

# INTERNE WELLEN

VON *JONAS EKMAN FJELDSTAD* (Det geofysiske Institut, Bergen).

(Eingeliefert am 20. Mai 1933).

Die Ozeanographen sind schon lange auf das Vorkommen von internen Wellen im Meere aufmerksam gewesen. So hat z. B. Nansen das sogenannte Totwasser als eine Wellenerscheinung an einer Grenzfläche zwischen leichtem Brachwasser und schwerem Salzwasser erklärt, und V. Walfrid Ekman (1) hat dann die Sache theoretisch und experimentell untersucht und Nansens Annahme bestätigt. Diese internen Wellen sind jedoch vom Standpunkte des Ozeanographen von geringerem Interesse, als mögliche interne Wellen von langer Periode in dem offenen Meere. Helland-Hansen und Nansen (3) haben wohl als die Ersten große Schwankungen in der Lage der Isohalinen und Isothermen nachgewiesen, welche Gezeitenperioden zu folgen scheinen, und das Phänomen als interne Wellenbewegung gedeutet.

Die Meteor-Expedition und die späteren Expeditionen mit »Armauer Hansen« haben durch längere Serien von Strommessungen in dem offenen Meere deutliche und beträchtliche interne Wellen gefunden. Otto Petterson hat früher interne Wellen im Kattegatt und im Gullmarfjord nachgewiesen. Die meisten dieser Wellen haben Gezeitenperioden.

Eine theoretische Behandlung dieser Wellen ist von mehreren Seiten vorgenommen worden. Zu nennen sind die wichtigen Beiträge von N. Zeilon (5, 6). Er hat das Entstehen der internen Wellen theoretisch und experimentell untersucht, und findet, daß sie von Unebenheiten des Bodens verursacht werden. Durch die direkte Einwirkung des Mondes auf das Meerwasser können keine internen Wellen entstehen, und sie müssen demnach immer eine sekundäre Erscheinung sein.

Es sind speziell die Wellen, die an einer Unstetigkeitsfläche auftreten können, Stokessche Wellen, die bisher von den Ozeanographen betrachtet worden sind, während die internen Wellen in dem Falle, daß die Dichte stetig mit der Tiefe wächst, wenig Beachtung gefunden haben, wahrscheinlich wegen der größeren mathematischen Schwierigkeiten, die dann auftreten. Zeilon hat den speziellen Fall untersucht, daß die Dichte sich in einer Schicht sehr schnell ändert, so daß man es eine Quasidiskontinuität nennen kann, und er entwickelt eine Methode um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen zu finden. Wir werden hier den allgemeinen Fall betrachten, daß die Dichteverteilung mit der Tiefe beliebig gegeben ist.

## 1. Wellen ohne Erdrotation.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Bewegung zweidimensional ist, und legen die  $X$ -Achse in die Fortpflanzungsrichtung der Wellen. Die  $Z$ -Achse legen wir vertikal mit positiver Richtung nach oben.  $z=0$  soll dabei dem Boden und  $z=h$  der ungestörten Oberfläche entsprechen. Die Tiefe wird konstant vorausgesetzt. Es seien jetzt  $u$  und  $w$

die Geschwindigkeitskomponenten des Wassers in der Richtung der  $X$ -Achse, bezw.  $Z$ -Achse,  $\rho_0$  die Dichte,  $p$  der Druck und  $\zeta$  die vertikale Verschiebung eines bestimmten Wasserpartikels. Die Bewegungsgleichungen sind nun

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Wir setzen voraus, daß das Wasser unzusammendrückbar ist, und die Kontinuitätsgleichung wird dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

während die Bedingung dafür, daß die Dichte ungeändert bleibt,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

ist.

Im Gleichgewichtszustand hat man  $\frac{du}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0$ , und demnach

$$dp = -g \rho dz$$

$$p = p_0 + g \int_z^h \rho dz.$$

Wir setzen jetzt

$$\rho = \rho_0(z) + \rho_1(x, z, t),$$

wo  $\rho_0$  die Dichte im ungestörten Zustand ist. Weiter setzen wir

$$p = p_0 + g \int_z^h \rho_0 dz + p_1.$$

Es sind dann  $u, w, \rho_1$  und  $p_1$  kleine Größen, deren Produkte und Quadrate vernachlässigt werden können. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g \rho_0}{\rho_0 + \rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z},$$

und die Bewegungsgleichungen werden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + g \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w = 0.$$

Im Falle einer harmonischen Schwingung mit Periode  $\frac{2\pi}{\sigma}$  und Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\frac{\sigma}{k}$  setzen wir  $u, w \dots$  proportional mit

$$e^{i(\sigma t - kx)}$$

und erhalten dann

$$i\sigma u - ik \frac{p_1}{\varrho_0} = 0, \quad i\sigma w + g \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0,$$

$$-iku + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad i\sigma \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} w = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir weiter

$$u = \frac{1}{ik} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = -\frac{1}{i\sigma} \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} w, \quad \frac{p_1}{\varrho_0} = \frac{\sigma}{ik} \frac{dw}{dz}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die zweite der Gleichungen ein, so erhalten wir für  $w$  folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \varrho_0 \frac{dw}{dz} \right) - \frac{k^2}{\sigma^2} \left( g \frac{d\varrho_0}{dz} + \sigma^2 \varrho_0 \right) w = 0.$$

Es wird bequem sein, eine besondere Bezeichnung für  $\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z}$  zu haben, und wir setzen darum

$$\varphi = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dz}.$$

Am Boden,  $z=0$  gilt nun die Bedingung  $w=0$ . Die Gleichung der gestörten Oberfläche wird

$$z = h + \zeta(h),$$

und an dieser Oberfläche ist jetzt die Druckbedingung  $p = p_0$  oder

$$g \int_{h+\zeta}^h \varrho_0 dz + \frac{\sigma}{ik^2} \left( \varrho_0 \frac{dw}{dz} \right)_{h+\zeta} = 0.$$

Da  $\zeta$  klein gegen  $h$  vorausgesetzt wird, erhalten wir annähernd

$$-g\varrho_0\zeta + \frac{\sigma}{ik^2} \left( \varrho_0 \frac{dw}{dz} \right)_h = 0.$$

Es ist aber  $\frac{d\zeta}{dt} = w$ , und die Oberflächenbedingung wird demnach endgültig

$$\frac{dw}{dz} - \frac{k^2}{\sigma^2} g w = 0.$$

Ehe wir weiter gehen, werden wir noch die Bedingungen aufstellen, die an eventuellen Diskontinuitätsflächen befriedigt werden müssen. Die eine Bedingung ist Stetigkeit der Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenzfläche, und die andere ergibt sich durch die Forderung, daß der Druck stetig variieren muß.

Wenn die Wellenlänge groß ist im Verhältnis zur vertikalen Verschiebung  $\zeta$ , so kann man anstatt der Normalkomponente einfach die Vertikalkomponente setzen.

Es sei jetzt eine Diskontinuitätsfläche durch deren ungestörte Lage  $z = h_1$  gegeben. Für  $z < h_1$  sei  $\varrho = \varrho_1(z)$ , während für  $z > h_1$ ,  $\varrho = \varrho_2(z)$  sei. Entsprechend unterscheiden wir die anderen Größen durch die Indizes 1 und 2. Die erste Bedingung wird dann

$$w_1(z) = w_2(z)$$

für  $z = h_1$ , während die Druckbedingung

$$p_1 = p_2$$

ist. Es ist nun

$$p_2 = p_1 + g \int_z^h \varrho_2 dz + p'_2$$

$$p_1 = p_0 + g \int_{h_1}^h \varrho_2 dz + \int_z^{h_1} \varrho_1 dz + p'_1,$$

und die Druckbedingung wird für  $z = h_1 + \zeta$ :

$$g \int_{h_1+\zeta}^h \varrho_2 dz + p'_2 = g \int_{h_1}^h \varrho_2 dz + \int_{h_1+\zeta}^{h_1} \varrho_1 dz + p'_1$$

oder indem  $\zeta$  gegen  $h_1$  als klein angenommen wird:

$$g \varrho_2 \zeta + p'_2 = g \varrho_1 \zeta + p'_1.$$

Mit

$$p'_2 = \frac{\sigma}{ik} \varrho_2 \frac{dw_2}{dz}, \quad p'_1 = \frac{\varrho}{ik} \varrho_1 \frac{dw_1}{dz}$$

erhält man

$$g \varrho_2 \zeta + \frac{\sigma}{ik} \varrho_2 \frac{dw_2}{dz} = g \varrho_1 \zeta + \frac{\sigma}{ik^2} \varrho_1 \frac{dw_1}{dz}$$

oder

$$\varrho_2 \left( \frac{dw_2}{dz} - \frac{k^2 g}{\sigma^2} w_2 \right) = \varrho_1 \left( \frac{dw_1}{dz} - \frac{k g^2}{\sigma^2} w_1 \right).$$

Diese Bedingung muß demnach für  $z = h_1$  erfüllt sein.

Wenn keine Diskontinuität vorhanden ist, erhält man einfach

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dz} = \frac{dw_2}{dz}.$$

Diese Bedingungen gelten, wenn die Dichte stetig, aber  $\frac{d\varrho_0}{dz}$  unstetig ist.

Wenn die Dichte konstant ist, also  $\frac{d\varrho_0}{dz} = 0$ , erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - k^2 w = 0,$$

deren Integral

$$w = A \sinh kz$$

ist. Die Oberflächenbedingung wird dann

$$\operatorname{tgh} kh = \frac{\sigma^2}{gk}.$$

Für lange Wellen hat man  $kh$  klein anzunehmen und es ist dann angenähert  $\operatorname{tgh} kh = kh$  und demnach

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}.$$

Dies ist die bekannte Lagrangesche Formel.

Nehmen wir dann

$$\varphi = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dz} = \text{konst}$$

erhalten wir

$$w = e^{-\frac{\varphi z}{2}} \sin \gamma z$$

wo

$$\gamma^2 = \frac{k^2}{\sigma^2} (g\varphi - \sigma^2) - \frac{\varphi^2}{4}$$

ist. Wenn  $\varphi > \frac{\sigma^2}{g}$  ist, gibt die Oberflächenbedingung

$$\gamma \cos \gamma h + \frac{\varphi}{2} \sin \gamma h = \frac{k^2 g}{\sigma^2} \sin \gamma h$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma h = \frac{\gamma}{\frac{g k^2}{\sigma^2} - \frac{\varphi}{2}}$$

Es ist aber

$$k^2 = \left( \gamma^2 + \frac{\varphi^2}{4} \right) \frac{\sigma^2}{g\varphi - \sigma^2},$$

und die Formel wird dann

$$\operatorname{tg} \gamma h = \frac{\gamma (g\varphi - \sigma^2)}{g \left( \gamma^2 - \frac{\varphi^2}{4} \right) + \frac{\sigma^2 \varphi^2}{4}}$$

Gewöhnlich kann man  $\sigma^2$  wegwerfen. Die Gleichung hat unendlich viele Wurzeln. Die kleinste wird wie früher angenähert

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}.$$

Die zweite Wurzel wird angenähert

$$\gamma h = \pi$$

oder

$$k = \frac{\sigma \pi}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi h}}.$$

Die höheren Wurzeln werden angenähert

$$k_n = \frac{n \sigma \pi}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi h}}.$$

Es sei nun

$$w_n = i \sigma C_n e^{\frac{\varphi z}{2}} \sin \gamma_n z,$$

dann wird

$$\zeta_n = C_n e^{\frac{\varphi z}{2}} \sin \gamma_n z$$

und

$$u_n = \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\varphi h} C_n \left[ \cos \gamma_n z + \frac{\varphi h}{2 \gamma_n h} \sin \gamma_n z \right] e^{\frac{\varphi z}{2}}.$$

In einer gewöhnlichen Gezeitenwelle hat man

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}} C,$$

$$\zeta = C,$$

es ist darum das Verhältnis

$$\frac{\zeta}{u} = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Bei einer internen Welle hat man angenähert

$$\frac{\zeta_{\max}}{u_{\max}} = \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1}{\sqrt{\varphi h}}.$$

Die Vertikalverschiebung ist darum vergrößert im Verhältnis

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi h}}.$$

Es ist aber

$$\varphi h = \ln \frac{\varrho(0) - \varrho(h)}{\varrho(h)} \approx \frac{\Delta \varrho}{\varrho(h)}.$$

Setzt man  $h = 200 \text{ m}$  und  $\varphi h = 0.004$ , was eine verhältnismäßig große Stabilität ist, so findet man

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi h}} = \frac{\sqrt{0.004}}{0.004} \approx 16.$$

Eine maximale Geschwindigkeit von 10 cm würde dann einer Vertikaloszillation von mehr als 7 m entsprechen.

Wir werden jetzt den allgemeinen Fall etwas näher betrachten. Wir setzen

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} = q, \quad \frac{k^2}{\sigma^2} = \lambda^2.$$

Unsere Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{d}{dz} \left( \varrho \frac{dw}{dz} \right) + \lambda^2 g \varrho w = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$w = 0, \quad z = 0,$$

$$\frac{dw}{dz} - \lambda^2 g w = 0, \quad z = h.$$

Die Aufgabe, alle Lösungen dieser Gleichung zu finden, hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe; sie wird damit identisch, wenn

$$q > 0$$

in dem ganzen Intervalle  $0 \leq z \leq h$  ist.

Diese Bedingung wird doch recht selten in den tiefen Weltmeeren erfüllt sein, vielmehr muß man annehmen, daß die Bedingung nur in gewissen Intervallen befriedigt ist. Wir haben soeben den Fall behandelt, daß  $q$  eine Konstante ist, und in diesem Falle ergab sich, daß unendlich viele Lösungen vorhanden waren.

Wir multiplizieren jetzt mit  $w$  und integrieren zwischen 0 und  $h$ . Dann findet man

$$\int_0^h w \frac{d}{dz} \left( \varrho \frac{dw}{dz} \right) dz + \lambda^2 g \int_0^h \varrho w^2 dz = 0.$$

Teilweise Integration ergibt

$$\left( \varrho w \frac{dw}{dz} \right)_h - \int_0^h \varrho \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz = -\lambda^2 g \int_0^h \varrho w^2 dz$$

oder

$$\lambda^2 g \int_0^h \varrho w^2 dz + \left( w \varrho \frac{dw}{dz} \right)_h = \int_0^h \varrho \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Nach der Oberflächenbedingung hat man

$$\frac{dw}{dz} = \lambda^2 g w$$

und somit

$$\lambda^2 g \left[ \varrho w_h^2 + \int_0^h q \varrho w^2 dz \right] = \int_0^h \varrho \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Wir sehen, daß eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit unserer Gleichung

$$(\varrho w^2)_h + \int_0^h q \varrho w^2 dz > 0$$

ist. Eine hinreichende Bedingung ist, wie man sieht,  $q > 0$ . Diese Bedingung ist aber nicht notwendig. Wenn  $q$  nur in einem gewissen Bereiche positiv ist, kann der obenstehende Ausdruck auch positiv werden, wenn nur die Vertikalbewegung  $w$  in diesem Bereiche überwiegend ist.

Wir werden dieses Verhalten durch ein Beispiel illustrieren. Dabei nehmen wir an, daß drei Schichten vorhanden sind: Die Bodenschicht mit der konstanten Dichte  $\varrho_1$  von  $z = 0$  bis  $z = h_1$ , die Mittelschicht mit der nach oben abnehmenden Dichte

$$\varrho = \varrho_1 e^{-2\beta(z-h_1)},$$

und eine Oberschicht von  $z = h_1 + h_2$  bis  $z = h$  mit der konstanten Dichte

$$\varrho_2 = \varrho_1 e^{-2\beta \cdot h_2}.$$

Die Dichte ändert sich demnach stetig, dagegen ist  $\frac{d\varrho}{dz}$  unstetig, und wir haben in der Bodenschicht und der Oberflächenschicht

$$q = -\frac{\sigma^2}{g},$$

während in der Mittelschicht

$$q = 2\beta - \frac{\sigma^2}{g}$$

ist. In der Bodenschicht setzen wir

$$w_1(z) = A_1 \sinh kz.$$

In der Mittelschicht setzen wir

$$w_2 = e^{\beta(z-h_1)} (A_2 \cos \gamma(z-h_1) + B_2 \sin \gamma(z-h_1)).$$

Für  $z = h_1$  soll jetzt

$$w_1 = w_2$$

und

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{dw_2}{dz}$$

sein. Dies ergibt

$$A_2 = A_1 \sinh kh_1,$$

$$B_2 = A_1 \frac{1}{\gamma} (k \cosh kh_1 - \beta \sinh kh_1).$$

Es wird demnach

$$w_2 = A_1 \frac{e^{\beta(z-h_1)}}{\gamma} [\gamma \sinh kh_1 \cos \gamma(z-h_1) + (k \cosh kh_1 - \beta \sinh kh_1) \sin \gamma(z-h_1)].$$

In der Oberschicht setzen wir

$$w_3 = A_3 \cosh k(z-h') + B_3 \sinh k(z-h')$$

mit  $h' = h_1 + h_2$ .

Die Grenzbedingung gibt, wie im vorangehenden Falle, zwei Gleichungen für die Bestimmung von  $A_3$  und  $B_3$ . Wir finden

$$A_3 = \frac{A_1 e^{\beta h_2}}{k \gamma} [k \gamma \sinh k h_1 \cos \gamma h_2 + (k^2 \cosh k h_1 - k \beta \sinh k h_1) \sin \gamma h_2].$$

und

$$B_3 = \frac{A_1 e^{\beta h_2}}{k \gamma} [k \gamma \cosh k h_1 \cos \gamma h_2 + (k \beta \cosh k h_1 - (\beta^2 + \gamma^2) \sinh k h_1) \sin \gamma h_2].$$

Die Grenzbedingung an der Oberfläche

$$\frac{dw}{dz} - \frac{gk^2}{\sigma^2} w = 0$$

wird

$$A_3 \left( \sinh k h_3 - \frac{gk}{\sigma^2} \cosh k h_3 \right) + B_3 \left( \cosh k h_3 - \frac{gk}{\sigma^2} \sinh k h_3 \right) = 0.$$

Setzen wir die Werte von  $A_3$  und  $B_3$  in diese Gleichung ein, erhalten wir, indem wir den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{A_1 e^{\beta h_2}}{\gamma}$$

wegwerfen;

$$\begin{aligned} & \gamma \cos \gamma h_2 \left[ \cosh k(h_1 + h_3) - \frac{gk}{\sigma^2} \sinh k(h_1 + h_3) \right] \\ & + \sin \gamma h_2 \left[ k \left( 1 - \frac{g\beta}{\sigma^2} \right) (\sinh k(h_1 + h_3) - \frac{gk}{\sigma^2} \cosh k(h_1 + h_3)) \right. \\ & \left. + \beta \left( 1 - \frac{g^2 k^2}{\sigma^2} \right) \cosh k(h_3 - h_1) \right] = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma h_2 = \frac{\gamma \left[ \cosh k(h_1 + h_3) - \frac{gk}{\sigma^2} \sinh k(h_1 + h_3) \right]}{k \left( \frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \sinh k(h_1 + h_3) - \frac{gk}{\sigma^2} \cosh k(h_1 + h_3) \right) + \beta \left( \frac{gk^2}{\sigma^2} - 1 \right) \cosh k(h_1 - h_3)}.$$

Diese Gleichung hat, wie man sich überzeugen kann, unendlich viele Wurzeln, die positive Werte von  $k^2$  liefern. Gewöhnlich wird für die ersten Wurzeln  $kh$  eine kleine Größe sein und die Formel ist dann in der vorliegenden Form etwas unbequem. Wir setzen darum zur Abkürzung der Schreibweise

$$\alpha = \frac{\operatorname{tgh} k(h_1 + h_3)}{k(h_1 + h_3)}$$

und

$$\omega = \frac{\sinh k h_1 \sinh k h_3}{k^2 h_1 h_3 \cosh k(h_1 + h_3)}.$$

Für kleine Werte von  $kh$  werden diese Größen sehr wenig von 1 verschieden. Weiter setzen wir

$$\gamma h_2 = x.$$

Wir haben dann angenähert

$$\operatorname{tg} x = \frac{x \left[ \frac{h_1 + h_3}{h_2} \alpha - \frac{2\beta h_2}{x^2} \right]}{\frac{h_1 h_3}{h_2^2} \omega x^2 - \left( 1 + \beta h_2 \alpha \frac{h_1 + h_3}{h_2} \right)}.$$

Die ersten Wurzeln sind dann auch durch die angenäherte Gleichung



$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{h_1 + h_3}{h_2} x}{\frac{h_1 h_3}{h_2^2} x^2 - 1}$$

bestimmt. Hat man diese gelöst und einen angenäherten Wert von  $x$  gefunden, kann man den entsprechenden Wert von  $k$  zur Berechnung der Größen  $a$  und  $\omega$  benutzen, und dann genauere Werte von  $x$  durch die vollständige Formel berechnen.

Die letzte angenäherte Formel findet man, wenn man folgende vereinfachte Gleichungen benutzt:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{k^2}{\sigma^2} 2g\beta w = 0,$$

$$w = 0, \quad z = h.$$

### Numerisches Beispiel.

Wir setzen

$$h_1 = 2800 \text{ m}, \quad h_2 = 400 \text{ m}, \quad h_3 = 400 \text{ m}$$

und demnach

$$h = 3600 \text{ m.}$$

weiter

$$2\beta h_2 = 0.001.$$

Als erste Wurzel finden wir

$$k_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}}.$$

Dies entspricht der normalen Gezeitenwelle, die hier nicht weiter in Betracht kommt. Die erste interne Welle entspricht der Wurzel

$$\gamma_1 h_2 = x_1 = 0,9916.$$

Dies gibt eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$199.8 \text{ cm/sek.}$$

In der homogenen Bodenschicht hat man dann angenähert

$$w = i C k z$$

$$\zeta = C \frac{k}{\sigma} z$$

und

$$u = C.$$

An der oberen Grenze der Bodenschicht  $z = h_1$  haben wir dann

$$\zeta_1 = 10^8 \cdot C.$$

In der Mittelschicht haben wir

$$u = C \left[ \cos \gamma_1 (z - h_1) - \frac{h_1}{h_2} (\gamma h_2) \sin \gamma (z - h_1) \right]$$

$$\zeta = C \frac{k}{\sigma} h_1 \left[ \cos \gamma (z - h_1) + \frac{h_2}{h_1 (\gamma h_2)} \sin \gamma (z - h_1) \right].$$

oder mit Zahlenwerten

$$u = C \left[ \cos \left( 0,9916 \frac{z - h_1}{h_2} \right) - 4,958 \sin \left( 0,9916 \frac{z - h_1}{h_2} \right) \right]$$

$$\zeta = 10^8 C \left[ \cos \left( 0,9916 \frac{z - h_1}{h_2} \right) + \frac{1}{4,958} \sin \left( 0,9916 \frac{z - h_1}{h_2} \right) \right].$$

Es ist somit

$$u = 0 \text{ für } z - h_1 = 80 \text{ m,}$$

und hier hat  $\zeta$  ein Maximum

$$\zeta = 1,02 \cdot 10^8 \cdot C.$$

An der Grenze zwischen Mittelschicht und Oberflächenschicht haben wir

$$u = -3,6 C,$$

$$\zeta = 0,72 \cdot 10^8 C.$$

In der Oberflächenschicht wird

$$u = \text{konst.} = -3,6 C,$$

während  $\zeta$  von dem soeben gegebenen Wert bis 0 abnimmt. Oder etwas genauer: an der Oberfläche findet man für  $\zeta$  einen sehr kleinen negativen Wert. Die Verteilung der Amplituden von  $u$  und  $\zeta$  wird in Abb. 1 graphisch dargestellt.

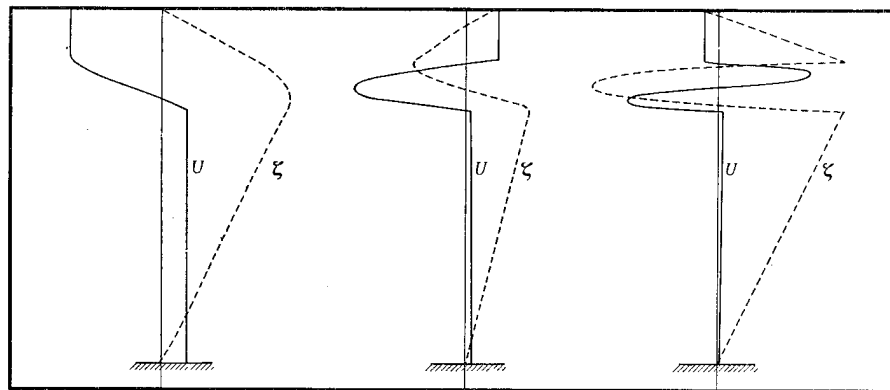


Fig. 1.

Für die zweite Wurzel findet man den Wert

$$\gamma_2 h_2 = 3,4842.$$

Die entsprechende Wellengeschwindigkeit wird

$$\alpha_2 = 56,85 \text{ cm/sek.}$$

und  $k h_1 = 0,493$ .

Setzt man in der Bodenschicht

$$u = C_2 \cosh kz,$$

findet man, daß  $u$  von  $C_2$  bis  $1,124 C_2$  wächst.

In der Mittelschicht findet man

$$u = C_2 [1,124 \cos \gamma_2 (z - h_1) - 18,21 \sin \gamma_2 (z - h_1)],$$

$$\zeta = \frac{h_1}{\alpha_2} C_2 [1,04 \cos \gamma_2 (z - h_1) + 0,064 \sin \gamma_2 (z - h_1)].$$

Dies ergibt

$$u = 0 \text{ für } z = h_1 + 7,1 \text{ m}$$

$$\text{und } u = 0 \text{ für } z = h_1 + 367,7 \text{ m.}$$

Für dieselben Werte von  $z$  hat  $\zeta$  ein Maximum bzw. ein Minimum

$$\zeta = \pm 3,669 \cdot 10^8 C_2.$$

Weiter findet man

$$\zeta = 0 \text{ für } z = h_1 + 187,4 \text{ m.}$$

Hier hat  $u$  ein Minimum  $u = -18,1 C_2$ .

An der Grenze zwischen Mittel- und Oberschicht hat man

$$\zeta = 3,5 \cdot 10^8 C_2,$$

$$u = 4,9 C_2.$$

In der Oberflächenschicht wird  $u$  praktisch genommen konstant, während  $\zeta$  bis 0 abnimmt.

Für die dritte Wurzel findet man den Wert

$$\gamma_3 h_2 = 6,477, \quad \kappa_3 = 30,6 \text{ cm/sek}$$

und  $k_3 h_1 = 0,92$ .

In der Bodenschicht wächst demnach  $u$  von

$$u = C_3 \text{ bis } u = 1,45 C_3.$$

In der Mittelschicht findet man

$$\zeta = C_3 1,15 \frac{h_1}{\kappa_3} \left[ \cos \gamma_3 (z - h_1) + \frac{1}{25,6} \sin \gamma_3 (z - h) \right].$$

$\zeta$  hat einen Maximumswert  $7,6 \cdot 10^8 C_3$  für  $z = h_1 + 2,4$  m und einen Minimumswert  $-7,6 \cdot 10^8 C_3$  für  $z = h_1 + 390$  m.

Für  $u$  findet man ein Minimum bzw. Maximum von  $37 C_3$  für  $z = h_1 + 99,4$  m und  $z = h_1 + 293,4$  m.

In der oberen homogenen Schicht hat man  $u = 5,7 C_3$ .

Für diese internen Wellen findet man demnach, daß sie nur in der Mittelschicht sich bemerkbar machen, und man versteht nun leicht, daß die Geschwindigkeitsverteilung in dieser Schicht eine sehr verwickelte sein kann, wenn mehrere dieser Wellen zugleich auftreten.

## 2. Interne Wellen in einem rotierenden Meere.

Wir nehmen an, daß der Rotationsvektor senkrecht auf der Oberfläche steht, und haben dann folgende Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \omega v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2 \omega u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + g \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Während die Gleichung

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w = 0$$

unverändert bleibt.

Um eine harmonische Schwingung zu untersuchen, setzen wir

$$u, \rho_1, p_1 \sim \cos(\sigma t - kx) e^{\alpha y}$$

$$v, w \sim \sin(\sigma t - kx) e^{\alpha y}.$$

Die Gleichungen werden dann

$$\begin{aligned} -\sigma u - 2\omega v + k \frac{p_1}{\varrho_0} &= 0 \\ \sigma v + 2\omega u + a \frac{p_1}{\varrho_0} &= 0 \\ \sigma w + g \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} &= 0 \\ k u + a v + \frac{dw}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

Auflösung der beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf  $u$  und  $v$  ergibt

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma k + 2\omega a}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{p_1}{\varrho_0} \\ v &= -\frac{2\omega k + \sigma a}{\sigma^2 - 4\omega^2} \frac{p_1}{\varrho_0}. \end{aligned}$$

Wie früher setzen wir  $-\frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dz} = \varphi$  und erhalten dann

$$\frac{dp_1}{dz} = \frac{g\varphi - \sigma^2}{\sigma} \varrho_0 w.$$

Setzen wir die Ausdrücke für  $u$  und  $v$  in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{p_1}{\varrho_0} = -\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma(k^2 - a^2)} \frac{dw}{dz}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen können wir  $p_1$  eliminieren, und erhalten dann

$$\frac{d}{dz} \left( \varrho_0 \frac{dw}{dz} \right) + \frac{k^2 - a^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (g\varphi - \sigma^2) \varrho_0 w = 0.$$

Die Oberflächenbedingung wird

$$\frac{dw}{dz} - \frac{k^2 - a^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} g w = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{k^2 - a^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} = \lambda^2$$

haben wir  $w$  und  $\lambda$  aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen

$$\frac{d}{dz} \left( \varrho_0 \frac{dw}{dz} \right) + \lambda^2 g \left( \varphi - \frac{\sigma^2}{g} \right) \varrho_0 w = 0$$

$$\frac{dw}{dz} - \lambda^2 g w = 0; \quad z = h$$

$$w = 0; \quad z = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der früheren überein, nur hat  $\lambda$  hier eine andere Bedeutung.

Es sei nun  $w(z)$  eine Lösung der Differentialgleichung, wir wollen die übrigen Größen durch  $w$  ausdrücken. Erstens haben wir

$$\frac{p_1}{\varrho_0} = -\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{\sigma(k^2 - a^2)} \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\sigma \lambda^2} \frac{dw}{dz}.$$

Dadurch finden wir weiter

$$u = -\frac{\sigma k + 2\omega\alpha}{\sigma(k^2 - \alpha^2)} \frac{dw}{dz},$$

$$v = \frac{2\omega k + \sigma\alpha}{\sigma(k^2 - \alpha^2)} \frac{dw}{dz}.$$

Wir sehen jetzt, daß wir eine Lösung in Analogie mit der Kelvinschen erhalten können, wenn

$$\alpha = -\frac{2\omega k}{\sigma}$$

gewählt wird. Mit diesem Werte von  $\alpha$  erhalten wir

$$u = -\frac{1}{k} \frac{dw}{dz}, \quad v = 0$$

$$\frac{p_1}{\rho_0} = -\frac{\sigma}{k^2} \frac{dw}{dz}.$$

Die Lösung wird jetzt wie in dem Falle ohne Rotation, nur daß der Faktor  $e^{-\frac{2\omega k y}{\sigma}}$  in allen Ausdrücken vorkommt. Dieser Faktor spielt aber hier eine viel größere Rolle als bei den gewöhnlichen Gezeitenwellen, indem  $k$  für die internen Wellen relativ große Werte annehmen kann.

Ist z. B.  $\frac{k}{\sigma} = \frac{1}{200}$ , wie in dem vorangehenden Beispiele, und  $2\omega = 1,3 \cdot 10^{-4}$ , so sehen wir, daß die Amplitude in der  $y$ -Richtung schon in einem Abstände von etwa 15,3 km auf  $\frac{1}{e}$  ihres Wertes gefallen ist. Interne Wellen von diesem Typus können demnach nur in einem verhältnismäßig schmalen Kanal vorkommen. In dem offenen Meere sind sie ohne Bedeutung.

Sehen wir ganz von der Seitenbegrenzung ab, so können wir  $\alpha = 0$  setzen, und erhalten dann

$$u = -\frac{1}{k} \frac{dw}{dz}, \quad v = \frac{2\omega}{\sigma} \frac{1}{k} \frac{dw}{dz}$$

und

$$\lambda^2 = \frac{k^2}{\sigma^2 - 4\omega^2}.$$

Nennen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wenn keine Rotation vorhanden ist  $c$ , und wenn Rotation vorhanden ist  $s$ , so haben wir

$$c = \frac{c}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad s = \frac{2\omega}{\sigma}.$$

In einem Kanale sind Wellen von noch einem anderen Typus möglich. Es sei  $b$  die Breite des Kanales, und die Seiten des Kanales durch  $y=0$  und  $y=b$  gegeben. Wir können dann

$$\alpha = \pm \frac{m\pi i}{b}$$

setzen, und erhalten dann zwei Lösungen für  $v$

$$v_1 = A \frac{2\omega k + i\sigma \frac{m\pi}{b}}{\sigma \left( k^2 + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right)} \frac{dw}{dz} e^{i \frac{m\pi y}{b}}$$

und

$$v_2 = B \frac{2\omega k - i\sigma \frac{m\pi}{b}}{\sigma \left(k^2 + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)} \frac{dw}{dz} e^{-i\frac{m\pi y}{b}},$$

wir können jetzt die Konstanten  $A$  und  $B$  so bestimmen, daß die Summe  $v_1 + v_2$  für  $y=0$  und für  $y=b$  verschwindet. Die notwendige Bedingung ist

$$A \left(2\omega k + i\sigma \frac{m\pi}{b}\right) + B \left(2\omega k - i\sigma \frac{m\pi}{b}\right) = 0.$$

Wir setzen

$$A = \frac{A_0}{2i} \frac{2\omega k - i\sigma \frac{m\pi}{b}}{2\omega k}$$

$$B = -\frac{A_0}{2i} \frac{2\omega k + i\sigma \frac{m\pi}{b}}{2\omega k}$$

und erhalten dann für  $v$  den Ausdruck

$$v = A_0 \frac{4\omega^2 k^2 + \sigma^2 \frac{m^2\pi^2}{b^2}}{2\omega\sigma k \left(k^2 + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi y}{b} \frac{dw}{dz}.$$

Man findet dann weiter für  $u$  und  $w$

$$u = -A_0 \left[ \frac{1}{k} \sin \frac{m\pi y}{b} \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{k^2 + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \frac{m\pi}{2\omega\sigma b} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] \frac{dw}{dz}$$

$$w = A_0 \left[ \sin \frac{m\pi y}{b} - \frac{\sigma m\pi}{2\omega k b} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] w(z)$$

und, weil  $\frac{d\zeta}{dt} = w$  ist,

$$\zeta = -\frac{A_0}{\sigma} \left[ \sin \frac{m\pi y}{b} - \frac{\sigma m\pi}{2\omega k b} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] w(z).$$

In diesem Falle haben wir

$$\lambda^2 = \frac{k^2 + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}{\sigma^2 - 4\omega^2}.$$

Eine notwendige Bedingung für das Bestehen dieser Wellen wird demnach

$$(\sigma^2 - 4\omega^2)\lambda^2 - \frac{m^2\pi^2}{b^2} > 0$$

und a fortiori

$$\sigma^2 > 4\omega^2.$$

Nun ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ohne Rotation

$$c = \frac{1}{\gamma},$$

die obige Bedingung läßt sich dann in folgender Form schreiben

$$\frac{m\pi}{b} < \frac{\sigma\sqrt{1-s^2}}{c}.$$

In dem soeben berechneten Beispiele hatten wir  $c=200$ .

Setzen wir ferner  $m=1$  und für  $\omega$  den vertikalen Rotationskomponenten auf  $60^\circ$  N. B., so erhalten wir die Bedingung

$$b > 5,1 c \cdot 10^4$$

oder

$$b > 102 \text{ km.}$$

Für die interne Welle dritter Ordnung hatten wir  $c=30$  und die Bedingung wird dann

$$b > 15,3 \text{ km.}$$

Für die Wellen höherer Ordnung hat demnach ein gewöhnlicher Fjord noch eine hinreichende Breite.

### 3. Berechnung der internen Wellen.

Wenn die Aufgabe vorliegt, möglichen internen Wellen nachzuforschen, wird im allgemeinen die Dichte durch Beobachtungen in bestimmten Tiefen gefunden. Die Ozeanographen geben gewöhnlich nicht die Dichte an; sondern eine Größe  $\sigma_t = (\rho - 1) \cdot 1000$ . Umgekehrt hat man

$$\rho = 1 + \sigma_t \cdot 10^{-3}$$

und

$$\log \rho \approx \sigma_t \cdot 10^{-3}.$$

Es ist darum mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 10^{-3} \cdot \frac{d\sigma_t}{dz}.$$

Die erste Aufgabe wird dann  $\frac{d\sigma_t}{dz}$  zu bestimmen. Dies kann in mehreren Weisen geschehen, entweder auf graphischem Wege, durch Differenzen, oder man kann auch versuchen,  $\sigma_t$  durch eine Funktion zu approximieren und dann durch Differentiation dieser Funktion  $\frac{d\sigma_t}{dz}$  zu bestimmen.

Unsere Hauptaufgabe wird dann die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \rho \frac{dw}{dz} \right) + \lambda^2 \left( -g \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \sigma^2 \right) \rho w = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$w=0, \quad z=0$$

$$\frac{dw}{dz} = \lambda^2 g w, \quad z=h.$$

zu integrieren. Es gilt nun, die Aufgabe so viel wie möglich zu vereinfachen. Zunächst können wir ohne Bedenken

$$\frac{d}{dz} \left( \rho \frac{dw}{dz} \right) = \rho \frac{d^2 w}{dz^2}$$

setzen. Auch können wir  $\frac{\sigma^2}{g}$  neben  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$  vernachlässigen, denn bei Gezeitenwellen ist  $\frac{\sigma^2}{g}$  von der Größenordnung  $10^{-11}$ , und mit einer so großen Genauigkeit können wir  $\frac{d\sigma_t}{dz}$  nicht bestimmen. Nehmen wir die Längeneinheit gleich 100 m, setzen also

$$z = 10^4 x,$$

so haben wir angenähert

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot 10^{-7},$$

und wir müßten  $\frac{d\sigma_x}{dx}$  mit mehr als vier Dezimalstellen bestimmen können, was ganz unmöglich ist. Wenn wir an der Bezeichnung

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$$

festhalten, lautet demnach unsere Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda^2 g \varphi w = 0.$$

An der Oberfläche können wir die Grenzbedingung

$$\frac{dw}{dz} = \lambda^2 g w$$

durch die einfachere  $w=0$  ersetzen. Dadurch verlieren wir zwar den ersten Eigenwert  $\lambda_0$ , dieser ist aber schon bekannt, denn es ist

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{gh}}$$

und die entsprechende Welle ist die gewöhnliche Gezeitenwelle, die nicht zu den internen Wellen gehört.

Wenn wir von den Nebenmeeren absehen, ist gewöhnlich die Dichte in großen Tiefen hinreichend konstant, um dort  $\varphi=0$  zu setzen. Zuweilen haben wir auch an der Oberfläche eine Schicht, wo die Mischung so stark ist, daß wir auch dort eine konstante Dichte erhalten. Wir können demnach annehmen, daß drei Schichten vorhanden sind: Das Tiefenwasser von dem Boden  $z=0$  bis  $z=h_1$ . Das Übergangswasser von  $z=h_1$  bis  $z=h_1+h_2$  und das Oberflächenwasser von  $z=h_1+h_2$  bis  $z=h$ .

Defant hat für die zwei oberen Schichten zusammen den Namen Troposphäre und für das Bodenwasser den Namen Stratosphäre vorgeschlagen. Die Stratosphäre wird wohl gewöhnlich in etwa 1000 bis 1500 m Tiefe angetroffen.

In dem Tiefenwasser kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$w = A_0 k z, \quad u = \text{konst.}$$

setzen. Es sei nun  $w_1$  der Wert von  $w$  in der Bodenschicht,  $w_2$  in der Mittelschicht und  $w_3$  in der Oberflächenschicht. Die Bedingungen für  $z=h_1$  werden dann

$$\begin{aligned} A_0 k h_1 &= w_2(h_1) \\ A_0 k &= \left( \frac{dw_2}{dz} \right)_{h_1} \end{aligned}$$

oder

$$h_1 \frac{dw_2}{dz} - w_2 = 0, \quad z = h_1.$$

In der Oberflächenschicht setzen wir

$$\begin{aligned} w_3 &= A_3 k (h - z) \\ \frac{dw_3}{dz} &= -A_3 k. \end{aligned}$$



Für  $z = h_1 + h_2$  gilt demnach die folgende Bedingung

$$h_3 \frac{dw_2}{dz} + w_2 = 0.$$

Unsere Integrationsaufgabe lautet jetzt folgendermaßen: Wir suchen ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} + \lambda^2 g \varphi w = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$h_1 \frac{dw}{dz} - w = 0, \quad z = h_1,$$

$$h_3 \frac{dw}{dz} + w = 0, \quad z = h_1 + h_2.$$

Selbstverständlich können eventuell sowohl  $h_1$  als  $h_3$  gleich 0 sein.

Wenn man für  $\varphi$  eine bestimmte Funktion setzen kann, so ist es ja theoretisch möglich, die Integration auszuführen. In der Praxis wird dies wohl nur in den seltensten Fällen gelingen. Bemerkenswerte Fälle sind  $\varphi = \text{konst.}$  oder  $\varphi = a(z - b)^m$  wo,  $m$  eine beliebige Zahl ist. In dem ersten Falle kommt man direkt zu trigonometrischen Funktionen; in dem zweiten Falle läßt sich das Integral durch Besselsche Funktionen ausdrücken.

#### 4. Numerische Integrationsmethode.

Wenn der Parameter  $\lambda$  bekannt ist, läßt sich die Gleichung leicht numerisch integrieren. Wir können dann die Integrationsmethode von Störmer (7) anwenden. Diese Methode arbeitet mit Hilfe von Differenzen bis zur vierten Ordnung, und gibt dann ein Resultat, das noch in der sechsten Ordnung richtig ist. Da in unserem Falle die Funktion  $\varphi$  nicht mit so großer Genauigkeit bekannt ist, so erscheint jedoch diese Methode übertrieben genau, und wir können darum die Methode etwas vereinfachen.

Die Herleitung wird in diesem Falle sehr einfach und wird in dem Folgenden gegeben.

Zunächst setzen wir voraus, daß die Längeneinheit etwas größer gewählt ist, z. B. 100 m. Wir setzen also

$$z = 10^4 x.$$

Unsere Gleichungen werden dann

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 g 10^8 \varphi w = 0$$

$$h_1 \frac{dw}{dx} - w = 0 \quad x = h_1$$

$$h_3 \frac{dw}{dx} + w = 0 \quad x = h_1 + h_2,$$

wo jetzt  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  in der neuen Einheit gemessen wird.  $10^8 \varphi$  bezeichnen wir wieder durch  $\varphi$ , ohne daß wir eine Verwechslung befürchten müssen. Wir teilen das Integrationsgebiet in gleiche Teile von der Größe  $\Delta x$  und bezeichnen die Abscissen durch  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2 \dots$ . Die entsprechenden Funktionswerte bezeichnen wir durch  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2 \dots$ . Es ist dann

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2 \Delta x, \quad \dots$$

Nun setzen wir voraus, daß in der Nähe des Punktes  $x_n$  eine Taylorentwicklung möglich ist.

$$w_{n+1} = w_n + w'_n(\Delta x) + w''_n \frac{(\Delta x)^2}{2} + w'''_n \frac{(\Delta x)^3}{6} + w_n^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{24} + \dots$$

$$w_{n-1} = w_n - w'_n(\Delta x) + w''_n \frac{(\Delta x)^2}{2} - \dots$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1} = w''_n(\Delta x)^2 + w_n^{IV} \frac{(\Delta x)^4}{12} + \dots$$

Aus der Differentialgleichung kennen wir

$$w''_n = -\lambda^2 g \varphi_n w_n.$$

Wir setzen jetzt

$$w_{n+1} - w_n = \Delta w_n$$

$$\Delta w_{n+1} - \Delta w_n = \Delta^2 w_n,$$

$$\xi_n = w''_n(\Delta x)^2$$

$$\xi_{n+1} - \xi_n = \Delta \xi_n$$

$$\Delta \xi_{n+1} - \Delta \xi_n = \Delta^2 \xi_n.$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet unsere Gleichung

$$\Delta^2 w_{n-1} = \xi_n + \xi''_n \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots$$

Es ist aber

$$\xi_{n-2} = \xi_n - 2\xi'_n(\Delta x) + 2\xi''_n(\Delta x)^2 + \dots$$

$$\xi_{n-1} = \xi_n - \xi'_n(\Delta x) + \xi''_n \frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots$$

und demnach

$$\xi_n - 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2} = \xi''_n(\Delta x)^2 - \xi'''_n(\Delta x)^3 + \dots$$

oder

$$\Delta^2 \xi_{n-2} = \xi''_n(\Delta x)^2 - \xi'''_n(\Delta x)^3 + \dots$$

Dadurch können wir  $\xi''_n$  eliminieren und erhalten

$$\Delta^2 w_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_{n-2}$$

indem die höheren Glieder weggelassen sind. Dies ist nun die gesuchte Integrationsformel. Der Fehler wird von der fünften Ordnung.

Die Formel von Störmer lautet

$$\Delta^2 w_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12} \left[ \Delta^2 \xi_{n-2} + \Delta^3 \xi_{n-3} + \Delta^4 \xi_{n-4} - \frac{1}{20} \Delta^4 \xi_{n-4} \right].$$

Man erhält somit unsere Formel aus der genaueren Störmerschen durch Weglassung von Differenzen dritter und vierter Ordnung.

Da  $u$  durch  $\frac{dw}{dx}$  ausgedrückt ist, müssen wir auch  $\frac{dw}{dx}$  bestimmen. Der Kürze wegen bezeichnen wir  $\frac{dw}{dx}$  durch  $u$ , indem wir daran erinnern, daß die Geschwindigkeit  $u$  nur durch einen von  $z$  unabhängigen Faktor von  $\frac{dw}{dx}$  abweicht.

Es ist nun

$$u_{n+1} = u_n + u'_n(\Delta x) + u''_n \frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots$$

$$u_{n-1} = u_n - u'_n(\Delta x) + u''_n \frac{(\Delta x)^2}{2} - \dots$$

Subtraktion ergibt

$$u_{n+1} - u_{n-1} = 2 \left[ u'_n(\Delta x) + u''_n \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \right].$$

Es ist aber  $u'_n = w'_n$  und demnach

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{2}{\Delta x} \left( \xi_n + \xi''_n \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \right).$$

Entwickeln wir  $\xi_{n+1}$  und  $\xi_{n-1}$  in Reihen, erhalten wir

$$\Delta^2 \xi_{n-1} = \xi''_n (\Delta x)^2 + \frac{1}{12} \xi_n^{IV} (\Delta x)^4 + \dots$$

Durch Elimination von  $\xi''_n$  finden wir die Formel

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{2}{\Delta x} \left( \xi_n + \frac{1}{6} \Delta^2 \xi_{n-1} \right),$$

wo Glieder höherer Ordnung weggelassen sind. Der Fehler wird wieder von der fünften Ordnung. Ersetzen wir  $\Delta^2 \xi_{n-1}$  durch  $\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}$ , erhalten wir

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{1}{3\Delta x} (\xi_{n+1} + 4\xi_n + \xi_{n-1}),$$

so daß die Formel mit der Simpsonschen Regel übereinstimmt.

Um diese Integrationsmethode anwenden zu können, müssen wir die ersten Werte in anderer Weise berechnen. Wir wählen dann für  $w_0$  und  $\frac{dw_0}{dx}$  beliebige Werte, die jedoch der ersten Grenzbedingung genügen.

$$h_1 \frac{dw}{dx} - w = 0$$

$w_1$  und  $\frac{dw_1}{dx}$  berechnen wir dann mit Hilfe der beiden Formeln

$$w_1 = w_0 \left( 1 - \lambda^2 g(\Delta x)^2 \frac{2\varphi_0 + \varphi_1}{6} \right) + w'_0(\Delta x) \left( 1 - \lambda^2 g(\Delta x)^2 \frac{5\varphi_0 + 3\varphi_1}{48} \right)$$

$$u_1 = w'_0 \left( 1 - \lambda^2 g(\Delta x)^2 \frac{\varphi_0 + 2\varphi_1}{6} \right) - \frac{w_0}{2\Delta x} \lambda^2 g(\Delta x)^2 (\varphi_0 + \varphi_1).$$

Man erhält diese Formeln, wenn man  $w_{\frac{1}{2}}$  nach der Taylorschen Reihe bis zum dritten Glied entwickelt, und dann die Integrationsformel mit der halben Intervallbreite benutzt. Mit diesen Formeln können wir die numerischen Integrationen schnell und leicht durchführen.

Wenn es sich zeigen sollte, daß die zweiten Differenzen zu schnell anwachsen, müssen wir die Intervalle halbieren. Es seien  $w_{n-1}$  und  $w_n$  die letzten Werte, wo noch keine Notwendigkeit zur Teilung vorlag. Um zwischen diese ein  $w_{n-\frac{1}{2}}$  zu interpolieren, können wir nach Störmer die folgende Formel anwenden:

$$w_{n-\frac{1}{2}} = w_n - \frac{\Delta w_n + \Delta w_{n-1}}{4} + \frac{\xi_n}{8} + \frac{\Delta \xi_n + \Delta \xi_{n-1}}{32} + \frac{\Delta^2 \xi_{n-1}}{384}.$$

Die höheren Differenzen, die in der Störmerschen Formel vorkommen, sind weggelassen. Weiter haben wir

$$\xi_{n-\frac{1}{2}} = w''_{n-\frac{1}{2}} \frac{(\Delta x)^2}{4}.$$

Wir können dann mit der numerischen Integration fortfahren. Die neuen zweiten Differenzen sind ungefähr  $\frac{1}{16}$  der alten.

Umgekehrt, wenn die zweiten Differenzen zu klein ausfallen, können wir das Intervall verdoppeln. Wir nehmen dann jeden zweiten Wert von  $w$  und multiplizieren die entsprechenden  $\xi$  mit 4.

Wenn der Wert von  $\lambda$ , den wir benutzt haben, fehlerhaft sein sollte, zeigt sich dies dadurch, daß wir für  $z=h$  nicht den richtigen Wert  $w=0$  erhalten. Wir müssen dann mit einem neuen Werte die Integration versuchen. Haben wir schon den richtigen Endwert passiert, bedeutet dies, daß der Parameter zu groß gewählt ist, und wir müssen dann einen kleineren Wert versuchen. Es empfiehlt sich dann, die Abänderung nicht allzu klein zu machen, denn es wäre ja ein Zufall, wenn man den richtigen Wert treffen sollte.

Die zweite Integration wird dann im allgemeinen auch nicht den richtigen Endwert liefern. Wenn die Parameterwerte nicht allzu viel von dem richtigen Werte abweichen, können wir durch Interpolation die Werte von  $w$  und  $\lambda$  finden. Wir setzen dann

$$w = \frac{w_2(h) w_1(x) - w_1(h) w_2(x)}{w_2(h) - w_1(h)}.$$

Diese Funktion genügt nicht der Differentialgleichung, aber die Abweichung ist nur gering. Setzen wir der Kürze wegen,

$$w = A w_1 + B w_2,$$

haben wir

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\lambda_1^2 g A \varphi w_1 - \lambda_2^2 g B \varphi w_2$$

und

$$\int_0^h w \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -\lambda_1^2 g A \int_0^h \varphi w w_1 dx - \lambda_2^2 g B \int_0^h \varphi w w_2 dx$$

oder

$$\int_0^h \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \lambda_1^2 g A \int_0^h \varphi w w_1 dx + \lambda_2^2 g B \int_0^h \varphi w w_2 dx.$$

Setzen wir jetzt

$$\lambda_1^2 g A \int_0^h \varphi w w_1 dx + \lambda_2^2 g B \int_0^h \varphi w w_2 dx = \lambda^2 g \int_0^h \varphi w^2 dx,$$

dann wird  $\lambda$  dem richtigen Werte sehr nahe kommen.

Führt man die Integration mit diesem neuen Parameter nochmals durch, wird man finden, daß die Werte von  $w$  nicht viel von den interpolierten Werten abweichen.

Bei der Herleitung der vorangehenden Interpolationsformel wurde vorausgesetzt, daß keine homogene Oberflächenschicht vorhanden war. Wenn diese homogene Oberflächenschicht vorhanden ist, hat man als Grenzbedingung

$$h_3 \frac{dw}{dx} + w = 0.$$

Man setzt dann

$$w = \frac{\left( h_3 \frac{dw_2}{dx} + w_2 \right)_{h_3} w_1(x) - \left( h_3 \frac{dw_1}{dx} + w_1 \right)_{h_3} w_2(x)}{\left( h_3 \frac{dw_2}{dx} + w_2 \right)_{h_3} - \left( h_3 \frac{dw_1}{dx} + w_1 \right)_{h_3}}.$$

Die Interpolationsformel für  $\lambda$  wird ungeändert.

## 5. Numerische Beispiele.

Wir werden jetzt unsere Formeln auf ein Paar numerische Beispiele anwenden. Aus der Abhandlung von Helland-Hansen (4) nehme ich die Dichteverteilung von seiner Station 115 in der Färö-Shetland Rinne. Die Tiefe beträgt 580 m und das Wasser ist von der Oberfläche bis zum Boden stabil gelagert, so daß  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$  oder  $\varphi$  überall von 0 verschieden ist.

Die Dichteverteilung ist in der folgenden kleinen Tabelle wiedergegeben.

$d$	0	10	25	50	75	100
$\sigma_r$	26,63	26,74	27,05	27,31	27,40	27,45
$d$	150	200	300	400	500	
$\sigma_r$	27,51	27,55	27,70	27,86	27,96	

wo  $\sigma_r = 10^8(\rho - 1)$  ist.

Wir zeichnen jetzt eine Kurve mit der Tiefe als Abscisse und  $\sigma_r$  als Ordinate, und bestimmen für jede 10 m den Wert von  $\frac{d\sigma_r}{dz}$ , was mit Hilfe von Differenzen gemacht werden kann. Dann zeichnen wir die Kurve, die  $\frac{d\sigma_r}{dz}$  als Funktion von  $z$  wiedergibt. Etwaige Unregelmäßigkeiten werden geglättet, und aus dieser Kurve entnehmen wir die Werte von  $\frac{d\sigma_r}{dz}$ , die bei der Integration verwendet werden sollen. Die Kurven für  $\sigma_r$  und  $\frac{d\sigma_r}{dz}$  sind in Abb. 2 gegeben. Der untere Teil der Kurve für  $\frac{d\sigma_r}{dz}$  ist auch in fünffachem Maßstab gegeben.

Ehe wir die numerische Integration anfangen können, müssen wir einen angenäherten Wert des Parameters bestimmen. Es gilt in diesem Falle die Gleichung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 g \varphi w = 0,$$

mit den Grenzbedingungen

$$w = 0, \quad x = 0$$

$$w = 0, \quad x = h$$

zu integrieren. Setzen wir

$$a = \int_0^h \sqrt{\varphi} dx,$$

so nähern sich die Parameterwerte asymptotisch an

$$\lambda_n^2 g = n^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

Wir versuchen demnach zuerst mit dem Werte

$$\lambda^2 g = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

In dem vorliegenden Falle fand ich

$$a = 7,84$$

und  $\lambda^2 g = 0.16$ .

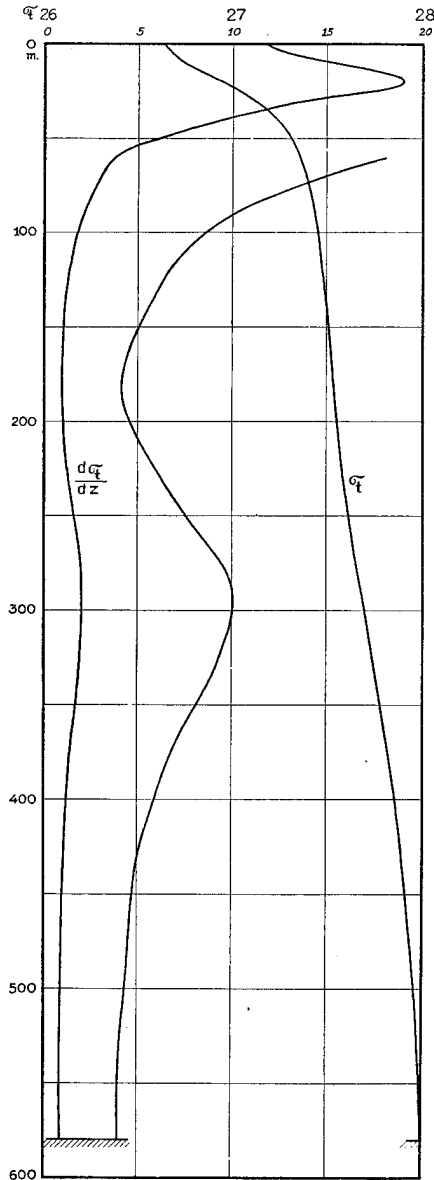


Fig. 2.

Die entsprechenden Kurven für  $w$  und  $\frac{dw}{dx}$  sind in Abb. 3 wiedergegeben. Man bemerkt, daß die Kurve für  $\frac{dw}{dx}$  eine gewisse Ähnlichkeit mit der Dichtigkeitskurve zeigt. Doch ist der starke Dichtezuwachs in der Schicht zwischen 10 und 40 m nicht ausschlaggebend, und die Geschwindigkeit wechselt ihr Vorzeichen nicht, bis wir eine Tiefe von etwa 295 m erreichen. In derselben Tiefe hat die Vertikalverschiebung ihre größte Amplitude.

Man findet keine Ähnlichkeit mit internen Wellen an einer Diskontinuitätsfläche.

Die Beobachtungen an dieser Station zeigten deutliche interne Wellen von beträchtlicher Amplitude. Bezüglich der näheren Diskussion dieser Wellen kann ich nur auf die Abhandlung von Helland-Hansen (4) verweisen. Es mag jedoch hier bemerkt werden, daß die größten Vertikalverschiebungen in etwa 300 m Tiefe gefunden wurden.

Der zweite Eigenwert wird

$$\lambda^2 g = 4 \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 = 0,642.$$

Die numerische Integration zeigte, daß dieser Wert zu klein war, und ich versuchte dann mit 0,18, was noch zu klein war. Interpolation nach der einfachen Formel

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 w_2(h) - \lambda_2^2 w_1(h)}{w_2(h) - w_1(h)}$$

ergab den Wert  $\lambda^2 g = 0,20$ . Mit diesem Werte wurde dann die Integration durchgeführt.

Als Anfangswerte wählte ich

$$w_0 = 0, \quad \left( \frac{dw}{dx} \right)_0 = 1,0000.$$

Der Endwert von  $w$  war dann 0,0207, und der Extremwert 2,08. Der Oberflächenwert ist dann hinreichend nahe an 0.

Setzen wir die Erdrotation außer Betracht, so finden wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen

$$c = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{g}{0,20}} = 70 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Die Vertikalverschiebung  $\zeta$  und die Geschwindigkeit  $u$  sind durch die Formel

$$u = \frac{\sigma}{k} \frac{d\zeta}{dz} = 10^{-4} c \frac{d\zeta}{dx}$$

verbunden. Setzen wir z. B.  $u_0 = 10 \text{ cmsek}^{-1}$ , so erhalten wir  $\left( \frac{d\zeta}{dx} \right) = \frac{10^5}{70}$  oder wenn wir die Vertikalverschiebung in Meter messen

$$\frac{100}{7}.$$

Die maximale Vertikalverschiebung wird dann  $\frac{100}{7} \cdot 2,08$  oder rund 30 m. Die Wellenlänge ist

$$(0,7 \times 12,42 \times 3600) \text{ m} = 31,3 \text{ km}.$$

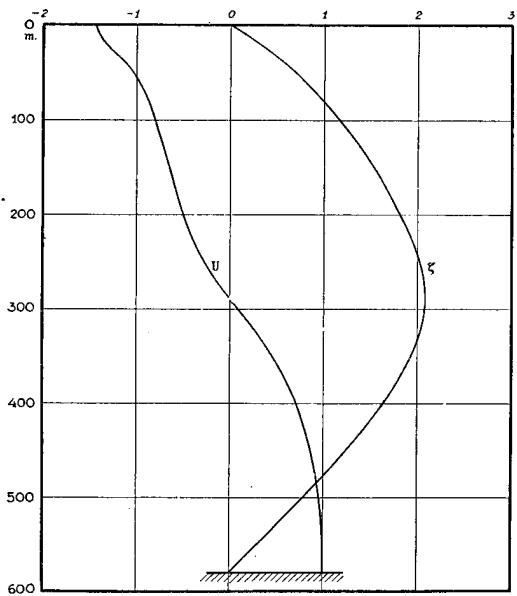


Fig. 3.

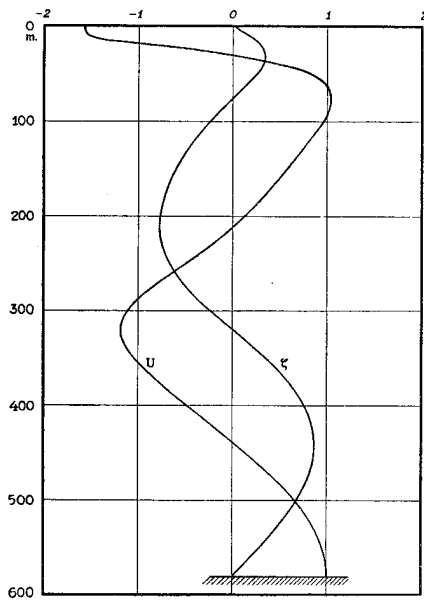


Fig. 5.

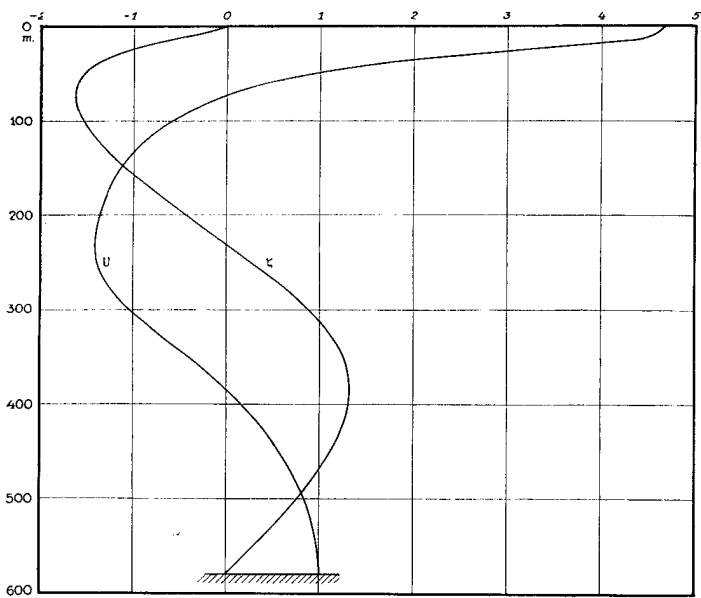


Fig. 4.

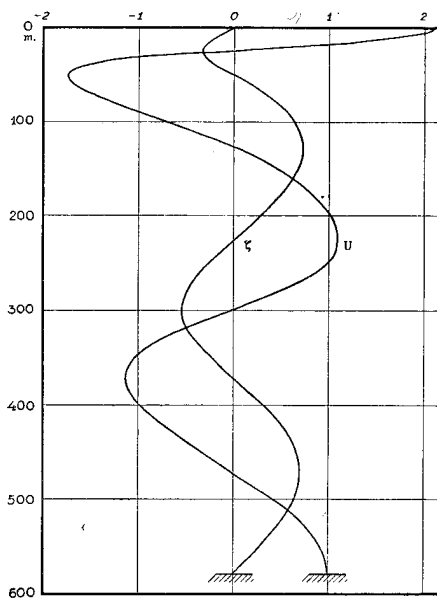


Fig. 6.

Dieser Wert war schon hinreichend genau, und eine Integration mit den Anfangswerten  $w_0=0$ ,  $w'_0=1,0000$  ergab für  $w$  den Endwert  $-0,0056$ . Die Extremwerte für  $w$  sind ungefähr 1,23 und  $-1,63$ . Für  $\frac{dw}{dx}$  hat man die Extremwerte  $-1,73$  und 4,07. (An der Oberfläche).

Die berechneten Werte von  $w$  und  $\frac{dw}{dx}$  sind in Abb. 4 dargestellt. Der Einfluß der oberen Sprungschicht kommt hier viel stärker zum Vorschein.

Der dritte Eigenwert ist

$$\lambda_3^2 g = 1,445,$$

was auch hinreichend genau ist. Der vierte Eigenwert ist

$$2,569.$$

Die entsprechenden Kurven für  $w$  und  $\frac{dw}{dx}$  sind in den Abb. 5 und 6 gegeben.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen sind

$$c_1 = \sqrt{\frac{g}{0,20}} = 70 \text{ cmsek}^{-1}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{g}{0,642}} = 39 \text{ cmsek}^{-1}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{g}{1,445}} = 26 \text{ cmsek}^{-1}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{g}{2,569}} = 19,5 \text{ cmsek}^{-1}.$$

Die Geschwindigkeiten der höheren Wellen sind dann durch die Formel

$$c_n = \frac{78}{n} \text{ cmsek}^{-1}$$

gegeben.

In Verbindung mit diesem Beispiele werde ich auch die Ergebnisse einer Interpolation zeigen. Bei der Berechnung der ersten Welle hatten wir zuerst mit dem Parameterwert  $\lambda^2 g = 0,16$  die Integration durchgeführt, dieser Wert war zu klein und ergab den Endwert  $w = 0,5990$ . Die Integration wurde dann nochmals gemacht mit dem Parameterwerte  $\lambda^2 g = 0,18$ . Der Endwert war dann  $w = 0,2829$ . Es seien nun  $w_1$  und  $w_2$  die Werte von  $w$ , die bei den numerischen Integrationen gefunden wurden. Ich setzte

$$w = \frac{w_2(h) w_1(z) - w_1(h) w_2(z)}{w_2(h) - w_1(h)}.$$

Mit Hilfe dieser Formel wurde dann  $w$  für jede 20 m vom Boden bis zur Tiefe 180 m und dann für jede 10 m bis zur Oberfläche berechnet. Es war nun möglich, die Integrale

$$\int_0^h \varphi w^2 dx, \quad \int_0^h \varphi w w_1 dx \quad \text{und} \quad \int_0^h \varphi w w_2 dx$$

auszuwerten, und die Interpolationsformel für  $\lambda$  ergab den Wert

$$\lambda^2 g = 0,2016.$$

Mit diesem Werte wurde die Integration durchgeführt. Die gefundenen Werte von  $w$  sind in der folgenden Tabelle neben den interpolierten Werten gegeben. Die Übereinstimmung ist, wie man sieht, sehr befriedigend.



Tabelle I

Tiefe	W ber.	W int.	Tiefe	W ber.	W int.	Tiefe	W ber.	W int.	Tiefe	W ber.	W int.
580	0,00	0,00	380	1,77	1,77				90	1,05	1,09
560	0,20	0,20	360	1,88	1,89	180	1,70	1,73	80	0,96	1,00
540	0,40	0,40	340	1,97	1,98	170	1,64	1,67	70	0,87	0,91
520	0,59	0,59	320	2,04	2,05	160	1,58	1,61	60	0,77	0,81
500	0,79	0,79	300	2,07	2,09	150	1,51	1,55	50	0,66	0,70
480	0,97	0,97	280	2,07	2,09	140	1,44	1,48	40	0,55	0,59
460	1,15	1,15	260	2,04	2,06	130	1,37	1,41	30	0,43	0,46
440	1,32	1,33	240	1,98	2,01	120	1,30	1,34	20	0,29	0,32
420	1,49	1,49	220	1,90	1,93	110	1,22	1,26	10	0,15	0,16
400	1,63	1,64	200	1,81	1,84	100	1,14	1,18	0	-0,01	0,00

Als zweites Beispiel nehmen wir die »Michael Sars« Station 68. Diese liegt auf  $39^{\circ} 20' N. B.$  und  $50^{\circ} 50' W. L.$  Die Tiefe beträgt etwa 5400 m. Das Tiefenwasser ist beinahe homogen von etwa 1400 m Tiefe bis zum Boden. Wir setzen daher  $h_1=40$ ,  $h_2=14$  und  $h=54$ . Die Grenzbedingungen sind in diesem Falle

$$40 \frac{dw}{dx} - w = 0, \quad x = h_1,$$

$$w = 0, \quad x = h.$$

Die Dichteverteilung  $\sigma_z$  und  $\frac{d\sigma_z}{dx}$  von der Oberfläche bis 1400 m Tiefe sind in Abb. 7 gegeben.

Angenäherte Werte des Parameters  $\lambda$  erhält man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} y = \frac{h_1}{a} \sqrt{\varphi(h_1)} y$$

wo

$$a = \int_0^{h_2} \sqrt{\varphi} dx$$

$$y^2 = \lambda^2 g a^2.$$

Messen wir  $y$  in Graden, nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$\operatorname{tg} y^0 = -0.022165 y^0.$$

Als erste Wurzel findet man  $y^0 = 111^{\circ}, 95$  oder  $x = 1.954$ . Es wird dann

$$\lambda^2 g = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0.01375.$$

Die Anfangswerte müssen die Grenzbedingung

$$40 \frac{dw}{dx} - w = 0$$

befriedigen, und wir setzen daher  $w_0 = 4,0000$  und  $\left(\frac{dw}{dx}\right)_0 = 0,1000$ . An der Oberfläche findet man den Endwert  $w = 0,0096$ , was wohl hinreichend nahe an 0 ist.

Die zweite Wurzel ist  $y = 4,8726$  und gibt  $\lambda^2 g = 0,0855$ . Dieser Parameter zeigte sich viel zu klein. Die Integration ergibt den Endwert  $-2,0771$ . Ich setzte darum

$$\lambda^2 g = 0,10.$$

Dieser Wert war noch zu klein und ergab als Oberflächenwert  $-1,2520$ . Eine Interpolation ergibt  $\lambda^2 g = 0,1219$ , was hinreichend genau ist.

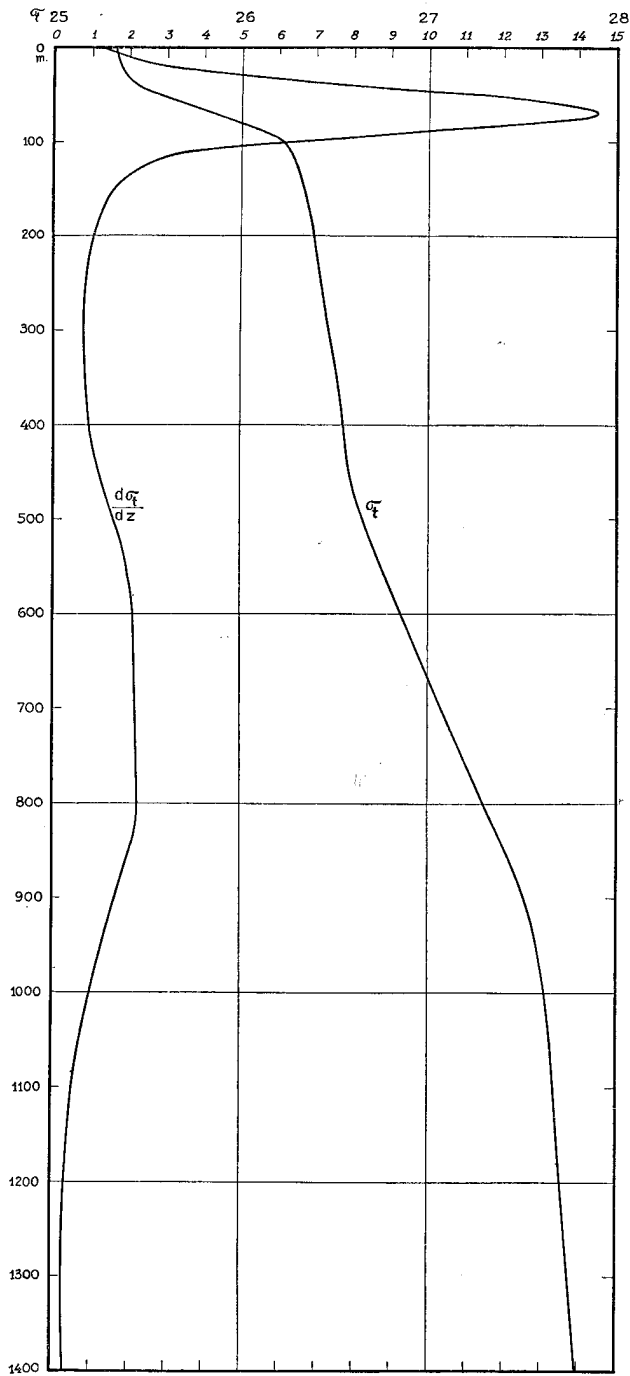


Fig. 7.

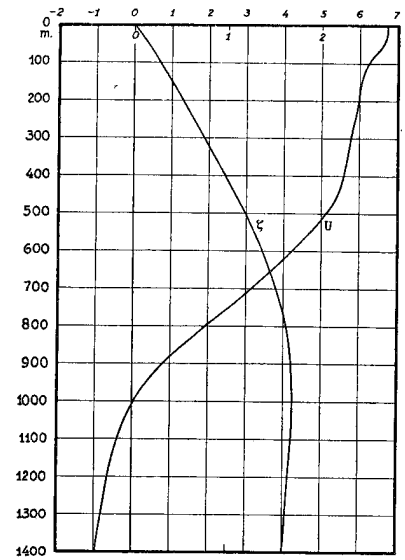


Fig. 8.

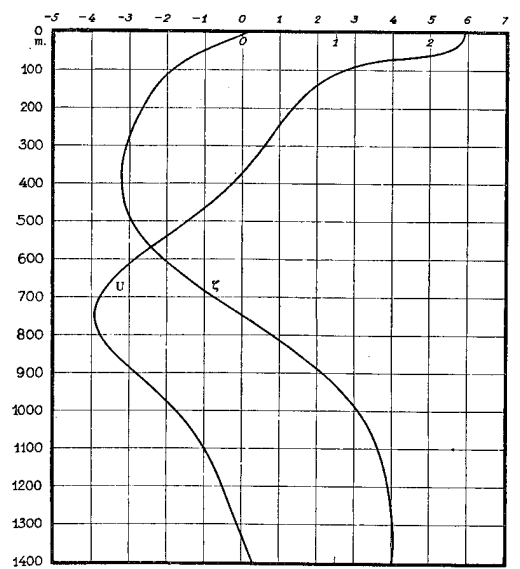


Fig. 9.

Die dritte Wurzel ist  $y=7,953$  und gibt  $\lambda^2 g=0,228$ . Der Wert ist zu groß und nach nochmaliger Integration und Interpolation findet man den Wert 0,215.

Endlich findet man als vierte Wurzel

$$x=11.07$$

$$\lambda^2 g=0.445.$$

Dieser Wert ist wieder zu groß; nochmalige Berechnung mit  $\lambda^2=0.42$  und Interpolation ergibt 0,408, was sehr genau ist.

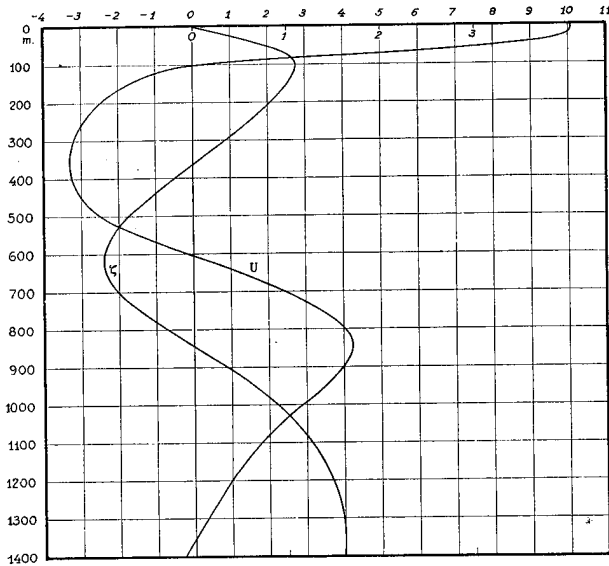


Fig. 10.

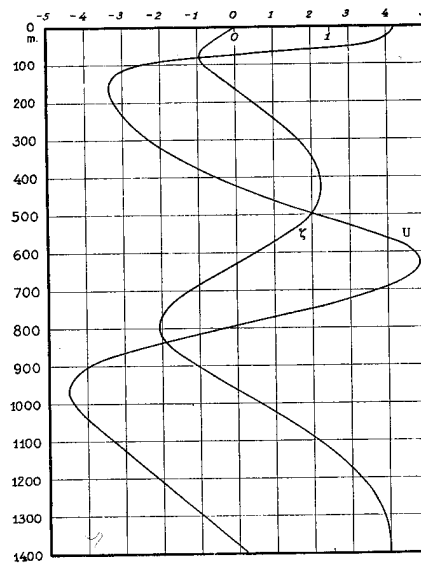


Fig. 11.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 267 \text{ cmsek}^{-1}, \quad c_2 = 90 \text{ cmsek}^{-1},$$

$$c_3 = 75 \text{ cmsek}^{-1}, \quad c_4 = 49 \text{ cmsek}^{-1}.$$

Als Beispiel für die Durchführung der numerischen Integration ist die Berechnung der zweiten internen Welle in der nachstehenden Tabelle gegeben.

### 6. Methoden zur Entdeckung interner Wellen.

Es sei  $S$  irgend eine konservative Eigenschaft des Wassers z. B. Salzgehalt oder Temperatur. Daß das Wasser diese Eigenschaft bei der Bewegung unverändert beibehält, wird durch die folgende Gleichung ausgedrückt.

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

Da die Änderung in horizontaler Richtung  $\frac{\partial S}{\partial x}$  als sehr klein vorausgesetzt werden soll, können wir das zweite Glied weglassen. Setzen wir

Tabelle II.

$d$	$\varphi$	$w$	$\Delta w$	$\Delta_2 w$	$\xi$	$\Delta \xi$	$\Delta_2 \xi$
1400	0,28	4 0000			— 218,4		
			290			— 1,6	
1360	0,28	4 0290		— 220	— 220,0		— 14,5
			70			— 16,1	
1320	0,30	4 0360	— 167	— 237	— 236,1		17,1
						1,0	
1280	0,30	4 0193	— 401	— 234	— 235,1		— 14,2
						— 13,2	
1240	0,32	3 9792	— 650	— 249	— 248,3		— 13,3
						— 26,5	
1200	0,36	3 9142	— 926	— 276	— 274,8		3,2
						— 23,3	
1160	0,40	3 8216	— 1224	— 298	— 298,1		— 24,8
						— 48,1	
1120	0,48	3 6992	— 1572	— 348	— 346,2		— 37,9
						— 82,0	
1080	0,62	3 5420	— 2003	— 431	— 428,2		— 11,1
						— 93,1	
1040	0,80	3 3417	— 2525	— 522	— 521,3		24,1
						— 69,0	
1000	0,98	3 0892	— 3113	— 588	— 590,3		— 23,2
						— 92,2	
960	1,26	2 7779	— 3797	— 684	— 682,5		54,5
						— 37,7	
920	1,54	2 3982	— 4513	— 716	— 720,2		66,9
						29,2	
880	1,82	1 9469	— 5198	— 685	— 691,0		71,8
						101,0	
840	2,12	1 4271	— 5782	— 584	— 590,0		114,9
						215,9	
800	2,26	8489	— 6174	— 365	— 374,1		55,9
						271,8	
760	2,24	2342	— 6245	— 98	— 102,3		— 2,1
						269,7	
720	2,20	— 3903	— 6078	167	167,4		— 14,8
						254,9	
680	2,17	— 9981	— 5657	421	422,3		— 24,6
						230,3	
640	2,14	— 1 5638	— 5006	651	652,6		— 29,5
						200,8	
600	2,12	— 2 0644	— 4155	851	853,4		— 87,0
						113,8	
560	2,08	— 2 4799	— 3195	960	967,2		— 107,4
						6,4	
520	1,76	— 2 7994	— 2243	952	960,8		— 124,0
						— 117,6	
480	1,43	— 3 0237	— 1410	833	843,2		— 22,1
						— 139,7	
440	1,14	— 3 1647	— 708	702	703,5		29,3
						— 110,4	
400	0,94	— 3 2355	— 112	596	593,1		55,4
						— 55,0	
360	0,85	— 3 2467	431	543	538,1		22,9
						— 32,1	
320	0,81	— 3 2036	939	508	506,0		11,2
						— 20,0	
280	0,80	— 3 1097	1425	486	485,1		39,2
						18,3	
240	0,87	— 2 9672	1932	507	503,4		57,1
						75,4	
200	1,07	— 2 7740	2516	584	578,8		
160	1,48	— 2 5224					

$d$	$\varphi$	$w$	$\Delta w$	$\Delta_2 w$	$\xi$	$\Delta \xi$	$\Delta_2 \xi$
280	0,80	- 3 1097	652		121,3	0,4	
260	0,82	- 3 0445	773	121	121,7	4,1	3,7
240	0,87	- 2 9672	899	126	125,8	7,5	3,4
220	0,95	- 2 8773	1033	134	134,3	11,4	3,9
200	1,07	- 2 7740	1178	145	144,7	15,9	4,5
180	1,24	- 2 6562	1339	161	160,6	21,4	5,5
160	1,48	- 2 5223	1521	182	182,0	37,5	16,2
140	1,90	- 2 3702	1742	221	219,5		
120	2,70	- 2 1960					
180	1,24	- 2 6562	649		39,9	2,5	
170	1,35	- 2 5913	690	41	42,4	2,9	0,4
160	1,48	- 2 5223	735	45	45,3	2,2	- 0,7
150	1,60	- 2 4488	782	47	47,5	7,1	5,9
140	1,90	- 2 3706	837	55	54,5	7,8	- 0,6
130	2,25	- 2 2869	899	62	62,4	9,5	1,7
120	2,70	- 2 1970	971	72	71,9	21,0	11,5
110	3,65	- 2 0999	1065	94	92,9	59,4	38,4
100	6,30	- 1 9934	1221	156	152,3	65,5	6,1
90	9,60	- 1 8713	1439	218	217,8	46,1	- 19,4
80	12,60	- 1 7274	1702	263	263,9	9,9	- 36,2
70	14,50	- 1 5572	1973	271	273,8	- 44,6	- 54,5
60	13,90	- 1 3599	2198	225	229,2	- 64,0	- 19,4
50	11,95	- 1 1401	2362	164	165,2	- 86,3	- 22,3
40	7,20	- 9039	2439	77	78,9	- 36,1	50,2
30	5,35	- 6600	2486	47	42,8	- 27,8	8,3
20	3,00	- 4114	2502	16	15,0	- 11,1	16,7
10	2,00	- 1612	2507	5	3,9		
0	1,30	895					

und

$$S = S_0(z) + S_1(x, z, t)$$

$$w = \frac{d\zeta}{dt}$$

erhalten wir

$$S_1 = -\zeta \frac{dS_0}{dz},$$

$$\zeta = -\frac{S_1}{\frac{dS_0}{dz}}.$$

Die Vertikalverschiebung der Wasserpartikel  $\zeta$  kann demnach durch Beobachtung irgend einer konservativen Eigenschaft der Wassermassen festgestellt werden. Fortgesetzte Beobachtungen z. B. jede Stunde geben uns die Mittel um  $S_0$  zu bestimmen, und dann die Abweichungen  $S_1$  von diesem Mittelwerte zu finden. Aus der Formel für  $\zeta$  sieht man auch, daß man am besten dort beobachten soll, wo sich  $\frac{dS_0}{dz}$  leicht und sicher bestimmen läßt.

Aus den Beobachtungen findet man dann durch harmonische Analyse ein Resultat von der Form

$$\zeta = A \cos \sigma t + B \sin \sigma t.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  müssen durch Strommessungen gefunden werden. Die Strommessungen geben gewöhnlich als Resultat eine Geschwindigkeit und deren Richtung. Bei der Analyse dekomponiert man gewöhnlich die Geschwindigkeit in ihre Nordkomponente und Ostkomponente. Es sei  $u$  die Ostkomponente und  $v$  die Nordkomponente des Stromes; durch harmonische Analyse erhält man dann das Resultat in der Form

$$u = M \cos \sigma t + N \sin \sigma t,$$

$$v = P \cos \sigma t + Q \sin \sigma t.$$

Aus diesen Größen wünschen wir die Größe und Orientierung der Stromellipse zu finden. Um diese Rechnung auszuführen, denken wir uns  $u$  und  $v$  in zwei zirkuläre Komponenten mit entgegengesetzter Drehung aufgelöst. Wir setzen demnach

$$u = C \cos(\sigma t - \alpha) + D \cos(\sigma t - \beta),$$

$$v = C \sin(\sigma t - \alpha) - D \sin(\sigma t - \beta).$$

Es muß dann

$$C \cos \alpha = \frac{M + Q}{2} \quad D \cos \beta = \frac{M - Q}{2}$$

$$C \sin \alpha = \frac{N - P}{2} \quad D \sin \beta = \frac{N + P}{2}$$

sein. Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N - P}{M + Q} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{N + P}{M - Q}$$

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{(M + Q)^2 + (N - P)^2}, \quad D = \frac{1}{2} \sqrt{(M - Q)^2 + (N + P)^2}.$$

Es ist nun

$$V^2 = u^2 + v^2 = C^2 + D^2 + 2CD \cos(2\sigma t - \alpha - \beta).$$

Es ist darum  $\frac{dV}{dt} = 0$  für  $2\sigma t - \alpha - \beta = 0$ , oder

oder

$$\tau = \sigma t = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

Die Richtung des Stromes in diesem Augenblicke ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \chi = \left( \frac{v}{u} \right)_{\sigma t = \tau} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

oder

$$\chi = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

$$V_{\max} = C + D, \quad V_{\min} = C - D.$$

$\tau$  gibt die Zeit an, wenn der Strom in der Richtung der großen Achse läuft, und  $\chi$  gibt den Winkel an, den die große Achse der Stromellipse mit der Ostrichtung bildet. Die Drehung des Stromes ist negativ oder *cum sole*, wenn  $C < D$  ist. Durch die Einwirkung der Erdrotation findet man auf der nördlichen Halbkugel beinahe immer negative Rotation.

Wenn wir die Fortpflanzungsrichtung der Gezeitenwelle bestimmt haben, können wir die  $x$ -Achse unseres Koordinatensystems in dieser Richtung orientieren. Es wird dann

$$\begin{aligned} u &= (C + D) \cos(\sigma t - \tau), \\ v &= (C - D) \sin(\sigma t - \tau). \end{aligned}$$

Angenommen, wir haben  $u$  und  $\zeta$  als Funktionen von  $z$  bestimmt, dann können wir versuchen, die Amplituden der verschiedenen internen Wellen zu bestimmen. Es sei

$$\zeta = A \cos \sigma t + B \sin \sigma t,$$

und

$$u = F \cos \sigma t + G \sin \sigma t.$$

Wir setzen

$$A = \Sigma a_n \zeta_n(z)$$

und

$$F = \Sigma f_n \frac{d\zeta_n}{dz},$$

Nun ist  $\zeta_n$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} + \lambda^2 g \varphi \zeta_n = 0,$$

wir erhalten darum

$$\lambda_n^2 g \int_0^h \varphi \zeta_n \zeta_m dz = - \int_0^h \zeta_m \frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} dz = - \zeta_m \left. \frac{d\zeta_n}{dz} \right|_0^h + \int_0^h \frac{d\zeta_m}{dz} \frac{d\zeta_n}{dz} dz = \int_0^h \frac{d\zeta_m}{dz} \frac{d\zeta_n}{dz} dz.$$

In derselben Weise erhalten wir

$$\lambda_m^2 g \int_0^h \varphi \zeta_n \zeta_m dz = \int_0^h \frac{d\zeta_m}{dz} \frac{d\zeta_n}{dz} dz.$$

Subtraktion ergibt

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) g \int_0^h \varphi \zeta_n \zeta_m dz = 0$$

und somit

$$\int_0^h \varphi \zeta_n \zeta_m dz = 0, \quad \int_0^h \frac{d\zeta_m}{dz} \frac{d\zeta_n}{dz} dz = 0.$$

Es sei

$$\int_0^h \varphi \zeta_n^2 dz = a_n,$$

dann haben wir

$$\int_0^h \left( \frac{d\zeta_n}{dz} \right)^2 dz = \lambda^2 g a_n.$$

Mit Hilfe dieser Orthogonalitätseigenschaften können wir die Koeffizienten  $a_n$  und  $f_n$  bestimmen.

Wir finden

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^h \varphi A \zeta_n(z) dz$$

und

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n^2 g \alpha_n} \int_0^h F \frac{d\zeta_n}{dz} dz.$$

Diese Koeffizienten sind nicht von einander unabhängig. Das Verhältnis zwischen ihnen richtet sich nach dem Typus der internen Wellen. Wenn die Wellen vom Kelvinischen Typus sind, haben wir

$$u_n = \frac{\sigma}{k} \frac{d\zeta_n}{dz} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{d\zeta_n}{dz}.$$

Es muß demnach

$$\frac{a_n}{\lambda_n} = f_n$$

oder

$$\int_0^h A \varphi \zeta_n dz = \frac{1}{\lambda_n g} \int_0^h F \frac{d\zeta_n}{dz} dz$$

sein. Entsprechendes gilt von den Koeffizienten  $B$  und  $G$ .

Die neueren ozeanographischen Untersuchungen zeigen, daß das Auftreten von internen Gezeitenwellen keine Ausnahmefälle vorstellen, vielmehr dürften sie als Regel betrachtet werden. Dadurch wird es verständlich, daß die Änderung der Geschwindigkeit mit der Tiefe sehr verwickelt sein kann. Es ist ja auch nicht ausgeschlossen, daß mehrere interne Wellen, die auch verschiedene Fortpflanzungsrichtungen haben können, gleichzeitig auftreten. Die Untersuchung dieser Fragen befindet sich noch im ersten Anfangsstadium. Zwar bietet sie große Schwierigkeiten, dürfte aber sehr wichtige Resultate verheißen. Ich hoffe auf diese Fragen zurückkommen zu können, möglicherweise, wenn geeignete Beobachtungen vorliegen.

Ein großer Teil der vorliegenden Arbeit ist während eines Aufenthaltes in Lund, Schweden, entstanden. Ich hatte somit Gelegenheit mit Professor Dr. V. Walfrid Ekman anregende Überlegungen anzustellen, und es sei mir an dieser Stelle erlaubt, ihm herzlich für die Förderung, die meine Arbeit dadurch erfahren hat, zu danken.

Auch dem Direktor des geophysikalischen Institutes in Bergen, Herrn Professor Dr. B. Helland-Hansen, möchte ich bei dieser Gelegenheit meinen besten Dank aussprechen, weil er es mir ermöglicht hat, mich mit diesen Fragen zu beschäftigen.



### Literatur.

1. EKMAN, V. W.: On dead-water. Norwegian North Polar Expd. 1893—1896, Scient. Res. Vol. V, XV.
2. HELLAND-HANSEN, B. and EKMAN, V. W.: Measurements of Ocean Currents. Kungl. fysiografiska sällskapetets i Lund förhandl. Bd. 1 No. 1.
3. HELLAND-HANSEN, BJØRN and NANSEN, FRIDTJOF: The Norwegian Sea. Rep. on Norw. Fishery and Marine Investigations. Vol. II. No. 2. Kristiania (Oslo) 1909.
4. HELLAND-HANSEN, B.: Physical Oceanography and Meteorology. Rep. on the Michael Sars North Atlant. Deep Sea Expd. 1910.
5. ZEILON, N.: On tidal Boundary Waves. Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar. Vol. 47, 4.
6. ZEILON, N.: On Seiches in Gullmarfjord. Svenska Hydrografisk-biologiska kommissionens skrifter V.
7. STÖRMER, C.: Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace. Archives des Sciences Physiques et Naturelles. Geneve 1907.