nicht eine Übereinstimmung mit den in den §§ 5—8 abgeleiteten Regeln und Werten erwarten darf. Nur wenn die Druckgebilde einigermaßen einfach und regelmässig sind, wie z. B. in den Fällen, die in Fig. 22—24 wiedergegeben sind, findet man eine ziemlich gute Übereinstimmung mit der Theorie.

Durch zweckmässige Mittelbildung vieler Fälle kann man aber einen grossen Teil der oben erwähnten Gründe für Abweichungen beseitigen und somit eine Bestätigung der theoretischen Resultate erhalten. Die wegen der Unregelmässigkeiten des Druckgebildes, und der Fehler in der Zeichnung und in den Messungen auftretenden Abweichungen haben alle einen zufälligen Charakter und können durch Mittelbildung beseitigt werden.

Der Ablenkungswinkel des Windes.

Der Ablenkungswinkel φ des Windes von der Gradientenrichtung wurde in den verschiedenen Teilen der Zyklonen und Antizyklonen und auf der Vorderseite und der Rückseite der Tiefdruckrinnen und der Hochdruckkeilen gemessen.

In Tabelle 9 sind die arithmetischen Mittelwerte $\bar{\varphi}$ der gemessenen Ablenkungswinkel angegeben. Die Zahlen, die in Klammern stehen, sind die in Tabelle 1—3 angegebenen, theoretisch abgeleiteten Ablenkungswinkel.

Tabelle 9.

	$\bar{\varphi}$			
	vorn	hinten	rechts	links
Inneres Gebiet der Zyklone	67° (68°)	28° (41°)	46° (49°)	60° (67°)
Äusseres » » »	29° (25°)	56° (44°)	41° (30°)	46° (43°)
Antizyklone	42° (37°)	27° (19°)	27° (18°)	49° (47°)
Tiefdruckrinne oder Hochdruckkeil	44°	38°		

Aus dieser Tabelle sieht man, wie die Mittelwerte der beobachteten Ablenkungswinkel recht bedeutend von denjenigen abweichen, die wir in § 6—7 berechnet haben. Anders konnte man es aber nicht erwarten, da wir hier nur φ für gewisse Abstände vom Druckzentrum und für gewisse Werte von c , l , k und u berechnet haben. Bei anderer Wahl der Konstanten würden die absoluten Werte von φ anders ausfallen, der Sinn der Variation von Gebiet zu Gebiet aber bewahrt bleiben.

Für die Tiefdruckrinnen und die Hochdruckkeile haben wir sogar keine theoretisch abgeleiteten Zahlen angeben können, weil wir in Tabelle 4 verschiedene Ablenkungen angegeben sind.

Aus der Tabelle 4 sieht man, wie viel die absoluten Werte von φ von der Wahl von k abhängig sind. In allen Fällen ist aber φ auf der Vorderseite grösser als auf der Rückseite, ein Resultat, das durch die in Tabelle 9 gegebenen Mittelwerte der gemessenen Ablenkungswinkel bestätigt wird.

Für das innere Gebiet der Zyklonen ist sowohl für die Mittelwerte der beobachteten Ablenkungswinkel als auch für die berechneten Werte die Ablenkung am grössten auf der Vorderseite, etwas kleiner links, noch kleiner rechts und am kleinsten hinten. Entsprechende Bestätigung für den Sinn der Variationen geben die Zahlen in Tabelle 9 für die äusseren Gebiete der Zyklonen und für die verschiedenen Gebiete der Antizyklonen.

Schliesslich habe ich für die inneren Gebiete die mittleren Ablenkungswinkel gebildet, für diejenigen Zyklonen, die sich vertiefen und für diejenigen, die sich ausfüllen. Die Mittelwerte sind in Tabelle 10 angegeben; zum Vergleichen sind auch die Mittelwerte aufgeführt, die für alle Zyklonen gefunden sind (vergl. Tabelle 9).

Tabelle 10.

	vorn	hinten	rechts	links
Sich vertiefende Zyklonen	64°	16°	44°	52°
Sich ausfüllende Zyklonen	67°	52°	68°	75°
Sämtliche Zyklonen	67°	28°	46°	60°

Diese Mittelwerte sind mit recht spärlichem Material gebildet, geben aber eine Bestätigung eines Satzes, den ich früher¹⁾ auf Grund theoretischer Überlegungen ausgesprochen habe: «Wenn die Zyklone sich vertieft, ist der Ablenkungswinkel im inneren Gebiet klein, während er gross ist, wenn die Zyklone sich ausfüllt».

Das Verhältnis zwischen Windgeschwindigkeit und Druckkraft.

Die amerikanischen Wetterkarten gestatten nicht, wie erwähnt, Kurven gleicher Geschwindigkeit einzuzichnen, weil eine grosse Anzahl Stationen die Geschwindigkeit nicht angibt. Die Werte $\frac{v}{\alpha G}$ sind deshalb für die einzelnen Stationen berechnet worden, die in dem betreffenden Gebiet vorkommen. Hatten mehrere Stationen in demselben Gebiet Geschwindigkeitsangaben, wurde das arithmetische Mittel der Einzelmessungen von $\frac{v}{\alpha G}$ gebildet. Wegen des erwähnten Mangels an Geschwindigkeitsangaben, sind keine Werte von $\frac{v}{\alpha G}$ in den inneren Gebieten der Zyklonen gemessen. Diese Gebiete decken nämlich ein verhältnismässig kleines Areal, und man findet nur sehr selten innerhalb dieses Areales eine Station, die die Geschwindigkeit angibt.

In Tabelle 11 sind die Mittelwerte der auf den Karten gefundenen Werte des Verhältnisses $\frac{v}{\alpha G}$ gegeben. Die in Tabelle 3 angegebenen, theoretisch abgeleiteten Werte von $\frac{v}{\alpha G}$ sind in Klammern hinzugefügt.

¹⁾ Th. Hesselberg: Mögliche Luftbewegungen an der Erdoberfläche. Geof. Publ. Vol. III, Nr. 7 Oslo 1924. S. 22.

Tabelle 11.

	$10^{-4} \frac{v}{\alpha G}$			
	vorn	hinten	rechts	links
Äusserer Teil der Zyklonen	0.39 (0.46)	0.54 (0.65)	0.49 (0.59)	0.32 (0.52)
Tiefdruckrinne oder Hochdruckkeil . . .	0.51	0.46		

Für die Tiefdruckrinnen und die Hochdruckkeile haben wir auch hier keine theoretisch abgeleiteten Werte angegeben. Aus der Tabelle 4 würde man nämlich recht verschiedene Werte erhalten, je nach der Wahl von k . In allen Fällen findet man bei den bewegten Hochdruckkeilen und Tiefdruckrinnen einen grösseren Wert von $\frac{v}{\alpha G}$ auf der Vorderseite als auf der Rückseite, ein Resultat, das durch die in Tabelle 11 gegebenen Mittelwerte der beobachteten $\frac{v}{\alpha G}$ bestätigt wird.

Auch für die äusseren Gebiete der Zyklonen gibt Tabelle 11 eine vollkommene Bestätigung des Sinnes der theoretisch abgeleiteten Werte von $\frac{v}{\alpha G}$.

Die Verrückung der Windzentra von den Druckzentra.

In § 4 haben wir die Regel gefunden, dass in bewegten Zyklonen und Antizyklonen das Windzentrum eine Strecke:

$$R = \left| \frac{k_1}{k} \right| u$$

vom Druckzentrum verschoben ist u. zw. in einer Richtung, die einen Winkel:

$$\pi - \varphi$$

mit der Fortpflanzungsrichtung u bildet (Fig. 6).

Mit Hilfe der Gleichungen (20) und (17) kann man k_1 als Funktion für k finden und bekommt:

$$R = f(k) u.$$

Für die Werte von k , die auf den Wetterkarten gewöhnlich vorkommen, k zwischen $1.0 \cdot 10^{-8}$ und $0.5 \cdot 10^{-8}$, findet man Werte von $f(k)$ zwischen $0.56 \cdot 10^{-4}$ und $0.61 \cdot 10^{-4}$ und kann mit guter Annäherung:

$$R = 0.6 \cdot 10^{-4} u$$

setzen.

In § 5 haben wir die Regel gefunden, dass das hyperbolische Punkt im Windfeld eine Strecke:

$$R = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \frac{k_x + k_y}{2 k_x k_y \sqrt{c^2 + l^2}} u$$

von dem Sattelpunkt im Druckfeld verschoben ist u. zw. in einer Richtung, die einen Winkel

$$\pi + \varepsilon$$

mit der Fortpflanzungsrichtung u bildet.

Für die Werte von k_x und k_y , die auf den Wetterkarten gewöhnlich vorkommen, kann man mit hinreichender Genauigkeit:

$$R = 0.6 \cdot 10^4 u$$

setzen.

Wir haben also denselben Formel für die Verrückung R wie im Falle der Zyklonen und Antizyklonen und können dann die zwei Regeln in eine zusammenfassen:

Das Windzentrum ist eine Strecke:

$$(35) \quad R = 0.6 \cdot 10^4 u$$

vom Druckzentrum verschoben u. zw. in einer Richtung, die bei den Zyklonen und Antizyklonen einen Winkel $(\pi - \varphi)$ und bei den Sattelpunkten einen Winkel $(\pi + \varepsilon)$ mit der Fortpflanzungsrichtung u bildet.

Diese Regel findet man zuweilen sehr gut bestätigt durch Ausmessung auf den Wetterkarten, gewöhnlich findet man aber grössere oder kleinere Abweichungen von der Regel. Es gibt auch Fälle, wo diese Abweichungen so gross sind, dass man sagen muss, dass die Verrückung nicht in Uebereinstimmung mit der oben gegebenen Regel stattfindet.

Um eine Verifikation der Regel zu finden, muss man deshalb durch Mittelbildung die zufälligen Fehler wegschaffen. Die zufälligen Fehler können in den Einzelfällen die relative Lage des Windzentrums und des Druckzentrums in irgend eine Richtung verschieben. Wenn man das Vektormittel der Verrückungen bildet, bekommt man aber dann einen Mittelwert, der mehr oder weniger von diesen zufälligen Abweichungen befreit ist, je nachdem das Mittel von vielen oder wenigen Fällen gebildet ist.

In Fig. 25 ist das Vektormittel der auf den Wetterkarten gemessenen Verrückun-

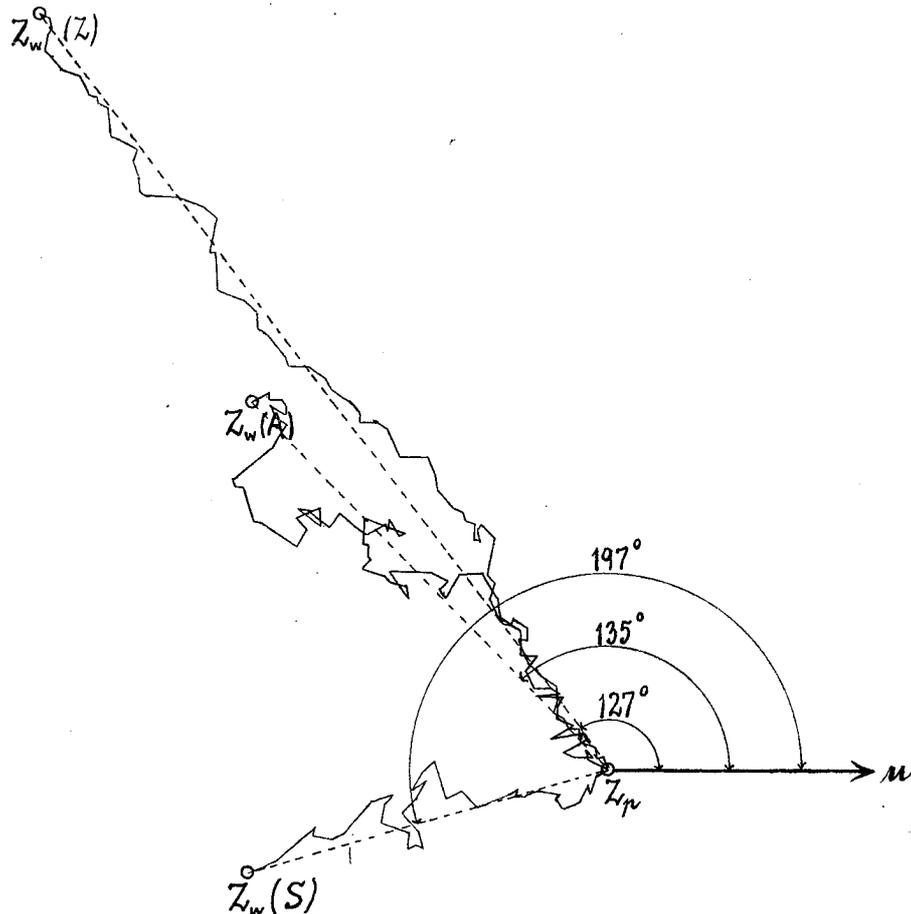


Fig. 25.

gen des Windzentrums von dem Druckzentrum gebildet, für die Zyklonen mit Z , für die Antizyklonen mit A und für die Sattelpunkte mit S bezeichnet. Aus der Figur ersieht man unmittelbar, wie viel grösser die Unregelmässigkeiten bei den Antizyklonen und den Sattelpunkten sind als bei den Zyklonen.

Fig. 26 gibt die in dieser Weise gefundenen mittleren Verrückungen R_m für die Zyklonen (Z), die Antizyklonen (A) und die Sättel (S). Diese Figur zeigt, wie die Verrückung im Mittel ungefähr in der theoretisch gefundenen Richtung geschieht.

Tabelle 12.

	$ R_m $ km	γ_m	u_m	$\frac{ R_m }{10^4 u_m}$
Zyklone . . .	60.5	127°	13.9	0.45
Antizyklone	41.5	135°	9.9	0.42
Sattel . . .	58.3	197°	13.1	0.44

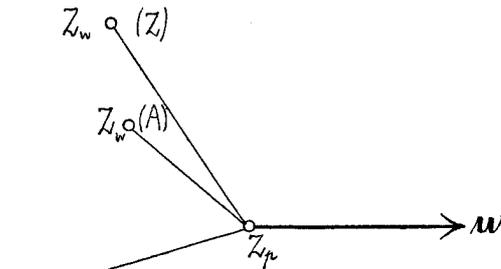


Fig. 26.

In Tabelle 12 ist in der ersten Kolonne $|R_m|$ in km gegeben, in der zweiten Kolonne der Winkel γ_m zwischen R_m und der Fortpflanzungsrichtung u . Es ist auffallend, dass die mittlere Verrückung bei den Antizyklonen viel kleiner ist als bei den Zyklonen und Sätteln. Nach Gleichung (35) sollte die Erklärung hierfür sein, dass die untersuchten Antizyklonen in Mittel eine kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Diese Annahme wird durch die in der dritten Kolonne der Tabelle gegebenen mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestätigt. Die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit der untersuchten Antizyklonen war 9.9 m/sek, während sie für die Zyklonen 13.9 m/sek und für die Sättel 13.1 m/sek betrug.

In der vierten Kolonne der Tabelle ist schliesslich $\frac{|R_m|}{10^4 u_m}$ angegeben, und die Werte sind zwischen 0.42 und 0.45. Diese Werte stimmen gut mit einander überein, sind aber bedeutend kleiner als den Wert 0.6 den Formel (35) für $\frac{R}{10^4 u}$ angibt. Die Erklärung hierfür muss in der Hauptsache diejenige sein, dass man durch Bildung der Vektormittel eine relativ kleinere Verrückung bekommt als in den Einzelfällen.

Die Verrückung der Konvergenzlinien von der Achse der Tiefdruckrinne und der Divergenzlinien von der Achse des Hochdruckkeiles.

Nach Gleichung (35) in § 8 hat man für diese Verrückung:

$$a = a_1 + a_2 u,$$

wo.

$$a_1 = \frac{l}{c} \frac{q}{k} \text{ und } a_2 = -\frac{cA + lD}{ck}$$

ist.

Mit Hilfe der zwei ersten Gleichungen (33) können A und D als Funktionen von k berechnet werden, und man bekommt dass a_2 eine Funktion $a_2(k)$ von k ist. Man bekommt dann für die Verrückung a :

$$(36) \quad a = a_1(k, q) + a_2(k) u.$$

Durch Ausmessungen auf den Wetterkarten findet man zuweilen eine sehr gute Bestätigung dieser Formel, in anderen Fällen können aber auch recht grosse Abweichungen

zwischen der direkt gemessenen Verrückung und der durch Formel (36) berechnete Verrückung. Um eine wirkliche Bestätigung der Formel (36) zu finden, muss man deshalb Mittel bilden.

Man misst in den einzelnen Fällen k und q auf der Wetterkarte und findet dann mittels Gleichung (36) einen Wert a . Das arithmetische Mittel dieses a sind in Tabelle 13 mit a_m bezeichnet.

Andererseits misst man in den einzelnen Fällen die wirkliche Verrückung, die wir a' nennen werden. Das arithmetische Mittel dieser a' sind in Tabelle 13 mit a'_m bezeichnet.

Tabelle 13.

a'_m km	a_m km
102	104

Wie man sieht hat man hier eine gute Übereinstimmung zwischen den Mittelwerten der gemessenen und der berechneten Verrückungen.

Schlussbemerkung.

Im ganzen muss man sagen, dass die Bearbeitung der amerikanischen Wetterkarten für 1927 eine gute Bestätigung für alle die Resultate gegeben hat, die oben in § 4—8 durch theoretische Betrachtungen abgeleitet sind.

Überall haben wir empirische Bestätigung der theoretisch abgeleiteten Resultate gefunden. Man kann aber daraus schliessen, dass die Grundlage unserer theoretischen Ableitungen, nämlich die von Sverdrup und mir aufgestellte bequeme Form der Bewegungsgleichungen (1) für die Bewegungen nahe am Erdboden annähernd gültig ist.

In diesen Gleichungen ist die Reibungskraft $\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ durch einen Vektor R ersetzt worden, der der Windgeschwindigkeit v proportional ist und einen konstanten Winkel β mit $-v$ bildet (Fig. 28); Die obigen Untersuchungen bestätigen also, dass dieses in Mittel mit ziemlicher Genauigkeit gemacht werden kann.

Verschiedene Untersuchungen haben gezeigt, dass der Wind in der unmittelbaren Nähe des Erdbodens zuerst rasch und in grösseren Höhen langsamer mit der Höhe zunimmt. Diese Zunahme ist um so grösser, je kräftiger der Wind ist. Ausserdem dreht der Wind etwas nach rechts mit zunehmender Höhe und der Reibungskoeffizient η nimmt rasch mit der Höhe zu.

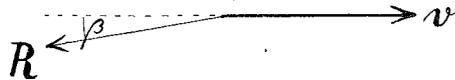


Fig. 28.

Diese Charakteristika, die die Reibungskraft $\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ bestimmen, findet man in den erdnächsten Luftschichten, unabhängig davon ob der Wind in grösseren Höhen nach rechts oder nach links dreht oder ob er zunimmt oder abnimmt. Deshalb kann auch die Reibungskraft in Anemometerhöhe, wo man noch ziemlich nahe am Erdboden ist, mit ziemlicher Genauigkeit durch einen Vektor ersetzt werden, der unabhängig von dem Wert von η ist und unabhängig davon ist, wie der Wind sich in grösseren Höhen ändert.

Dieses gilt jedoch nur mit einer gewissen Annäherung. Wenn der Austausch-koeffizient gross ist, hat man einen lebhaften Austausch von Luftteilchen zwischen der Luft in der Höhe und der Luft nahe am Erdboden. Diese letztere bekommt dann mehr

Bewegungsenergie von der Höhe und wird deshalb kräftiger und mehr von dem Gradienten abgelenkt als in dem Fall, wo η klein ist.

Aus diesem Grund sollte man z. B. erwarten, dass der Wind auf der Rückseite im äusseren Teil der Zyklone relativ kräftig und stark abgelenkt sein sollte, während er auf der Vorderseite, wo die Luft gewöhnlich stabiler geschichtet ist, relativ schwach und wenig von dem Gradienten abgelenkt sein sollte. Diese Hauptzüge in der Windverteilung sind genau dieselben wie die, die wir in der Natur finden und die wir oben dadurch erklärt haben, dass der Wind auf der Rückseite absterbend ist, während man auf der Vorderseite beginnende Winde hat. Die Trägheit der Luftmassen und die Reibungsverhältnisse tragen also beide dazu bei, die charakteristischen Unterschiede der Windverhältnisse auf der Vorderseite und auf der Rückseite im äusseren Teil der Zyklonen hervorzurufen.