

# WÄRMELEITUNG IM MEERE

VON JONAS EKMAN FJELDSTAD

(Eingeliefert am 20. Mai 1933).

## 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist zum Teil schon im Jahre 1929 entstanden. Die Berechnungen konnten jedoch damals nicht veröffentlicht werden, weil das Material, auf dem die Berechnungen beruhen, noch nicht für die Veröffentlichung fertig war.

In seiner Abhandlung: *Physical Oceanography and Meteorology. Report on the Scientific Results of the »Michael Sars« North Atlant. Deep-Sea Expd. 1910.* Printed 1930, Bergen, hat Professor Helland-Hansen den Temperaturgang im Laufe des Jahres in drei Gebieten des Nordatlantischen Ozeans untersucht. Seine Temperaturkurven für das Biscaya-Gebiet hat er mir zu mathematischer Behandlung überlassen. Eine Lösung der entsprechenden Wärmeleitungsaufgabe habe ich dann für einen Spezialfall gegeben<sup>1</sup>.

Einige vorläufige Ergebnisse meiner Berechnungen hat Helland-Hansen in seiner Abhandlung mitgeteilt.

Die Wärmezufuhr im Meere geschieht wesentlich durch die direkte Sonnenstrahlung und diffuse Himmelsstrahlung; nur ein sehr kleiner Teil kommt durch die direkte Berührung zwischen Luft und Wasser. Die Abkühlung des Meereswassers findet durch Ausstrahlung, Verdunstung und Konvektion statt. Diese Abkühlung ist von dem Zustand der Atmosphäre abhängig (Wolkendecke, Luftfeuchtigkeit, Wind). Die Sonnenstrahlen werden in den obersten Wasserschichten sehr stark absorbiert, nur die kurzwelligen Strahlen vermögen tiefer in das Wasser einzudringen. Die Intensität dieser Strahlung ist gering, so daß die resultierende Erwärmung nur unbedeutend wird. Die Wärmezufuhr durch Strahlung wird darum nur in einer dünnen Schicht an der Oberfläche von Bedeutung.

Durch die Wellenbewegung an der Oberfläche tritt dort eine lebhafte Mischung ein, so daß die oberen 10 bis 20 Meter beinahe dieselbe Temperatur erhalten.

Die Temperatur dieser Oberflächenschicht ist nun durch die Wärmebilanz zwischen Einstrahlung, Ausstrahlung, Verdunstung, Wärmeleitung u. s. w. bestimmt. Der genauere Zusammenhang ist doch bis jetzt wenig bekannt, und wir werden hier die beobachtete Oberflächentemperatur als eine bekannte Funktion der Zeit ansehen. Diese Funktion ist periodisch mit einer jährlichen Periode.

Die molekuläre Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers ist so klein, daß wir davon absehen können; an ihre Stelle tritt die turbulente Wärmeleitungsfähigkeit. Diese Größe ist bis jetzt nur unvollständig bekannt. Verschiedene Versuche, diese Größe zu bestimmen, liefern Werte von 3 bis 30 C. G. S.<sup>2</sup>

Wir werden im folgenden eine Formel herleiten, mit deren Hilfe die vertikale Änderung der Wärmeleitungsfähigkeit berechnet werden kann.

<sup>1</sup> »Wärmeleitung mit veränderlicher Leitungsfähigkeit« (Avhandl. utgitt av det norske Videnskapsakademi i Oslo. 1929.

<sup>2</sup> Mac Even: *Ocean Temperatures, their Relation to Solar Radiation and Oceanic Circulation* 1918. A mathematical Theory etc. Bulletin of Scripps Inst. of Oceanogr. 1929.

Wenn man an einer bestimmten Stelle des Meeres die Temperaturverteilung untersucht, so findet man oft Werte, die nicht unmittelbar verglichen werden können, denn die Temperatur ist nicht nur durch den vertikalen Wärmetransport bestimmt; sondern auch durch horizontale Strömungen. Wenn die Temperatur nur durch vertikalen Wärmetransport bestimmt wäre, müßte die Temperatur in sehr großen Tiefen ungefähr der Mitteltemperatur der Oberfläche entsprechen. Genau gilt das nicht, wie wir weiter unten sehen werden. Nun wissen wir aber, daß selbst am Äquator die Temperatur in großen Tiefen sehr niedrig ist, und es ist dann klar, daß das Wasser diese Temperatur nur in höheren Breiten erhalten kann.

In dem nördlichen Teile des Atlantischen Ozeans gehen die Strömungen überwiegend gegen Norden, während in größeren Tiefen ein Wassertransport in der Richtung gegen dem Äquator stattfindet.

Zwischen diesen Strömungen findet ein Austausch von Temperatur und Salzgehalt statt. Im großen und ganzen ist dies ein permanenter Prozeß, so daß an einem bestimmten Orte im Meere Temperatur und Salzgehalt konstante Werte erhalten. Dies gilt jedoch nur in so großen Tiefen, daß die Jahresschwankung ohne Bedeutung ist. Der Austausch von Temperatur und Salzgehalt geschieht nach denselben Gesetzen, und man darf demnach erwarten, daß in einem bestimmten Stromsystem ein Zusammenhang zwischen Temperatur und Salzgehalt gefunden werden kann, so daß zu einem bestimmten Salzgehalt auch eine bestimmte Temperatur gehört. Helland-Hansen hat nun gefunden, daß dieser Zusammenhang in dem größten Teile des Nordatlantischen Ozeans derselbe ist. Durch eine statistische Behandlung von Temperatur- und Salzgehaltsbeobachtungen hat er eine starke Korrelation gefunden. Trägt man zusammengehörige Werte von Temperatur und Salzgehalt in ein Koordinatensystem ein, so gruppieren sich die Punkte um eine Kurve, die den »normalen« Zusammenhang zwischen Temperatur und Salzgehalt gibt.

Bei der Konstruktion dieser Kurve wurde von Beobachtungen in der Nähe der Oberfläche abgesehen. Wegen Sonnenstrahlung, Niederschlag und Verdunstung ändert sich dort im Laufe des Jahres Temperatur und Salzgehalt, so daß die entsprechenden Punkte gewöhnlich nicht in die Nähe der »Normalkurve« fallen. Es ist jedoch möglich, daß die jährlichen Mittelwerte ein normales Verhalten zeigen werden.

Es sei

$$\vartheta = f(s)$$

die Gleichung der Normalkurve. Wir nehmen jetzt an, daß die Mittelwerte von Temperatur und Salzgehalt, die wir durch  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{s}$  bezeichnen, diese Gleichung befriedigen

$$\bar{\vartheta} = f(\bar{s}).$$

Es seien nun  $\vartheta$  und  $s$  zwei zusammengehörige Werte von Temperatur und Salzgehalt. Es ist dann

$$\vartheta - \bar{\vartheta} = \vartheta - f(\bar{s}).$$

Weiter sei

$$\vartheta_1 = f(s),$$

die Temperatur, die dem Salzgehaltswerte  $s$  entspricht.

Wir haben dann

$$\vartheta_1 = f(\bar{s}) + \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right)_{s=\bar{s}} (s - \bar{s}), \quad s' = \bar{s} + \theta(s - \bar{s}), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

und

$$\vartheta - \bar{\vartheta} = \vartheta - \vartheta_1 + (s - \bar{s}) \left( \frac{df}{ds} \right)_{s=s'}.$$

Die Differenz  $\vartheta - \vartheta_1$  nennen wir die Temperaturanomalie. Wir sehen jetzt, daß die Temperaturanomalie annähernd auch die Abweichung von der Mitteltemperatur gibt, wenn die Jahresschwankung des Salzgehaltes hinreichend klein ist.

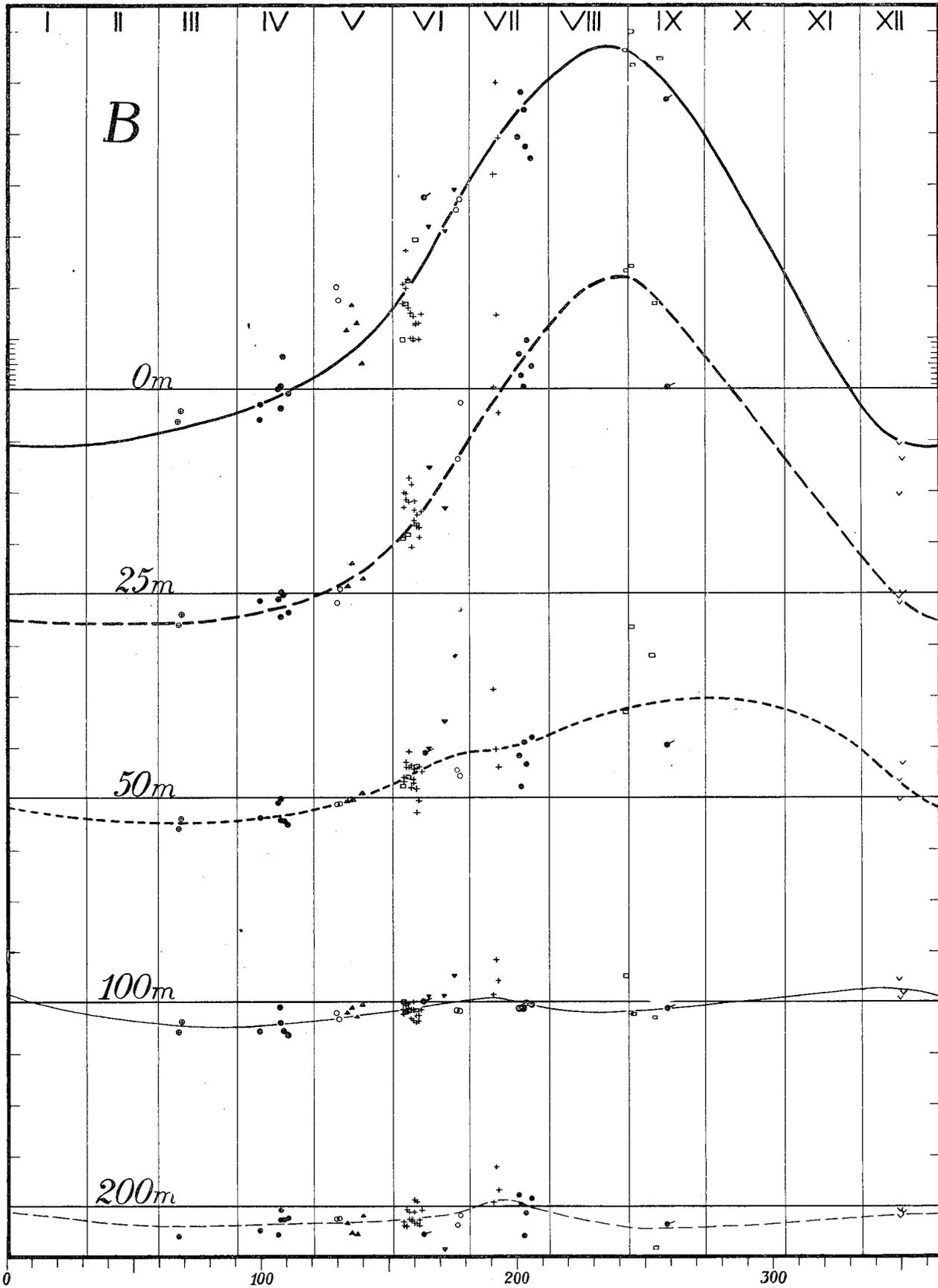


Fig. 1. Der jährliche Temperaturgang in verschiedene Tiefen im Biscaya-Gebiet. (Nach Helland-Hansen).

Wir können somit annähernde Werte von  $\vartheta - \bar{\vartheta}$  bestimmen. Das besagt, wir können den Temperaturzuwachs bestimmen, der von dem vertikalen Wärmetransport herrührt.

Diese Methode ist nun von Helland-Hansen auf Beobachtungen aus verschiedenen Teilen des Atlantischen Ozeans angewandt. Mit Hilfe seiner »Normalkurve« konnte er die Abweichungen von der Mitteltemperatur bestimmen. Seine Temperaturkurven geben darum annähernd die Jahresschwankungen in einem Meere, wo der vertikale Wärmetransport für die Temperatur maßgebend ist.

Seine Temperaturkurven für das Biscaya-Gebiet sollen hier näher betrachtet werden. Die ganze Temperaturschwankung an der Oberfläche beträgt  $7,8^\circ$ . Dieser Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit den Werten, die durch statistische Behandlung von Oberflächentemperaturen gefunden sind. Man kann wohl diese Tatsache als ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Methode ansehen.

## 2. Wärmeleitungsproblem.

Wir legen die  $z$ -Achse mit positiver Richtung nach unten, und bezeichnen die Temperatur in der Tiefe  $z$  durch  $u(z, t)$ , weiter sei  $\rho$  die Dichte,  $c$  die spezifische Wärme des Wassers, und  $\rho c f(z, t)$  die durch Strahlung entwickelte Wärmemenge in der Tiefe  $z$ . Wenn  $\mu$  die turbulente Wärmeleitungsfähigkeit ist, gilt die Gleichung

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho c f(z, t). \quad (1)$$

Wir setzen

$$\frac{\mu}{\rho c} = \eta$$

und nennen  $\eta$  die turbulente Temperaturleitungsfähigkeit.

Unsere Aufgabe ist nun: Gesucht ist ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f(z, t), \quad (1')$$

das periodisch sein soll:

$$u(z, t+T) = u(z, t).$$

Dabei ist  $f(z, t)$  auch eine periodische Funktion der Zeit.

$$f(z, t+T) = f(z, t),$$

An der Oberfläche  $z=0$  soll  $u$  als Funktion der Zeit gegeben sein

$$u = k(t), \quad z=0.$$

Während in der Tiefe  $z=h$  der Temperatur den konstanten Wert  $v$  beigelegt werden soll.  $k(t)$  ist natürlich auch eine periodische Funktion der Zeit  $t$ .

Wir werden hier die Lösung in möglichst elementarer Weise entwickeln, und teilen darum unsere Aufgabe in drei Teile. Wir setzen

$$u = u_0 + u_1 + u_2. \quad (2)$$

Dabei genügt  $u_0$  der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & z &= 0 \\ u_0 &= v, & z &= h. \end{aligned} \quad (4)$$

$u_1$  ist ein Integral der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_1}{\partial z} \right), \quad (5)$$

und genügt den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} u_1 &= k(t), & z &= 0 \\ u_1 &= 0, & z &= h, \end{aligned} \quad (6)$$

während  $u_2$  ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + f(z, t) \quad (7)$$

ist, mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} u_2 &= 0, & z &= 0 \\ u_2 &= 0, & z &= h. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Bestimmung von  $u_0$  ist nun einfach, man sieht ohne weiteres ein, daß

$$u_0 = v \frac{\int_0^z \frac{ds}{\eta(s)}}{\int_0^h \frac{ds}{\eta(s)}} \quad (9)$$

das gesuchte Integral ist.

Wir wenden uns jetzt an die Bestimmung von  $u_2$ . Da das Integral periodisch sein soll, können wir den folgenden Ansatz machen

$$u_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\sigma t}. \quad (10)$$

Wo  $\sigma = \frac{2\pi}{T}$  gesetzt wird.

Wir setzen weiter

$$f(z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z) e^{in\sigma t}. \quad (11)$$

Es ist dann

$$f_n(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, t) e^{-in\sigma t} dt. \quad (12)$$

Wir wollen annehmen, daß diese Entwicklung möglich ist. Die Differentialgleichung ist befriedigt, wenn die Koeffizienten folgende Gleichung befriedigen

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{da_n}{dz} \right) - in\sigma a_n = -f_n(z). \quad (13)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, und wir suchen davon ein Integral mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & z &= 0 \\ a_n &= 0, & z &= h. \end{aligned} \quad (14)$$

Es seien jetzt  $w_1(z)$  und  $w_2(z)$  zwei Integrale der homogenen Gleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dw}{dz} \right) - in\sigma w = 0, \quad (15)$$

wir können z. B. die Integrale wählen, die für  $z=0$  die Bedingungen befriedigen

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, & w_2 &= 0, \\ \eta \frac{dw_1}{dz} &= 0, & \eta \frac{dw_2}{dz} &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Es gilt dann die Identität

$$w_1 \eta \frac{dw_2}{dz} - w_2 \eta \frac{dw_1}{dz} = 1. \quad (17)$$

Um das gesuchte Integral zu finden, benutzen wir die Methode der Variation der Konstanten, und setzen

$$a_n = C_1 w_1 + C_2 w_2. \quad (18)$$

Differentiation ergibt

$$\frac{da_n}{dz} = C_1 \frac{dw_1}{dz} + C_2 \frac{dw_2}{dz} + w_1 \frac{dC_1}{dz} + w_2 \frac{dC_2}{dz}$$

wir unterwerfen  $C_1$  und  $C_2$  der Bedingung

$$w_1 \frac{dC_1}{dz} + w_2 \frac{dC_2}{dz} = 0. \quad (19)$$

Dann finden wir weiter

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{da_n}{dz} \right) = C_1 \frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dw_1}{dz} \right) + C_2 \frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dw_2}{dz} \right) + \eta \frac{dw_1}{dz} \frac{dC_1}{dz} + \eta \frac{dw_2}{dz} \frac{dC_2}{dz}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\eta \frac{dw_1}{dz} \frac{dC_1}{dz} + \eta \frac{dw_2}{dz} \frac{dC_2}{dz} = -f_n(z). \quad (20)$$

Diese Gleichung zusammen mit (19) bestimmt nun  $\frac{dC_1}{dz}$  und  $\frac{dC_2}{dz}$ . Multiplizieren wir (20)

und (19) der Reihe nach mit  $-w_2$  und  $\eta \frac{dw_2}{dz}$ , so erhalten wir

$$\frac{dC_1}{dz} \left[ w_1 \eta \frac{dw_2}{dz} - w_2 \eta \frac{dw_1}{dz} \right] = f_n(z) w_2(z)$$

oder mit Rücksicht auf die Identität (17)

$$\frac{dC_1}{dz} = f_n(z) w_2(z).$$

Ähnlich finden wir

$$\frac{dC_2}{dz} = -f_n(z) w_1(z).$$

Integration ergibt jetzt

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^z f_n(s) w_2(s) ds + c_1 \\ C_2 &= - \int_0^z f_n(s) w_1(s) ds + c_2 \end{aligned}$$

und somit

$$a_n = \int_0^z f_n(s) [w_1(z) w_2(s) - w_2(z) w_1(s)] ds + c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z). \quad (21)$$

Die zwei Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  können wir bestimmen, indem wir verlangen, daß  $a_n$  für  $z=0$  und für  $z=h$  verschwinden soll. Wir finden  $c_1=0$  und

$$c_2 = + \int_0^h f_n(s) \frac{w_1(s)w_2(h) - w_2(s)w_1(h)}{w_2(h)} ds.$$

Für  $a_n$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} a_n = & \int_0^z f_n(s) [w_1(z)w_2(s) - w_1(s)w_2(z)] ds \\ & + \int_0^h f_n(s) \frac{w_2(z)}{w_2(h)} [w_1(s)w_2(h) - w_2(s)w_1(h)] ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Dies ist nun die gesuchte Lösung.

Wir können jedoch die Formel ein wenig umgestalten, indem wir das letzte Integral in zwei Teile zerlegen, von 0 bis  $z$  und von  $z$  bis  $h$ . Das Integral von 0 bis  $z$  vereinigen wir mit dem ersten Integrale, und erhalten dann

$$\begin{aligned} a_n = & \int_0^z f_n(s) \frac{w_2(s)}{w_2(h)} [w_1(z)w_2(h) - w_2(z)w_1(h)] ds \\ & + \int_z^h f_n(s) \frac{w_2(z)}{w_2(h)} [w_1(s)w_2(h) - w_2(s)w_1(h)] ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Wenn wir jetzt noch eine Funktion  $\Gamma_n(z, s)$  durch folgende Formeln definieren

$$\Gamma_n(z, s) = \frac{w_2(s)}{w_2(h)} [w_1(z)w_2(h) - w_2(z)w_1(h)]$$

für  $s < z$ , und (24)

$$\Gamma_n(z, s) = \frac{w_2(z)}{w_2(h)} [w_1(s)w_2(h) - w_2(s)w_1(h)]$$

für  $s > z$ , so können wir  $a_n$  in folgender Form schreiben

$$a_n = \int_0^h \Gamma_n(z, s) f_n(s) ds. \quad (25)$$

$\Gamma_n$  hängt noch von  $n$  ab und wir haben darum den Index  $n$  zugefügt, um an diese Abhängigkeit zu erinnern.

Setzen wir diesen Wert für  $a_n$  in die Reihe ein, so erhalten wir

$$u_2 = \int_0^h ds \sum \Gamma_n(z, s) f_n(s) e^{in\sigma t}. \quad (26)$$

$\Gamma_n(z, s)$  ist, wie man leicht erkennt, eine Greensche Funktion und genügt den Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \eta \frac{d\Gamma}{ds} \right) - in\sigma \Gamma &= 0 \\ \Gamma &= 0, \quad s=0; \quad \Gamma=0, \quad s=h, \\ \eta \frac{d\Gamma}{ds} \Big|_{z=0} - \eta \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \Big|_{z=0} &= 1, \end{aligned} \quad (27)$$

$\Gamma$  ist eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen  $s$  und  $z$ , und ist überdies symmetrisch.

Es ist

$$\left(\eta \frac{\partial \Gamma}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{w_1(z)w_2(h) - w_2(z)w_1(h)}{w_2(h)} = \Phi_n(z), \quad (28)$$

und diese Funktion ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{d\Phi}{dz} \right) - in\sigma\Phi = 0 \quad (29)$$

und befriedigt den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \Phi &= 1, \quad z=0 \\ \Phi &= 0, \quad z=h. \end{aligned} \quad (30)$$

Diese Funktion wird uns bei der Aufstellung der Lösung für  $u_1$  das Gesuchte geben.

Um die Lösung für  $u_1$  zu finden, setzen wir

$$k(t) = \sum k_n e^{in\sigma t} \quad (31)$$

und

$$u_1 = \sum b_n(z) e^{in\sigma t}. \quad (32)$$

Es muß dann

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{db_n}{dz} \right) - in\sigma b_n = 0 \quad (33)$$

und

$$\begin{aligned} b_n &= k_n \quad \text{für } z=0 \\ b_n &= 0 \quad \text{für } z=h \end{aligned} \quad (34)$$

sein. Wir setzen darum

$$b_n = k_n \Phi_n(z),$$

und erhalten demnach

$$u_1 = \sum k_n \Phi_n(z) e^{in\sigma t}. \quad (35)$$

Für  $z=0$  erhalten wir dann

$$u_1 = \sum k_n e^{in\sigma t} = k(t)$$

und für  $z=h$

$$u_1 = 0.$$

Die Lösung unserer Wärmeleitungsaufgabe lautet jetzt

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} k_n \Phi(z) e^{in\sigma t} \\ &+ \int_0^h ds \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(s) \Gamma_n(z, s) e^{in\sigma t}. \end{aligned} \quad (36)$$

### 3. Numerische Berechnung der Lösung.

Um die Lösung wirklich berechnen zu können, gilt es, die Funktionen  $\Phi_n$  und  $\Gamma_n$  zu finden.  $\Phi_n$  ist eine Lösung der Differentialgleichung (29).

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{d\Phi}{dz} \right) - in\sigma\Phi = 0$$

mit den Grenzbedingungen (30)

$$\Phi_n = 1, \quad z=0 \quad \Phi_n = 0, \quad z=h.$$

Wir werden hier speziell den Fall  $h = \infty$  näher betrachten. Für sehr große Werte von  $z$  hat man gewöhnlich  $\eta = \text{konst.}$  Es sei nun  $z = h_1$  ein Wert von  $z$  so groß, daß man mit einem konstanten Wert von  $\eta$  rechnen kann. Wir haben dann die Lösung

$$\Phi = e^{-\sqrt{\frac{n\sigma}{2\eta}}(1+i)z} \quad (37)$$

Dies muß also eine asymptotische Formel für die Funktion  $\Phi_n$  sein, und es gilt dann für  $z > h_1$

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\sqrt{\frac{n\sigma}{2\eta}}(1+i)\Phi. \quad (38)$$

Wir führen nun eine neue Veränderliche ein, statt  $z$  durch die Formel

$$x = h_1 - z$$

und teilen das Integrationsintervall von  $x=0$  bis  $x=h_1$  in gleiche Teile von der Größe  $\Delta x$ , ferner sei

$$x_m = m \Delta x.$$

Wir setzen jetzt

$$\eta \frac{d\Phi}{dx} = \psi \quad (39)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = i n \sigma \Phi \quad (40)$$

und erhalten dann für  $\psi$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = i \frac{n\sigma}{\eta} \psi. \quad (41)$$

Diese Gleichung ist für numerische Integration besonders geeignet. Setzen wir

$$\psi(x_m) = \psi_m$$

und führen wir die folgenden Differenzbezeichnungen ein,

$$\psi_{m+1} - \psi_m = \Delta \psi_m, \quad \Delta \psi_{m+1} - \Delta \psi_m = \Delta^2 \psi_m, \quad (42)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} (\Delta x)^2 = \xi, \quad (43)$$

können wir die folgende einfache Integrationsformel anwenden

$$\Delta^2 \psi_{m-1} = \xi_m + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_{m-2}. \quad (44)$$

Die Anwendung dieser Formel setzt voraus, daß man die ersten Werte schon kennt. Den Wert von  $\psi_0$  können wir beliebig wählen, z. B.  $\psi_0 = 1$ .  $\psi_1$  können wir dann mit Hilfe der asymptotischen Formel berechnen

$$\psi_1 = \psi_0 e^{\sqrt{\frac{n\sigma}{2\eta}}(1+i)\Delta x} \quad (45)$$

Mit diesen Anfangswerten können wir dann die Integrationen ausführen, und nachher erhält man  $\Phi$  durch eine Quadratur. Es ist

$$\Phi = \frac{1}{in\sigma} \frac{d\psi}{dx} \quad (46)$$

oder

$$\Phi = \frac{1}{in\sigma} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)_0 + \frac{1}{in\sigma} \int_0^x \frac{d^2\psi}{dx^2} dx. \quad (47)$$

Mit Hilfe der Simpsonschen Formel findet man

$$\Phi_{m+1} = \Phi_{m-1} + \frac{1}{3in\sigma\Delta x} [\xi_{m+1} + 4\xi_m + \xi_{m-1}]. \quad (48)$$

Um der Bedingung

$$\Phi = 1, \quad x = h_1$$

zu genügen, braucht man nur die berechneten Werte durch  $\Phi(h_1)$  zu dividieren.

Bei der praktischen Ausführung der Berechnung muß man natürlich den Realteil und den Imaginärteil besonders berechnen, und hat dann zwei simultane Differentialgleichungen zu integrieren. Die entsprechenden Integrationsformeln erhält man, indem man die obigen Formeln in ihre Realteile und Imaginärteile zerlegt.

Weiter gilt es nun, die Funktion  $\Gamma_n(z, s)$  zu berechnen. Wir haben für diese Funktion die folgenden Formeln gefunden

$$\Gamma(z, s) = \frac{w_2(s)}{w_2(h)} [w_1(z)w_2(h) - w_2(z)w_1(h)], \quad s < z$$

$$\frac{w_2(z)}{w_2(h)} [w_1(s)w_2(h) - w_2(s)w_1(h)], \quad s > z$$

dabei sind  $w_1$  und  $w_2$  Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dw}{dz} \right) - in\sigma w = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 0,$$

$$\eta \frac{dw_1}{dz} = 0, \quad \eta \frac{dw_2}{dz} = 1 \quad \text{für } z = 0.$$

Wenn  $h = \infty$  ist, müssen wir  $w_1(\infty) = 0$  setzen anstatt

$$\eta \frac{dw_1}{dz} = 0, \quad z = 0$$

$w_1(z)$  ist somit mit unserer Funktion  $\Phi_n(z)$  identisch. Die Formel für  $\Gamma_n(z, s)$  wird jetzt

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z, s) &= \Phi_n(z)w_2(s), \quad s < z \\ &= \Phi_n(s)w_2(z), \quad s > z. \end{aligned} \quad (49)$$

Um  $w_2$  zu berechnen, setzen wir, wie früher

$$\eta \frac{dw_2}{dz} = \omega(z), \quad \frac{d^2\omega}{dz^2} = \frac{in\sigma}{\eta} \omega.$$

Die Integration geschieht jetzt nach der früher gegebenen Integrationsformel, nur daß die Anfangswerte nicht in derselben Weise berechnet werden können. Es ist jetzt

$$\omega_0 = 1, \quad \left( \frac{d\omega}{dz} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{d^2\omega}{dz^2} \right)_0 = \frac{in\sigma}{\eta}$$

und

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega'_0(\Delta x) + \omega''_0 \frac{(\Delta x)^2}{2} + \omega'''_0 \frac{(\Delta x)^3}{6}.$$

Wir wählen zuerst  $\Delta x$  so klein, daß die drei ersten Glieder genügen und haben dann

$$\omega_1 = 1 + \frac{in\sigma}{2\eta} (\Delta x)^2.$$

Wenn die Integration mit diesen Anfangswerten einige Schritte gemacht hat, können wir das Intervall verdoppeln und so mit der Integration fortfahren. Die Berechnung von

$$\int_0^h \Gamma_n(z, s) f_n(s) ds$$

wird dann mit Hilfe von Simpsons Formel ausgeführt. Zwar ist das Integrationsintervall unendlich, aber die Funktion  $f_n(s)$  nimmt mit  $s$  sehr rasch ab, so daß man nur bis zu einem verhältnismäßig kleinen Werte zu integrieren braucht.

Es kann bemerkt werden, daß die obige Integrationsformel und die Simpsonsche Formel genau denselben Genauigkeitsgrad besitzen. Der Fehler ist mit  $(\Delta x)^5$  proportional.

Um die reelle Form der Lösung zu erhalten, setzen wir

$$2k_n = a_n - i b_n, \quad 2f_n(s) = c_n(s) - i d_n(s) \\ \Phi_n(z) = \varphi_n(z) - i \psi_n(z), \quad \Gamma_n(z, s) = G_n(z, s) - i H_n(z, s).$$

Fassen wir dann die Glieder für  $n$  und  $-n$  zusammen, so erhalten wir

$$u = u_0 + \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \varphi_m - b_m \psi_m) \cos n \sigma t + (a_m \psi_m + b_m \varphi_m) \sin n \sigma t \\ + \int_0^h ds \left[ \frac{c_0}{2} \Gamma_0(z, s) + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m G_m - d_m H_m) \cos n \sigma t + (c_m H_m + d_m G_m) \sin n \sigma t \right]. \quad (50)$$

mit

$$u_0 = v \frac{\int_0^z \frac{ds}{\eta(s)}}{\int_0^h \frac{ds}{\eta(s)}}$$

und

$$\Gamma_0(z, s) = g \int_0^s \frac{ds}{\eta(s)} \int_z^h \frac{ds}{\eta(s)} \quad s < z \\ = g \int_0^z \frac{ds}{\eta(s)} \int_s^h \frac{ds}{\eta(s)} \quad s > z, \quad \frac{1}{g} = \int_0^h \frac{ds}{\eta(s)}.$$

Sehen wir von dem letzten Gliede ab, das gewöhnlich nur klein ist, so haben wir die Lösung

$$u = u_0 + \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \varphi_n - b_n \psi_n) \cos n \sigma t + (a_n \psi_n + b_n \varphi_n) \sin n \sigma t. \quad (51)$$

Die Größen

$$(a_n \varphi_n - b_n \psi_n), \quad a_n \varphi_n + b_n \psi_n$$

sind die Fourier-Koeffizienten für die Temperaturkurve in der Tiefe  $z$ . Wenn diese Temperaturkurve bekannt ist, so läßt sich der Temperaturleitungskoeffizient bestimmen. Es ist nämlich  $k_n \Phi_n$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{d\Phi}{dz} \right) - i n \sigma \Phi = 0. \quad (52)$$

Setzt man hier

$$k_n \Phi_n(z) = R_n e^{-i \delta_n} \quad (53)$$

erhält man

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dR_n}{dz} \right) - R_n \eta \left( \frac{d\delta_n}{dz} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d}{dz} \left( \eta R_n \frac{d\delta_n}{dz} \right) + \eta \frac{dR_n}{dz} \frac{d\delta_n}{dz} + n\sigma R_n = 0.$$
(54)

Nach Multiplikation mit  $R_n$  läßt sich die letzte Gleichung in folgender Form schreiben

$$\frac{d}{dz} \left( \eta R_n^2 \frac{d\delta_n}{dz} \right) + n\sigma R_n^2 = 0.$$
(55)

Wir integrieren diese Gleichung zwischen  $z$  und  $h$  und erhalten dann

$$\eta R_n^2 \frac{d\delta_n}{dz} = n\sigma \int_z^h R_n^2 dz$$

oder

$$\eta = \frac{n\sigma}{R_n^2 \frac{d\delta_n}{dz}} \int_z^h R_n^2 dz.$$
(56)

Die Anwendung dieser Formel ist nun einfach,  $R_n$  ist die Amplitude der  $n$ -ten Temperaturwelle und  $\delta_n$  die Phasenverschiebung mit der Tiefe. Wenn diese Größen für eine hinreichende Anzahl Tiefen bekannt sind, zeichnet man eine Kurve für  $R_n$  und bestimmt daraus Werte von  $R$  durch graphische Interpolation, z. B. für jede 10 m Tiefe, und berechnet das Integral

$$\int_z^h R_n^2 dz$$

mit Hilfe von Simpsons Formel. Dann zeichnet man eine Kurve für  $\delta$  und bestimmt  $\frac{d\delta}{dz}$  durch graphische oder numerische Differentiation. Theoretisch gibt dann jedes Paar von Fourier-Koeffizienten eine unabhängige Bestimmung von  $\eta$ . Die vorliegenden Kurven sind jedoch zu unsicher, um eine solche Bestimmung für andere als die ersten zu erlauben.

Wir können in unserem Falle annehmen, daß die Jahresschwankung in 200 m beinahe verschwunden ist. Aus den Temperaturkurven für 0, 25, 50 und 100 m finden wir

$z$	$R_1$	$\delta_1$
0	3,78	225,1°
25	3,24	235,2°
50	1,24	254,7°
100	0,23	289,3°

Es zeigt sich hier, daß  $\delta$  sehr regelmäßig mit der Tiefe wächst, so daß die Bestimmung von  $\frac{d\delta}{dz}$  keine Schwierigkeiten macht. Abb. 2 gibt die entsprechenden Kurven wieder. Mit diesen Zahlen berechnet man die folgenden Werte von  $\eta_1$ .

$z$	0	20	40	60	80	100
$\eta_1$	16,4	3,6	1,8	2,4	3,2	3,8.

Man findet so einen verhältnismäßig großen Wert an der Oberfläche, dieser fällt aber schnell auf ein Minimum in der Nähe von 40 m und steigt dann etwas, um den Wert 3,8 in den tieferen Schichten anzunehmen.



Man kann jetzt versuchen, mit Hilfe der gefundenen Zahlen den Temperaturgang z. B. in 50 m zu berechnen. Anstatt die Koeffizienten durch die Fourierschen Integrale

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T k(t) \cos n\sigma t d\tau, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T k(t) \sin n\sigma t dt,$$

zu berechnen, ist es vorteilhaft, folgende Berechnungsmethode zu benutzen. Teilt man das Jahr in 24 Teile, so hat man

$$a_n = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{23} k_i \cos 15ni, \quad b_n = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{23} k_i \sin 15ni.$$

Die Fourierkoeffizienten bestimmt man demnach durch gewöhnliche harmonische Analyse.

Die berechnete Temperaturkurve sieht man in Abb. 3, A. Ein Vergleich mit der beobachteten Temperaturkurve ergibt gewisse Unstimmigkeiten; so zeigt sich, daß die Temperatursteigerung zu spät anfängt; auch zeigt die Kurve keine Spur von der ausgesprochenen Asymmetrie des beobachteten Temperaturgangs. Es erübrigt noch, diese Verschiedenheit zu erklären.

#### 4. Wärmeleitung mit veränderlichem Wärmeleitungskoeffizient.

Es ist klar, daß die Stabilität der Wassermassen im Laufe des Jahres veränderlich ist, und man muß demnach erwarten, daß der Temperaturleitungskoeffizient mit der Zeit veränderlich ist. Wahrscheinlich hängt diese Veränderlichkeit noch von der Tiefe ab, wir können jedoch einige der wichtigsten Eigenschaften der veränderlichen Temperaturleitung finden, auch wenn wir der Einfachheit halber annehmen, daß die jährliche Schwankung in allen Tiefen dieselbe ist. Wir setzen darum für  $\nu$  einen Ausdruck von der Form

$$\nu(t) \eta(z), \quad (57)$$

wo  $\nu(t)$  eine periodische Funktion ist. Die Wärmeleitungsgleichung nimmt dann die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f(z, t). \quad (58)$$

Um diese Gleichung zu integrieren, führen wir eine neue Veränderliche anstatt  $t$  ein. Wir setzen

$$t_1 = \int_0^t \nu(t) dt. \quad (59)$$

Der Zeitfaktor kann dabei so gewählt werden, daß

$$\int_0^T \nu(t) dt = 1 \quad \text{ist.}$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{f(z, t)}{\nu(t)}. \quad (60)$$

Es werden dann  $k(t)$  und  $\frac{f(z, t)}{\nu(t)}$  Funktionen von  $t_1$  sein und zwar periodische Funktionen mit derselben Periode  $T$ . Die Integration geschieht jetzt genau wie früher. Wir setzen

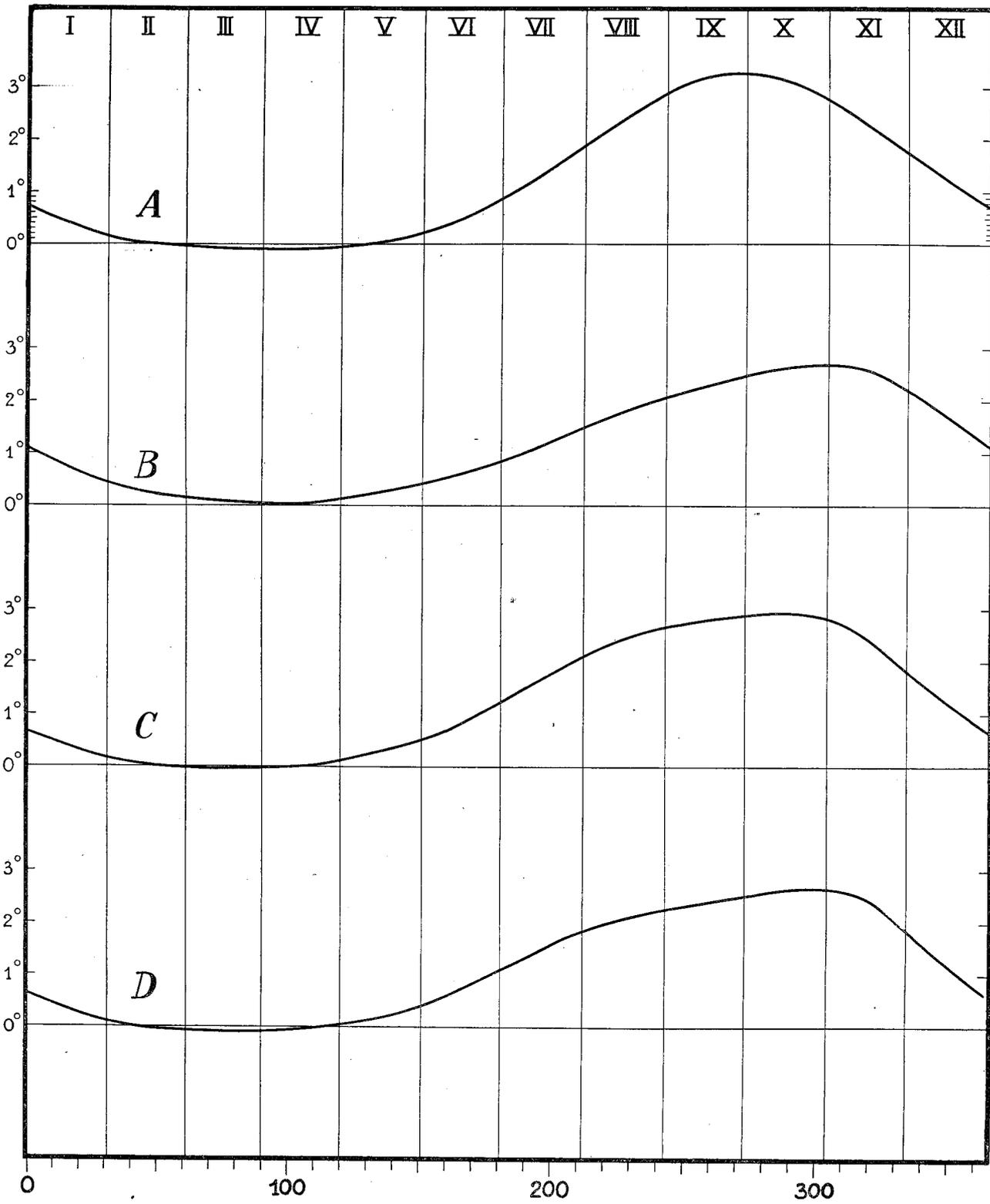


Fig. 3.

$$k(t) = \sum k_n e^{in\sigma t_1} \quad (61)$$

und

$$\frac{f(z, t)}{v(t)} = \sum f_n e^{in\sigma t_1}. \quad (62)$$

Die Koeffizienten bestimmt man dann durch die Integrale

$$k_n = \frac{1}{T} \int_0^T k(t) e^{-in\sigma t_1} dt_1$$

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(z, t)}{v(t)} e^{-in\sigma t_1} dt_1.$$

Als erstes Beispiel habe ich

$$v = 1 + \gamma \cos(\sigma t - \zeta) \quad (63)$$

gewählt. Es wird dann

$$\sigma t_1 = \sigma t - \zeta + \gamma \sin(\sigma t - \zeta)$$

oder

$$\sigma t_1 = \tau + \gamma \sin \tau. \quad (64)$$

Um die Fourier-Koeffizienten zu berechnen, können wir dann folgendermaßen verfahren. Wir lösen die letzte Gleichung nach  $\tau$  auf. Diese Gleichung erinnert an die Keplersche Gleichung und besitzt die Auflösung

$$\tau = \sigma t_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(n\gamma)}{n} \sin n\sigma t_1, \quad (65)$$

wo  $J_n$  die Besselsche Funktion der  $n$ -ten Ordnung ist.

Für größere Werte von  $\gamma$  etwa  $\gamma > 0.5$  konvergiert jedoch die Reihe so langsam, daß es vorteilhafter ist, die Gleichung durch direktes Probieren aufzulösen. Schreibt man sie etwa in der Form

$$\tau = \sigma t_1 - \gamma \sin \tau,$$

kann man durch fortschreitende Näherungen recht schnell an das Ziel kommen. Man findet so die Werte von  $\tau$ , die  $\sigma t_1 = 0, 15^\circ, 30^\circ, \dots$  entsprechen. Für die entsprechenden Werte von  $t$  findet man  $k(t)$  aus der Temperaturkurve, und man hat dann

$$a_n = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{23} k_j \cos 15jn$$

$$b_n = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{23} k_j \sin 15jn$$

$$2k_n = a_n - ib_n$$

wie früher.

Ich habe nun für  $\gamma = 0,6$  mehrere Beispiele durchgerechnet

1) 
$$v = 1 + 0,6 \cos(\sigma t - 30^\circ).$$

Wir finden in diesem Falle

$z$	0	25	50	100
$R$	2,80	2,38	1,21	0,38
$\delta$	189,4°	201,6°	218,1°	363,8°

Mit diesen Werten findet man

$z$	0	20	40	60	80	100
$\eta$	12	4,8	3,0	2,50	2,32	2,24.

Diese Werte geben auch an der Oberfläche einen verhältnismäßig großen Wert für  $\eta$ . Ich habe nun eine Temperaturkurve für 50 m berechnet. Diese zeigt sich schief, aber die Temperatursteigerung kommt zu spät. Aus der Form der Kurve sieht man jedoch, daß die Veränderlichkeit der Temperaturleitungsfähigkeit im Laufe des Jahres die Asymmetrie der Kurve sehr wohl erklären kann. Mit demselben Werte von  $\gamma$  habe ich andere Beispiele berechnet, wobei für den Phasenwinkel die Werte  $\zeta=43^\circ$ ,  $53^\circ$  und  $67^\circ$  gewählt wurde. Zwei von diesen Temperaturkurven sind in Abb. 3, B, und C wiedergegeben. Aus diesen Kurven sieht man, daß der Wärmeleitungskoeffizient noch zu früh abnimmt, und dementsprechend setzt die Temperatursteigerung zu spät ein. Ich habe darum noch ein Beispiel berechnet, wo die Jahresschwankung der Wärmeleitungsfähigkeit nicht durch ein einfaches Kosinus-Gesetz gegeben ist. Bei der Betrachtung der Kurven versteht man, daß der Wärmeleitungskoeffizient im ganzen Winter ziemlich groß ist, er hält sich dann ungefähr auf demselben Wert bis Mitte Juni; dann fällt er schnell auf einen kleineren Wert, um am Ende des Jahres wieder anzusteigen.

Ich habe nun die folgende Zeitabhängigkeit versucht

$$\nu = \nu_0 (1 + 0.7 \cos [\sigma t - \zeta - 0.7 \sin (\sigma t - \zeta)])$$

mit  $\zeta = 67^\circ$ .

Der Sinus im Argumente bewirkt, daß die Kosinus-Kurve deformiert wird, so daß das Maximum lang und flach, das Minimum dagegen mehr zusammengedrückt wird.

Wir setzen wie früher

$$t_1 = \nu_0 \int_{t_0}^t (1 + \gamma \cos [\sigma t - \zeta - \varrho \sin (\sigma t - \zeta)]) dt,$$

es ist dann

$$\begin{aligned} T &= \nu_0 \int_{t_0}^{t_0+T} (1 + \gamma \cos [\sigma t - \zeta - \varrho \sin (\sigma t - \zeta)]) dt \\ &= \nu_0 \left( T + \frac{\gamma}{\sigma} J_1(\varrho) \right) \end{aligned}$$

oder

$$\nu_0 = \frac{\sigma T}{\sigma T + \gamma J_1(\varrho)} = \frac{2\pi}{2\pi + \gamma J_1(\varrho)}$$

Da  $t_1$  nicht in endlicher Form ausgedrückt werden kann, müssen wir das Integral numerisch auswerten. Wir berechnen  $\sigma t_1$  für  $\sigma t - \zeta = 0, 15^\circ, 30^\circ \dots 345^\circ$ . Mit  $\sigma t - \zeta$  als Abscisse zeichnen wir dann eine Kurve für  $\sigma t_1$ , und umgekehrt können wir aus dieser Kurve die Werte von  $t$  bestimmen, die  $\sigma t_1 = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ \dots$  entsprechen.

Für diese Werte von  $t$  bestimmen wir  $k(t)$  aus der Temperaturkurve. Die Fourier-Koeffizienten bestimmen wir nachher durch harmonische Analyse. Ich habe  $\gamma = \varrho = 0.7$  gewählt. Die entsprechende Kurve zeigt Abb. 3, D.

Diese Kurve zeigt große Ähnlichkeit mit der beobachteten. Nach dem Minimum im Frühling steigt die Temperatur verhältnismäßig rasch an; dann aber steigt die Temperaturkurve nur langsam weiter um zuletzt am Ende des Jahres schnell zu fallen. Die Eigentümlichkeiten der beobachteten Temperaturkurve kann demnach wenigstens qualitativ gut erklärt werden. Eine genauere Übereinstimmung zu suchen wäre verfehlt, denn die Beobachtungen im Herbst und Winter sind ja noch recht spärlich, so daß die Temperaturkurve für diesen Zeitraum recht unsicher ist.

Unsere Untersuchungen zeigen, daß die Wärmeleitung durch Turbulenz sehr stark von der Stabilität abhängt. Die Wärmeleitungsfähigkeit ändert sich im Laufe des Jahres

innerhalb recht weiter Grenzen. Auch mit der Tiefe ist die Änderung groß. Der Wert steigt aber nicht über etwa 20 Einheiten (C. G. S.).

Ich habe früher nach einer sehr ähnlichen Methode den Reibungskoeffizienten bestimmt in einem Falle, wo ein stationärer Windstrom vorlag. Dieser zeigte sich auch von der Tiefe abhängig, hatte jedoch an der Oberfläche den Wert 385 C. G. S. Dies deutet darauf hin, daß Wärmeleitungs- und Reibungskoeffizient sehr verschieden sein können. Die meisten Untersuchungen über Reibung im Meere haben Werte um etwa 200 gegeben.

Eine einfache Überlegung zeigt auch, daß keine Identität zwischen den beiden Größen vorliegen kann. Ekman hat den Begriff Reibungstiefe eingeführt. Es ist dies die Tiefe, wo der Windstrom auf  $e^{-\pi}$  seines Wertes an der Oberfläche gesunken ist. Nehmen wir einen konstanten Wert des Wärmeleitungs- und Reibungskoeffizienten an, so ist das erste Glied in der Fourierentwicklung

$$R_1 e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\eta}} z} \cos \left( \rho t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\eta}} z - \zeta \right).$$

Setzen wir

$$\sqrt{\frac{\sigma}{2\eta}} D = \pi,$$

haben wir

$$D = \pi \sqrt{\frac{2\eta}{\sigma}}.$$

Es ist aber

$$\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$$

und demnach

$$D \approx 10^4 \sqrt{\eta}.$$

Wenn  $\eta$  etwa den Wert 200 haben sollte, würde die Jahresschwankung erst in 1400 m Tiefe verschwunden sein. Keine Temperaturmessungen im Meere deuten darauf hin, daß die Jahresschwankung mehr als 5 bis 6 Hundert m in die Tiefe geht und daß  $\eta$  somit den Wert 40 nur selten übersteigt. In unserem Falle haben wir gesehen, daß nur an der Oberfläche so große Werte wie 20 in Frage kommen.

