

# THERMODYNAMIQUE DES SYSTÈMES NON-UNIFORMES EN VUE DES APPLICATIONS A LA MÉTÉOROLOGIE

PAR JACQUES VAN MIEGHEM

(Manuscrit reçu le 7 décembre 1934.)

## Introduction.

Dans cette note, après un rappel des équations de la dynamique des fluides visqueux et du bilan énergétique que l'on en déduit, nous énonçons les deux principes fondamentaux de la thermodynamique dans le cas d'un système fluide visqueux non-uniforme en mouvement. Nous établissons ensuite divers bilans énergétiques et notamment ceux utilisés en Météorologie.<sup>1</sup>

La partie thermodynamique de ce travail prend sa base dans les « *Leçons de Thermodynamique et de Chimie-Physique* » de M. le Professeur Th. De Donder<sup>2</sup> et plus spécialement dans les §§ 13 et 28 consacrés aux systèmes non-uniformes les plus généraux. La méthode d'exposition adoptée ici pour les deux principes fondamentaux est celle qu'utilise M. De Donder dans son livre sur « *L'Affinité* »<sup>3</sup>.

## 1. Equations du transport de l'air atmosphérique et équation de continuité.

Considérons une masse  $M$  d'air atmosphérique et rapportons son mouvement à un système de référence  $Oxyz$  quelconque mais fixe par rapport à la Terre. A l'instant  $t$ , au point  $P$  de coordonnées  $x, y, z$  considérons le parallépipède de côtes  $\delta x, \delta y, \delta z$ , ce parallépipède définit le volume élémentaire

$$\delta V \equiv \delta x \delta y \delta z \quad (1)$$

dont tous les points sont pris au même instant  $t$ , on a donc

$$\delta t \equiv 0. \quad (2)$$

Désignons par  $\delta M$  la masse d'air contenue dans  $\delta V$ , alors, par définition, on a

$$\delta M \equiv \rho \delta V \equiv \rho \delta x \delta y \delta z, \quad (3)$$

où

$$\rho \equiv \rho(x, y, z, t) \quad (4)$$

<sup>1</sup> V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron, *Hydrodynamique Physique* (Conférences-Rapports, Paris 1934), voir § 49.

<sup>2</sup> Th. De Donder, *Leçons de Thermodynamique et de Chimie-Physique* (Paris, Gauthier-Villars, 1920) voir §§ 13 et 28.

<sup>3</sup> Th. De Donder, *L'Affinité* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

est la *densité* de l'air au point  $P$  à l'instant  $t$ .  
Les équations différentielles

$$\boxed{\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} = dt} \quad (5)$$

régissent le mouvement de la masse élémentaire  $\delta M$ ; les symboles  $v_x, v_y, v_z$  représentent les composantes de la *vitesse du vent* au point  $P$  à l'instant  $t$ . Par hypothèse, le système différentiel (5) admet l'invariant (3), et par conséquent

$$\frac{d\delta M}{dt} = 0, \quad (6)$$

où la différentiation

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (7)$$

est effectuée conformément aux équations différentielles (5) du transport de l'air. Il en résulte l'équation de continuité

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.} \quad (8)$$

## 2. Equation stœcométrique de la météorologie.

Nous admettons que la masse élémentaire  $\delta M$  ne contient que de l'air sec, de la vapeur d'eau et des nuages formés de fines gouttes dont la tension superficielle est négligeable. Désignons par

$$\delta M'_1, \delta M''_1, \delta M''_2 \quad (9)$$

respectivement les masses des gouttes d'eau, de la vapeur d'eau et de l'air sec contenues dans le  $\delta M$  envisagé.

Phases \ Constit.	Eau	Air sec
	Liquide	$\delta M'_1$
Gazeuse	$\delta M''_1$	$\delta M''_2$

La masse élémentaire  $\delta M$  d'air atmosphérique humide contient donc deux constituants: air sec et eau dont le dernier seulement peut passer de la phase liquide à la phase gazeuse ou inversement. Nous supposons donc ici qu'il n'y a pas de formation de glace.

On a évidemment

$$\delta M \equiv \delta M'_1 + \delta M''_1 + \delta M''_2. \quad (10)$$

Cela étant, posons

$$m'_1 \equiv \frac{\delta M'_1}{\delta M}, \quad m''_1 \equiv \frac{\delta M''_1}{\delta M}, \quad m''_2 \equiv \frac{\delta M''_2}{\delta M}. \quad (11)$$

Les titres  $m'_1, m''_1, m''_2$  dépendent en général des variables spatio-temporelles  $x, y, z$  et  $t$ , et représentent les masses respectivement des gouttes d'eau, de la vapeur d'eau et de l'air sec contenues dans l'unité de masse élémentaire  $\delta M$ . De (10) et (11) il résulte immédiatement que

$$m'_1 + m''_1 + m''_2 \equiv 1. \quad (12)$$

Par hypothèse, la matière qui constitue le  $\delta M$  ci-dessus envisagé ne peut diffuser dans le milieu ambiant. Ce  $\delta M$  contient toujours la même matière, en d'autres termes la masse élémentaire  $\delta M$  invariante sur sa trajectoire est un *système fermé*; seule sa composition physique peut se modifier. Il ne peut pas, par conséquent, se produire des précipitations.

Remarquons que l'humidité spécifique<sup>1</sup> de l'air est défini par le rapport

$$\frac{m''_1}{m''_1 + m''_2}. \quad (13)$$

Ensuite, grâce à (6), on a évidemment

$$\frac{d}{dt} (\delta M'_1 + \delta M''_1 + \delta M''_2) = 0$$

et

$$\frac{d(m'_1 + m''_1 + m''_2)}{dt} = 0. \quad (14)$$

Si de plus, l'on suppose que dans l'atmosphère la dissolution de l'air sec dans l'eau est négligeable, c'est-à-dire que l'air sec n'est autre qu'un corps neutre ou de présence, l'unique transformation physique possible est le passage de l'eau de la phase liquide à la phase gazeuse ou vice versa:

$$\boxed{\text{Vapeur d'eau} \rightleftharpoons \text{eau liquide.}}$$

Dans ce cas, on a

$$\frac{dm''_2}{dt} = 0. \quad (15)$$

Par suite, en vertu de (14),

$$\frac{d(m'_1 + m'_1)}{dt} = 0. \quad (16)$$

Posons maintenant

$$\frac{dm''_1}{dt} \equiv \mathfrak{M} \frac{d\xi}{dt} \quad (17)$$

où  $\mathfrak{M}$  représente la masse molaire de l'eau, ( $\mathfrak{M} \equiv 18$ ). La quantité  $\frac{d\xi}{dt}$  représente donc le nombre de mûles d'eau qui se vaporisent dans l'unité de masse pendant l'unité de temps. Cela étant, le long des trajectoires (5) des particules d'air, l'équation stœcométrique de la météorologie est de la forme

$$\boxed{\frac{dm'_1}{-\mathfrak{M}} = \frac{dm''_1}{\mathfrak{M}} = d\xi.} \quad (18)$$

Nous dirons avec M. Th. De Donder<sup>2</sup> que la fonction

$$\xi \equiv \xi(x, y, z, t) \quad (19)$$

est le degré d'avancement de la transformation physique envisagée. Remarquons qu'il y a *vaporisation* ou *condensation* suivant que

$$d\xi > 0 \text{ ou } d\xi < 0 \quad (20)$$

et que l'on peut considérer la dérivée totale  $\frac{d\xi}{dt}$  comme étant la *vitesse de vaporisation* ou de *condensation*.

<sup>1</sup> *Hydrodynamique-Physique*, loc. cit. p. 211.

<sup>2</sup> *L'Affinité*, loc. cit. voir p. 8.

### 3. Variables d'état et fonctions d'état.

Les variables d'état sont celles qui définissent à chaque instant  $t$  l'état physique de l'atmosphère en un point quelconque  $P$ . Ces variables sont *la pression*

$$p \equiv p(x, y, z, t) \quad (21)$$

*la température absolue*

$$T \equiv T(x, y, z, t) \quad (22)$$

*le degré d'avancement*

$$\xi \equiv \xi(x, y, z, t)$$

et les composantes

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \quad (23)$$

de la déformation due à la viscosité.

Rappelons que les composantes de la vitesse de déformation sont définies par

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} \equiv \dot{\varepsilon}_x \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{d\varepsilon_y}{dt} \equiv \dot{\varepsilon}_y \equiv \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{d\varepsilon_z}{dt} \equiv \dot{\varepsilon}_z \equiv \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (24)$$

$$\frac{d\gamma_x}{dt} \equiv \dot{\gamma}_x \equiv \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{d\gamma_y}{dt} \equiv \dot{\gamma}_y \equiv \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{d\gamma_z}{dt} \equiv \dot{\gamma}_z \equiv \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Une fonction d'état est une fonction qui dépend exclusivement des variables d'état; elle est donc indépendante de la transformation physique que subit la masse élémentaire  $\delta M$ . Les deux fonctions d'état fondamentales introduites par les deux principes de la thermodynamique sont *l'énergie interne*

$$u \equiv u(p, T, \xi, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \quad (25)$$

et *l'entropie*

$$s \equiv s(p, T, \xi, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \quad (26)$$

de l'unité de masse élémentaire  $\delta M$ .

### 4. Equations dynamiques de la météorologie<sup>1</sup>.

Celles-ci ne sont autres que *les équations de Cauchy* sous la forme eulérienne

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} + 2(\Omega_y v_z - \Omega_z v_y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \chi_x \right) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + 2(\Omega_z v_x - \Omega_x v_z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \chi_y \right) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} + 2(\Omega_x v_y - \Omega_y v_x) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \chi_z \right) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

où  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  et  $(\chi_x, \chi_y, \chi_z)$  sont respectivement les composantes du vecteur de la rotation de la terre et de l'action de viscosité et où

$$\varphi \equiv \varphi(x, y, z) \quad (28)$$

représente le géopotential. Rappelons que les composantes de l'action de viscosité sont données par

<sup>1</sup> V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron, *Hydrodynamique-Physique* (Conférences-Rapports, Paris 1934), voir §§ 12 et 34.

$$\chi_x \equiv \frac{\partial \tau_x^x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x^y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x^z}{\partial z}, \quad \chi_y \equiv \frac{\partial \tau_y^x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y^z}{\partial z}, \quad \chi_z \equiv \frac{\partial \tau_z^x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z^y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z^z}{\partial z} \quad (29)$$

où

$$\begin{aligned} \tau_x^x &\equiv \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 2 \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \tau_y^y &\equiv \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 2 \eta \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \tau_z^z &\equiv \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 2 \eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_z^y &\equiv \tau_y^z \equiv -\eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \tau_x^z &\equiv \tau_z^x \equiv -\eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), & \tau_y^x &\equiv \tau_x^y \equiv -\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

sont les composantes de la tension de viscosité exercée par l'unité de volume élémentaire  $\delta V$  sur le milieu ambiant et où

$$\eta \equiv \eta(x, y, z, t) \quad (31)$$

est le coefficient de viscosité.

Remarquons que

$$-\frac{\chi_x}{\rho}, \quad -\frac{\chi_y}{\rho}, \quad -\frac{\chi_z}{\rho} \quad (32)$$

sont les composantes de la force de frottement qu'exerce le milieu ambiant sur l'unité de masse élémentaire  $\delta M$ .

### 5. Bilan dynamique de l'énergie.

Multiplions les équations (27) respectivement par  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  d'où, après addition, le bilan énergétique suivant

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z \right) + \frac{1}{\rho} (\chi_x v_x + \chi_y v_y + \chi_z v_z) = 0. \quad (33)$$

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d e_{cin}}{dt} &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ \frac{d w_p}{dt} &\equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z \right) \\ \frac{d w_f}{dt} &\equiv -\frac{1}{\rho} (\chi_x v_x + \chi_y v_y + \chi_z v_z) \end{aligned} \right. \quad (34)$$

où

$e_{cin}$   $\equiv$  énergie cinétique de l'unité de masse élémentaire  $\delta M$ ,

$w_p$   $\equiv$  travail du gradient de pression effectué par le milieu extérieur sur l'unité de masse élémentaire,

$w_f$   $\equiv$  travail de la force de frottement effectué par le milieu extérieur sur l'unité de masse élémentaire.

Finalement de la relation (33) et des définitions (34) on déduit le bilan<sup>1</sup>

$$\boxed{\frac{d e_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d w_p}{dt} + \frac{d w_f}{dt}} \quad (35)$$

qui exprime que

<sup>1</sup> *Hydr.-Phys.*, voir p. 186, form. (1).

*l'accroissement de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  pendant l'unité de temps provient des travaux du gradient de la pression et de la force de frottement effectués par le milieu extérieur pendant le même intervalle de temps sur l'unité de masse  $\delta M$ .*

### 6. Travail élastique effectué par l'unité de masse élémentaire sur le milieu ambiant.

Transformons l'expression de  $\frac{dw_p}{dt}$ , on trouve immédiatement que

$$\frac{dw_p}{dt} \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} + \frac{\partial p v_y}{\partial y} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} \right) + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (36)$$

ou encore, compte tenu de l'équation de continuité (8),

$$\frac{dw_p}{dt} \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} + \frac{\partial p v_y}{\partial y} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} \right) + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}. \quad (37)$$

Semblablement

$$\begin{aligned} \frac{dw_f}{dt} \equiv & -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\tau_x^x v_x + \tau_y^x v_y + \tau_z^x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_x^y v_x + \tau_y^y v_y + \tau_z^y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_x^z v_x + \tau_y^z v_y + \tau_z^z v_z)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left( \tau_x^x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_y^y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_z^z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_y^z \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \tau_x^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau_y^x \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (38)$$

ou encore, (30) et (24),

$$\frac{dw_f}{dt} \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\tau_x^x v_x + \tau_y^x v_y + \tau_z^x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_x^y v_x + \tau_y^y v_y + \tau_z^y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_x^z v_x + \tau_y^z v_y + \tau_z^z v_z)}{\partial z} \right) - \delta \quad (39)$$

où

$$\begin{aligned} \rho \cdot \delta \equiv & -\frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \eta \left\{ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

ou encore

$$\rho \cdot \delta \equiv -\frac{2}{3} \eta (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)^2 + \eta (2\dot{\varepsilon}_x^2 + 2\dot{\varepsilon}_y^2 + 2\dot{\varepsilon}_z^2 + \dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2 + \dot{\gamma}_z^2) > 0. \quad (41)$$

Cela étant, posons

$$\begin{aligned} \frac{dw_s}{dt} \equiv & -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} + \frac{\partial p v_y}{\partial y} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\tau_x^x v_x + \tau_y^x v_y + \tau_z^x v_z)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\tau_x^y v_x + \tau_y^y v_y + \tau_z^y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_x^z v_x + \tau_y^z v_y + \tau_z^z v_z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

et<sup>1</sup>

$$\boxed{\frac{dw_{el}}{dt} \equiv -p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} + \delta} \quad (43)$$

où

$w_s$   $\equiv$  travail de surface effectué par le milieu ambiant sur l'unité de masse élémentaire  $\delta M$   
 $w_{el}$   $\equiv$  travail élastique effectué par le milieu ambiant sur l'unité de masse élémentaire  $\delta M$ .

<sup>1</sup> Mlle Y. Dupont, *Applications physico-chimiques de la Thermodynamique des systèmes en mouvement* (Bull. Ac. Roy. de Belg., Cl. des Sc., janvier 1932), voir dernière formule (21) et formule (25).

Alors, des formules (37) et (39) ainsi que des définitions (42) et (43) il résulte que

$$\boxed{\frac{dw_{el}}{dt} \equiv \frac{dw_s}{dt} - \left( \frac{dw_p}{dt} + \frac{dw_f}{dt} \right) \equiv \frac{dw_s}{dt} - \left( \frac{de_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right)} \quad (44)$$

compte tenu du bilan (35). Telle est l'expression de l'accroissement du travail élastique effectué par le milieu ambiant sur l'unité de masse élémentaire pendant l'unité de temps.

Rappelons que la fonction  $\delta$  des composantes de la vitesse de déformation définie en (41) est la *fonction dissipative de Lord Rayleigh* qui représente par unité de masse et de temps le *travail perdu par frottement*<sup>1</sup>.

### 7. Relations entre les composantes du tenseur de la viscosité et la fonction dissipative de Lord Rayleigh.

En comparant les expressions (30) des composantes du tenseur de la viscosité à la forme quadratique (41) de la fonction dissipative on voit aisément que

$$\tau_x^x \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_x}, \quad \tau_y^y \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_y}, \quad \tau_z^z \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_z} \quad (45)$$

et

$$\tau_z^y \equiv \tau_y^z \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_x}, \quad \tau_x^z \equiv \tau_z^x \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_y}, \quad \tau_y^x \equiv \tau_x^y \equiv -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_z} \quad (45')$$

grâce aux définitions (24) des composantes de la vitesse de déformation.

Ensuite, remarquons que la fonction dissipative  $\delta$  est une fonction homogène du second degré en  $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_y, \dot{\gamma}_z$ . Par suite, en vertu du théorème classique d'Euler sur les fonctions homogènes, on a l'identité

$$\frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_x} \dot{\varepsilon}_x + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_y} \dot{\varepsilon}_y + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\varepsilon}_z} \dot{\varepsilon}_z + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_x} \dot{\gamma}_x + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_y} \dot{\gamma}_y + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{\gamma}_z} \dot{\gamma}_z \equiv 2\delta,$$

ou encore, grâce à (45) et (24), une nouvelle forme de  $\delta$ :

$$\boxed{\delta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \tau_x^x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \tau_y^y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \tau_z^z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \tau_z^y \frac{d\gamma_x}{dt} + \tau_x^z \frac{d\gamma_y}{dt} + \tau_y^x \frac{d\gamma_z}{dt} \right)} \quad (46)$$

### 8. Bilan thermodynamique de l'énergie.

Le premier principe de la thermodynamique<sup>2</sup> appliqué à l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  fournit le bilan énergétique

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{dw_s}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{de_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}} \quad (47)$$

Ce bilan exprime que pendant l'unité de temps et pour l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  l'accroissement des énergies interne  $u$ , cinétique  $e_{cin}$  et potentielle  $\varphi$  est dû à la quantité de chaleur  $\frac{dq}{dt}$  reçue par l'unité de masse, augmentée du travail de surface  $\frac{dw_s}{dt}$  effectué par le milieu extérieur.

<sup>1</sup> *Hydrodynamique-Physique*, voir p. 190.

<sup>2</sup> Th. De Donder, *Leçons de Thermodynamique et de Chimie physique*, Loc. cit., form. (29).

### 9. Divers bilans énergétiques.

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dw_s^p}{dt} &\equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p v_x}{\partial x} + \frac{\partial p v_y}{\partial y} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{dw_s^{visc}}{dt} &\equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\tau_x^x v_x + \tau_y^x v_y + \tau_z^x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_x^y v_x + \tau_y^y v_y + \tau_z^y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_x^z v_x + \tau_y^z v_y + \tau_z^z v_z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \right. \quad (48)$$

où

$w_s^p$   $\equiv$  travail de surface dû à la pression et effectué par le milieu ambiant sur l'unité de masse  $\delta M$ ,

$w_s^{visc}$   $\equiv$  travail de surface dû à la viscosité et effectué par le milieu ambiant sur l'unité de masse  $\delta M$ .

On a évidemment

$$\frac{dw_s}{dt} = \frac{dw_s^p}{dt} + \frac{dw_s^{visc}}{dt}. \quad (49)$$

Cela étant, de (43) et des relations énergétiques (35) et (44) il résulte que

$$\frac{de_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dw_s}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} - \delta \quad (50)$$

ou encore, (49),

$$\boxed{\frac{de_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dw_s^p}{dt} + \frac{dw_s^{visc}}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} - \delta} \quad (51)$$

avec

$$\alpha \equiv \frac{1}{\rho}.$$

Le bilan (51) exprime que pendant l'unité de temps et pour l'unité de masse, l'accroissement des énergies cinétique et potentielle provient des travaux de surface dûs à la pression et à la viscosité et effectués par le milieu extérieur augmentés du travail élastique ou interne  $p \frac{d\alpha}{dt} - \delta$  effectué par l'unité de masse envisagée.

Ensuite, en remplaçant dans (47) la somme  $\frac{de_{cin}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}$  par sa valeur (35) on obtient le bilan

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dt} + \left( \frac{dw_p}{dt} + \frac{dw_f}{dt} \right) - \frac{dw_s}{dt}} \quad (52)$$

Enfin<sup>1</sup>, compte tenu de (43) et (44), on obtient l'équation énergétique fondamentale

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} - \delta.} \quad (53)$$

La quantité de chaleur  $\frac{dq}{dt}$  reçue par l'unité de masse pendant l'unité de temps est égale à la somme de l'accroissement de son énergie interne pendant l'unité de temps et du travail élastique ou interne effectué par l'unité de masse envisagée pendant le même intervalle de temps.

<sup>1</sup> G. van Lerberghe, *La Conservation de l'Energie dans les Milieux continus* (Revue de l'Ecole Polytechnique de Bruxelles, avril 1933), voir le § III.



Remarquons qu'en remplaçant dans le bilan énergétique (47) fourni par le premier principe le terme  $\frac{dw_s}{dt}$  par sa valeur tirée de (44) on obtient la relation énergétique

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(e_{cin} + \varphi + u) - \left( \frac{dw_p}{dt} + \frac{dw_f}{dt} + \frac{dw_{el}}{dt} \right)}. \quad (54)$$

*Remarque.* Du bilan (53) il résulte immédiatement que

$$\oint dq = \oint p da - \oint \delta dt \quad (53')$$

le long d'un cycle fermé du plan  $(p, \alpha)$ . La quantité de chaleur  $\oint dq$  fournie à l'unité de masse le long d'un cycle fermé du plan  $(p, \alpha)$  se transforme en travail élastique effectué  $\oint p da$  et en travail perdu  $\oint \delta dt$  par frottement. L'aire limitée par le cycle fermé dans le plan  $(p, \alpha)$  est égale à la somme algébrique de l'énergie reçue et de l'énergie perdue par l'unité de masse le long du cycle envisagé, c'est-à-dire égale au travail effectué par l'unité de masse.

### 10. Calcul des quantités de chaleur fournies à l'unité de masse pendant l'unité de temps<sup>1</sup>.

Introduisons d'abord une nouvelle fonction d'état; à savoir, l'*enthalpie* par unité de masse élémentaire définie par

$$\psi \equiv \psi(p, T, \xi, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \equiv u + p\alpha. \quad (55)$$

Alors, l'équation énergétique fondamentale (53) prend la forme

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} - \delta} \quad (56)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_x} \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_y} \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_z} \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} \frac{d\gamma_x}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y} \frac{d\gamma_y}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_z} \frac{d\gamma_z}{dt}. \end{aligned} \quad (57)$$

Remplaçons dans (56),  $\frac{d\psi}{dt}$  et  $\delta$  par leurs valeurs (57) et (46), d'où

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = & \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} - \alpha \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\tau_x^x}{\varrho} \right) \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\tau_y^y}{\varrho} \right) \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \\ & + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_z} + \frac{\tau_z^z}{\varrho} \right) \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} + \frac{\tau_x^y}{\varrho} \right) \frac{d\gamma_x}{dt} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y} + \frac{\tau_x^z}{\varrho} \right) \frac{d\gamma_y}{dt} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_z} + \frac{\tau_y^x}{\varrho} \right) \frac{d\gamma_z}{dt}. \end{aligned} \quad (58)$$

Dès lors, il est naturel d'introduire les *coefficients thermiques*

$$h_{T\xi} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial p} - \alpha, \quad c_{p\xi} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad r_{pT} \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (59)$$

<sup>1</sup> Th. De Donder, *L'Affinité*, loc. cit. voir p. 14.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\tau_x^x}{\rho}, \quad e_y \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\tau_y^y}{\rho}, \quad e_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_z} + \frac{\tau_z^z}{\rho} \\ c_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} + \frac{\tau_z^y}{\rho}, \quad c_y \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y} + \frac{\tau_x^z}{\rho}, \quad c_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_z} + \frac{\tau_y^x}{\rho} \end{array} \right. \quad (60)$$

Par suite, la quantité de chaleur  $\frac{dq}{dt}$  reçue par l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  pendant l'unité de temps est donnée par

$$\frac{dq}{dt} = h_{T\xi} \frac{dp}{dt} + c_{p\xi} \frac{dT}{dt} - r_{pT} \frac{d\xi}{dt} + e_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + e_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + e_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + c_x \frac{d\gamma_x}{dt} + c_y \frac{d\gamma_y}{dt} + c_z \frac{d\gamma_z}{dt}. \quad (61)$$

Il est aisé de trouver la signification des coefficients (59) et (60). A cet effet, il suffit de considérer une transformation où toutes les variables d'état  $p, T, \xi, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  sauf une sont constantes. On remarque ainsi que

$h_{T\xi}$   $\equiv$  chaleur latente de variation de pression par unité de masse,

$c_{p\xi}$   $\equiv$  chaleur spécifique à pression constante,

$r_{pT}$   $\equiv$  chaleur de condensation libérée dans l'unité de masse lorsqu'une môle de vapeur d'eau se condense.

Notons encore que les coefficients thermiques (59) et (60) ne sont pas tous distincts.

En effet, si dans (56) on remplace  $\frac{dq}{dt}$  et  $\delta$  par leurs valeurs (61) et (46) on obtient pour  $\frac{d\psi}{dt}$  une expression différentielle dont les coefficients sont des fonctions linéaires

de  $h_{T\xi}, c_{p\xi}, r_{pT}, e_x, e_y, e_z, c_x, c_y, c_z$ . Or, cette expression doit être une différentielle exacte, l'enthalpie étant une fonction d'état. Il en résulte trente-six relations aux dérivées partielles entre les coefficients (59) et (60). Nous n'en écrivons que trois, à savoir: l'équation de Clausius<sup>1</sup>

$$\frac{\partial c_{p\xi}}{\partial p} = \frac{\partial h_{T\xi}}{\partial T} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (62)$$

et les deux équations de Kirchhoff<sup>1</sup>

$$\frac{\partial r_{pT}}{\partial p} + \frac{\partial h_{T\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial r_{pT}}{\partial T} + \frac{\partial c_{p\xi}}{\partial \xi} = 0 \quad (63)$$

qui montrent comment  $h_{T\xi}, c_{p\xi}$  et  $r_{pT}$  varient avec  $p, T, \xi$ .

## 11. Le second principe de la thermodynamique<sup>2</sup>.

Le second principe s'écrit

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left( \frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right)} \quad (64)$$

où  $\frac{dq'}{dt}$  est l'accroissement pendant l'unité de temps et pour l'unité de masse  $\delta M$ , de la chaleur non compensée de Clausius. On sait que

$$\frac{dq'}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dq'}{dt} > 0 \quad (65)$$

suivant que la transformation subie par l'unité de masse  $\delta M$  est réversible ou irréversible.

<sup>1</sup> Th. De Donder, *L'Affinité*, loc. cit., voir formules (39).

<sup>2</sup> *Ibidem*, voir le § 2.

## 12. Calcul des quantités de chaleur non compensée<sup>1</sup>.

Il est utile d'introduire ici encore une nouvelle fonction d'état: *le potentiel thermodynamique* de l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  défini par

$$h \equiv h(p, T, \xi, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \equiv u - Ts + p\alpha. \quad (66)$$

L'équation énergétique (53) prend alors la forme

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{dT}{dt}s - \alpha \frac{dp}{dt} - \delta} \quad (67)$$

Remplaçons maintenant dans (64)  $\frac{dq}{dt}$  par sa valeur (67); d'où

$$\frac{dq'}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \frac{dq}{dt} = -\frac{dh}{dt} - s \frac{dT}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} + \delta. \quad (68)$$

Ensuite, substituons dans (68) à  $\frac{dh}{dt}$  sa valeur tirée de (66) et à  $\delta$  son expression (46); d'où

$$\begin{aligned} \frac{dq'}{dt} = & \left( -\frac{\partial h}{\partial p} + \alpha \right) \frac{dp}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial T} - s \right) \frac{dT}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_x} - \frac{\tau_x^x}{\rho} \right) \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \\ & + \left( -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_y} - \frac{\tau_y^y}{\rho} \right) \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_z} - \frac{\tau_z^z}{\rho} \right) \frac{d\varepsilon_z}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial \gamma_x} - \frac{\tau_x^y}{\rho} \right) \frac{d\gamma_x}{dt} + \\ & + \left( -\frac{\partial h}{\partial \gamma_y} - \frac{\tau_y^x}{\rho} \right) \frac{d\gamma_y}{dt} + \left( -\frac{\partial h}{\partial \gamma_z} - \frac{\tau_z^x}{\rho} \right) \frac{d\gamma_z}{dt}. \end{aligned} \quad (69)$$

Par analogie avec (59) et (60) introduisons maintenant *les coefficients thermiques*

$$h'_{T\xi} \equiv -\frac{\partial h}{\partial p} + \alpha, \quad c'_{p\xi} \equiv -\frac{\partial h}{\partial T} - s, \quad r'_{pT} \equiv \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (70)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e'_x &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_x} - \frac{\tau_x^x}{\rho}, & e'_y &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_y} - \frac{\tau_y^y}{\rho}, & e'_z &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_z} - \frac{\tau_z^z}{\rho} \\ c'_x &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \gamma_x} - \frac{\tau_x^y}{\rho}, & c'_y &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \gamma_y} - \frac{\tau_y^x}{\rho}, & c'_z &\equiv -\frac{\partial h}{\partial \gamma_z} - \frac{\tau_z^x}{\rho} \end{aligned} \right. \quad (71)$$

*de la chaleur non compensée.*

Par conséquent, l'accroissement  $\frac{dq'}{dt}$  de la quantité de chaleur non compensée par unité de masse et pendant l'unité de temps, est donné par<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dq'}{dt} = & h'_{T\xi} \frac{dp}{dt} + c'_{p\xi} \frac{dT}{dt} - r'_{pT} \frac{d\xi}{dt} + e'_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + e'_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + e'_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + c'_x \frac{d\gamma_x}{dt} + \\ & + c'_y \frac{d\gamma_y}{dt} + c'_z \frac{d\gamma_z}{dt}. \end{aligned} \quad (72)$$

<sup>1</sup> *Ibidem*, voir form. (59).

<sup>2</sup> Mlle Y. Dupont, *Thermodynamique invariante des systèmes élastiques* (Bull. Ac. Roy. de Belg., Cl. des Sc., novembre 1933), voir formules (46).

Enfin, remarquons que les coefficients thermiques de la chaleur non-compensée ne sont pas distincts. En effet, si dans (64) on remplace  $\frac{dq}{dt}$  et  $\frac{dq'}{dt}$  par leurs valeurs (61) et (72) on obtient pour  $\frac{ds}{dt}$  une forme différentielle dont les coefficients sont des fonctions linéaires de  $h_{T\xi}$ ,  $c_{p\xi}$ ,  $r_{pT}$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$ ,  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ,  $h'_{T\xi}$ ,  $c'_{p\xi}$ ,  $r'_{pT}$ ,  $e'_x$ ,  $e'_y$ ,  $e'_z$ ,  $c'_x$ ,  $c'_y$ ,  $c'_z$ . Or, cette forme doit être une différentielle exacte, l'entropie étant une fonction d'état. Il en résulte, compte tenu des relations (62) et (63) et de leurs analogues en  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ , trente-six relations aux dérivées partielles entre les coefficients (70) et (71). Retenons simplement trois d'entre elles; à savoir *les équations de Lord Kelvin*<sup>1</sup>

$$\begin{cases} h_{T\xi} + T \frac{\partial \alpha}{\partial T} + T \frac{\partial c'_{p\xi}}{\partial p} - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{h'_{T\xi}}{T} \right) = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \frac{\partial h'_{T\xi}}{\partial \xi} - \frac{\partial r'_{pT}}{\partial p} = 0 \\ r_{pT} - T \frac{\partial c'_{p\xi}}{\partial \xi} - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{r'_{pT}}{T} \right) = 0. \end{cases} \quad (73)$$

### 13. Hypothèses fondamentales.

La quantité de chaleur  $\frac{dq}{dt}$  reçue par l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  est égale à la quantité de chaleur  $\frac{dq_1}{dt}$  fournie par le milieu ambiant<sup>2</sup> augmentée de la quantité de chaleur  $\frac{d\bar{q}}{dt}$  provenant de l'action de viscosité exercée par le milieu extérieur sur l'unité de masse envisagée. On a donc

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{d\bar{q}}{dt}. \quad (74)$$

Introduisons maintenant une première *hypothèse fondamentale*; à savoir que

$$\frac{d\bar{q}}{dt} \equiv -\delta \quad (75)$$

ou

$$\boxed{-\frac{d\bar{q}}{dt} \equiv \delta > 0} \quad (75')$$

*Nous admettons donc que dans l'atmosphère le travail élastique de viscosité  $\delta$  subi par l'unité de masse se transforme intégralement en chaleur dégagée  $\left(-\frac{d\bar{q}}{dt}\right)$  par l'unité de masse considérée.*

On déduit de cette hypothèse et de l'équation énergétique fondamentale (53) le bilan

$$\boxed{\frac{dq_1}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}} \quad (76)$$

où  $\frac{dq_1}{dt}$  est défini par la forme différentielle

$$\frac{dq_1}{dt} = h_{T\xi} \frac{dp}{dt} + c_{p\xi} \frac{dT}{dt} - r_{pT} \frac{d\xi}{dt} \quad (77)$$

<sup>1</sup> Th. De Donder, *L'Affinité*, loc. cit., voir eq. (76).

<sup>2</sup> Presqu'exclusivement de la chaleur rayonnée.

dont les coefficients donnés par (59) vérifient les équations de Clausius-Kirchhoff (62) et (63).

Enfin de l'hypothèse (75) ou (75') et de la forme (46) de la fonction de dissipation il résulte que

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = e_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + e_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + e_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + c_x \frac{d\gamma_x}{dt} + c_y \frac{d\gamma_y}{dt} + c_z \frac{d\gamma_z}{dt} \quad (78)$$

avec

$$e_x \equiv \frac{\tau_x^x}{\rho}, \quad e_y \equiv \frac{\tau_y^y}{\rho}, \quad e_z \equiv \frac{\tau_z^z}{\rho}, \quad c_x \equiv \frac{\tau_z^y}{\rho}, \quad c_y \equiv \frac{\tau_x^z}{\rho}, \quad c_z \equiv \frac{\tau_y^x}{\rho}. \quad (79)$$

Par conséquent, (60),

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_x} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_y} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_z} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_z} \equiv 0. \quad (80)$$

Il en résulte que dans l'atmosphère l'énergie interne  $u$  et l'enthalpie  $\psi$  par unité de masse ne dépendent que des trois variables d'état  $p$ ,  $T$ ,  $\xi$ ; on a donc

$$\begin{cases} u \equiv u(p, T, \xi) \\ \psi \equiv \psi(p, T, \xi). \end{cases} \quad (81)$$

Cela étant, par analogie avec (74) posons

$$\frac{dq'}{dt} \equiv \frac{dq'_1}{dt} + \frac{d\bar{q}'}{dt} \geq 0 \quad (82)$$

et admettons une *seconde hypothèse fondamentale*; à savoir que<sup>1</sup>

$$\frac{d\bar{q}'}{dt} \equiv \delta > 0. \quad (83)$$

Il en résulte que, (65),

$$\frac{dq'_1}{dt} \geq 0 \quad (84)$$

et, (75),

$$-\frac{d\bar{q}}{dt} \equiv \frac{d\bar{q}'}{dt} = \delta > 0. \quad (85)$$

Nous admettons donc que *dans l'atmosphère la chaleur dégagée provenant du travail élastique ou interne de viscosité subi par l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  est de la chaleur non compensée de Clausius.*

Ensuite de l'hypothèse (83) et de (46) on déduit que

$$\frac{d\bar{q}'}{dt} = e'_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + e'_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + e'_z \frac{d\varepsilon_z}{dt} + c'_x \frac{d\gamma_x}{dt} + c'_y \frac{d\gamma_y}{dt} + c'_z \frac{d\gamma_z}{dt}, \quad (86)$$

avec

$$e'_x \equiv -\frac{\tau_x^x}{\rho}, \quad e'_y \equiv -\frac{\tau_y^y}{\rho}, \quad e'_z \equiv -\frac{\tau_z^z}{\rho}, \quad c'_x \equiv -\frac{\tau_z^y}{\rho}, \quad c'_y \equiv -\frac{\tau_x^z}{\rho}, \quad c'_z \equiv -\frac{\tau_y^x}{\rho} \quad (87)$$

et par suite, (79),

$$e_x + e'_x = 0, \quad e_y + e'_y = 0, \quad e_z + e'_z = 0, \quad c_x + c'_x = 0, \quad c_y + c'_y = 0, \quad c_z + c'_z = 0. \quad (88)$$

<sup>1</sup> Mlle Y. Dupont, loc. cit., form. (55).

Enfin, grâce à (87) et (71), on a

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_z} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \gamma_x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \gamma_y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \gamma_z} = 0. \quad (89)$$

Il en résulte que dans l'atmosphère l'entropie  $s$  et le potentiel thermodynamique  $h$  par unité de masse ne dépendent que des trois variables d'état  $p, T, \xi$ ; on a donc

$$s = s(p, T, \xi) \quad \text{et} \quad h = h(p, T, \xi). \quad (90)$$

Remarquons encore que, grâce à la relation (85), on a

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left( \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq'_1}{dt} \right)} \quad (91)$$

où  $\frac{dq'_1}{dt}$  est défini par l'expression différentielle

$$\frac{dq'_1}{dt} = h'_{T\xi} \frac{dp}{dt} + c'_{p\xi} \frac{dT}{dt} - r'_{pT} \frac{d\xi}{dt} \geq 0 \quad (92)$$

dont les coefficients définis en (70) satisfont aux équations (73) de Lord Kelvin. Le signe égal correspond aux transformations réversibles. Il n'est pas sans intérêt de rappeler ici que dans l'atmosphère les transformations quasi-adiabatiques (feuchtadiabatisch) sont réversibles lorsqu'il n'y a pas de précipitations.

#### 14. Bilan énergétique de M. V. Bjerknes<sup>1</sup>.

Retournons à la relation énergétique (51) et remplaçons  $y \left( p \frac{da}{dt} \right)$  par sa valeur tirée de (76); d'où le bilan énergétique

$$\boxed{\frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt} (e_{cin} + \varphi + u) + \delta - \frac{dw_s^p}{dt} - \frac{dw_s^{visc}}{dt}} \quad (93)$$

compte tenu des définitions (48).

#### 15. Bilan énergétique de M. A. Refsdal<sup>2</sup>.

De la définition (55) il résulte que

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{dp_a}{dt}. \quad (94)$$

Ensuite, on peut mettre la première formule (48) sous la forme

$$- \rho \frac{dw_s^p}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z + p \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (95)$$

ou encore, compte tenu de (7) et (8),

<sup>1</sup> *Hydrodynamique physique*, loc. cit., voir form. (10) de la p. 188.

<sup>2</sup> A. Refsdal, *Zur Thermodynamik der Atmosphäre* (Geofysiske Publikasjoner Vol. IX, No. 12), voir formule (8).

$$-\frac{dw_s^p}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + p \frac{d^1}{dt} = \alpha \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + p \frac{d\alpha}{dt}. \quad (96)$$

D'où finalement la forme remarquable

$$\boxed{\frac{dw_s^p}{dt} = \alpha \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{dp\alpha}{dt}}. \quad (97)$$

Enfin, remplaçons dans (93)  $\frac{du}{dt}$  et  $\frac{dw_s^p}{dt}$  par leurs valeurs (94) et (97); d'où

$$\boxed{\frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt}(e_{cin} + \varphi + \psi) - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \delta - \frac{dw_s^{visc}}{dt}} \quad (98)$$

où  $\left(-\alpha \frac{\partial p}{\partial t}\right)$  représente l'accroissement de l'énergie du champ de la pression par unité de masse et pendant l'unité de temps.

*Remarques.* 1°) Supposons que l'unité de masse élémentaire  $\delta M$  d'air humide envisagé décrive un cycle fermé dans le plan  $(p, \alpha)$ ; alors de (97) on déduit immédiatement que

$$-\oint dw_s^p = -\oint \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dt, \quad (99)$$

c'est-à-dire que le travail de surface  $-\oint dw_s^p$  effectué par l'unité de masse sur le milieu ambiant est égal à  $-\oint \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dt$  et dépend par conséquent essentiellement des variations locales de pression.

2°) Semblablement, de (98) il résulte que

$$\oint (dq_1 - d\varphi) = \oint d e_{cin} - \oint \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad (100)$$

en admettant qu'il n'y ait pas de viscosité. Dans ce cas, la relation (100) montre que la quantité d'énergie  $\oint (dq_1 - d\varphi)$  fournie à l'unité de masse le long d'un cycle fermé du plan  $(p, \alpha)$  se transforme en énergie cinétique et en énergie du champ de la pression. Rappelons que dans l'atmosphère cette dernière quantité d'énergie est très petite.

### 16. Transformations quasi-adiabatiques.

Posons

$$c_{p\xi} \equiv m'_1 c'_1 + m''_1 c''_1 + m''_2 c''_2 \quad (101)$$

où  $c'_1, c''_1, c''_2$  sont les chaleurs spécifiques par unité de masse des constituants de l'élément de masse  $\delta M$  d'air humide considéré. On a donc, (77),

$$\frac{dq_1}{dt} = (m'_1 c'_1 + m''_1 c''_1 + m''_2 c''_2) \frac{dT}{dt} + h_{T\xi} \frac{dp}{dt} - r_{pT} \frac{d\xi}{dt}. \quad (102)$$

Dans l'atmosphère on peut considérer  $c'_1$  comme une constante (très voisine de l'unité) et  $c''_1$  et  $c''_2$  comme étant des fonctions de  $T$  seulement. Posons semblablement

$$v \equiv m'_1 v'_1 + m''_1 v''_1 + m''_2 v''_2 \quad (103)$$

où  $v'_1$ ,  $v''_1$ ,  $v''_2$  représentent les volumes spécifiques de l'eau liquide, de la vapeur d'eau et de l'air sec, et

$$v'' \equiv m''_1 v'_1 + m''_2 v''_2 \quad (104)$$

où  $v''$  est, par unité de masse élémentaire  $\delta M$ , le volume de la phase gazeuse. Par hypothèse, celle-ci est un mélange de deux gaz parfaits, on a donc

$$p v'' = (m''_1 R_1 + m''_2 R_2) T \quad (105)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les constantes bien connues par unité de masse.

Cela étant, admettons que dans l'atmosphère l'enthalpie  $\psi$  est définie par

$$\psi \equiv \psi_0 + \int_{T_0}^T (m'_1 c'_1 + m''_1 c''_1 + m''_2 c''_2) dT. \quad (106)$$

Alors des formules (59) il résulte que

$$\begin{cases} h_{T_0} + v = 0 \\ r_{pT} = \mathfrak{M} \int_{T_0}^T (c'_1 - c''_1) dT. \end{cases} \quad (107)$$

L'équation (62) de Clausius est identiquement satisfaite et les équations (63) de Kirchhoff se réduisent à

$$\frac{\partial r_{pT}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial r_{pT}}{\partial T} = \mathfrak{M}(c'_1 - c''_1). \quad (108)$$

D'où, (102), (107), (108) et (17),

$$\frac{dq_1}{dt} = \left( m'_1 c'_1 + m''_1 \left( c'_1 - \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{dr_{pT}}{dT} \right) + m''_2 c''_2 \right) \frac{dT}{dt} - v \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{M}} r_{pT} \frac{dm''_1}{dt} \quad (109)$$

ou encore

$$\frac{dq_1}{dt} = (m_1 c'_1 + m''_2 c''_2) \frac{dT}{dt} - v \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{d}{dt} (m''_1 r_{pT}) \quad (110)$$

avec

$$m_1 \equiv m'_1 + m''_1. \quad (111)$$

En annulant le second membre de la formule (110) on obtient l'équation différentielle

$$(m_1 c'_1 + m''_2 c''_2) \frac{dT}{dt} - v \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{d}{dt} (m''_1 r_{pT}) = 0 \quad (112)$$

des transformations quasi-adiabatiques<sup>1</sup> (feuchtadiabatisch) utilisées en Météorologie.

<sup>1</sup> J. E. Fjeldstad, *Graphische Methoden zur Ermittlung adiabaticher Zustandsänderungen feuchter Luft* (Geofysiske Publikationer, Vol. III, No. 13), voir p. 13, form. (15).

Oslo, le 1 juin 1934.