

AEROLOGISCHE DIAGRAMMPAPIERE

VON ANFINN REFSDAL

TEIL I

VORWORT

In den letzten Jahren ist eine Reihe verschiedener Verfahren zur einfachen und schnellen Bearbeitung aerologischer Aufstiege entwickelt worden. Aber fast jeder Verfasser hat sein eigenes Diagrammpapier konstruiert, was das Vergleichen und Zusammenarbeiten der Ergebnisse ausserordentlich erschwert. Die Verfahren sind teilweise auch recht zeitraubend, was die tägliche Verwendung in dem Wetterdienst behindert. Wenn man beispielsweise 50 bis 100 tägliche aerologische Aufstiege zur Verfügung hat, was in Europa wahrscheinlich recht bald der Fall sein wird, sind möglichst einfache und schnelle Arbeitsverfahren dringend notwendig, die sämtliche Aufstiege in kurzer Zeit durchzuarbeiten gestatten. Die vorliegende Arbeit versucht vor allem ein möglichst schnelles und übersichtliches aerologisches Arbeitsverfahren darzustellen. Es ist ein Diagrammpapier konstruiert worden, das sehr einfach und schnell auf rein graphischem Wege folgende Berechnungen gestattet:

1. Solenoidberechnungen nach V. Bjerknes.
2. Energetische Berechnungen nach Margules und Shaw.
3. Höhenberechnungen.
4. Berechnung von spezifischen Volumen.
5. Berechnung von Äquivalenttemperaturen.
6. Berechnung von charakteristischen Kurven nach Rossby.

Dieses neue Diagrammpapier, das ich «Aerogramm» genannt habe, hat so viele Verwendungsmöglichkeiten, dass es die meisten gewöhnlichen Diagrammpapiere und Tabellen im praktischen Dienst überflüssig macht.

Teil I ist hauptsächlich in den Jahren 1932—35 geschrieben worden, dagegen ist § 6 über die Pseudo-Temperatur erst im Februar 1937, als die Abhandlung im Druck war, geschrieben.

Die sprachliche Bearbeitung hat Eberhard Günther Kern vorgenommen, wofür ich ihm herzlich danke.

§ 1. Die Verwendung des Druck-Volumen-Diagramms bei Zirkulationsbetrachtungen nach V. Bjerknes und bei energetischen Betrachtungen nach Margules und Shaw.

Wir betrachten eine zusammenhängende Kette von Flüssigkeitspartikelchen, die eine geschlossene Kurve s bilden. Jedes dieser Partikelchen hat eine Geschwindigkeit \mathbf{v} als Vektor. Wir betrachten die Grösse

$$C = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \dots \dots \dots (1)$$

wo $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ das skalare Produkt aus der Geschwindigkeit \mathbf{v} und dem Linienelement $d\mathbf{s}$ der betrachteten Kurve ist. Wenn die Integration sich über die ganze Kurve s erstreckt, stellt nach Lord Kelvin C die Zirkulation der Kurve s dar. (V. Bjerknes 1900).

Die nach der Zeit differenzierte Gleichung 1 ergibt:

$$\frac{dC}{dt} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{s})}{dt}$$

Die Differentiation nach der Zeit und die Aufteilung der Kurve s in Linienelementen sind voneinander unabhängige Vorgänge. Die Reihenfolge der Differentiationen ist daher gleichgültig, und es ergibt sich:

$$\int \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{s})}{dt} = \int \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right) = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Wenn die Integration sich über die ganze Kurve erstreckt, ergibt sich:

$$\frac{dC}{dt} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} \dots \dots \dots (2)$$

Die Grösse $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s}$ lässt sich mittels der vereinfachten hydrodynamischen Grundgleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \Phi + \alpha \nabla p = 0 \dots \dots \dots (3)$$

umformen. Φ bedeutet hier das Schwerepotential, α das spezifische Volumen und p den Druck. Da wir das Reibungsglied und das Glied der ablenkenden Kraft der Erdrotation vernachlässigt haben, betrachten wir also nur absolute und reibungslose Bewegungen.

Mittels Gleichung 3 ergibt sich:

$$\int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \int \nabla \Phi \cdot d\mathbf{s} + \int \alpha \nabla p \cdot d\mathbf{s} = 0, \dots (4)$$

wo die Integration sich über die ganze Kurve s erstreckt. $\nabla \Phi \cdot d\mathbf{s}$ bedeutet die Änderung des Schwerepotentials und $\nabla p \cdot d\mathbf{s}$ die Änderung des Druckes auf der Strecke $d\mathbf{s}$, und aus Gleichung 4 ergibt sich:

$$\int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \int d\Phi + \int \alpha dp = 0.$$

$d\Phi$ ist ein totales Differential, und das Integral eines derartigen Gliedes über eine geschlossene Kurve ist gleich Null. Die Gleichung 2 kann demnach folgenderweise geschrieben werden:

$$\frac{dC}{dt} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \int \alpha dp, \dots \dots (5)$$

wo die Integration sich über die ganze Kurve s erstreckt. Das Integral $-\int \alpha dp$ lässt sich auf einem Diagrammpapier mit linearer Druckskala und linearer Volumenskala direkt graphisch integrieren. Man

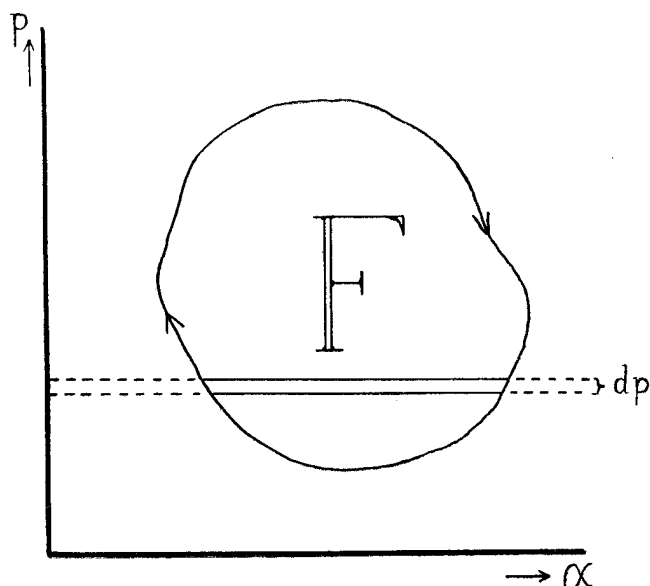


Abb. 1.

sieht ohne weiteres (Abb. 1), dass $-\int adp$ durch die umschlossene Fläche F dargestellt ist; es ergibt sich:

$$\frac{dC}{dt} = kF, \dots \dots \dots (6)$$

wo k eine von dem Masstab des Diagrammpapieres abhängige Konstante ist. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Der auf die Zeiteinheit bezogene Zuwachs der Zirkulation einer beliebigen geschlossenen Kurve von Flüssigkeitspartikelchen ist auf einem Druck-Volumen-Diagramm durch die von der Kurve umschlossene Fläche dargestellt.

Dieser Satz entspricht vollständig dem Satz von V. Bjerknes (1900), wonach der Zuwachs der Zirkulation je Zeiteinheit gleich der Anzahl der von der Kurve umschlossenen Solenoide ist. Man berechnet oder misst aber bedeutend einfacher und schneller nur die Grösse der Fläche F , die die Solenoidanzahl direkt angibt.

Das Druck-Volumen-Diagramm eignet sich bekanntlich besonders gut für energetische Betrachtungen. Wie die Lehrbücher der Thermodynamik lehren, wird bei reibungslosen und quasistatischen Kreisprozessen je Masseneinheit nach aussen eine Arbeit gleich der umschlossenen Fläche geleistet. Wenn aber die Kreisprozesse weder reibungslos noch quasistatisch sind, wissen wir nur, dass die nach aussen abgegebene Arbeit kleiner ist. Die gesamte ausgeführte Arbeit ist aber auch in diesem Falle durch die auf dem Druck-Volumen-Diagramm umschlossene Fläche dargestellt. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre, der für Gase und Flüssigkeiten so lautet:

$$dq = du + pda, \dots \dots \dots (7)$$

wo q Wärmemenge und u innere Energie sind. Wir betrachten jetzt eine Masseneinheit, die einen Kreisprozess durchmacht und integrieren die Gleichung $dq = du + pda$ über den Kreisprozess. Dabei fällt das Glied $\int du$ fort, weil du ein totales Differential ist. Aus Gleichung 7 ergibt sich demnach:

$$\int dq = \int pda = kF, \dots \dots \dots (8)$$

wo k eine Konstante ist und F die auf einem Druck-Volumen-Diagramm umschlossene Fläche ist. Die Wärmemenge, die bei einem Kreisprozess je Masseneinheit in Arbeit übergeht, ist demnach auf einem Druck-Volumen-Diagramm durch die umschlossene

Fläche F gegeben. Bei reibungslosen und quasistatischen Kreisprozessen wird diese Arbeit nur nach aussen abgegeben. Das Druck-Volumen-Diagramm gestattet in dieser Weise sowohl energetische Berechnungen wie Solenoidberechnungen. So ist es gelungen die beiden Hauptrichtungen der atmosphärischen und ozeanischen Thermodynamik demselben Verfahren anzupassen.

§ 2. Flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms.

Es ist oft unpraktisch, auf einem Druck-Volumen-Diagramm zu arbeiten. In der Atmosphäre und im Meer werden z. B. nicht das spezifische Volumen und im Meer auch nicht der Druck direkt gemessen. Es ist daher vorteilhaft, flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms zu konstruieren, die andere Koordinaten benutzen. Man kennt schon zwei derartige Transformationen:

1. Das Temperatur-Entropie-Diagramm, das bei thermodynamischen Betrachtungen oft gut geeignet ist. Das Tephigramm von Shaw ist ein derartiges Diagrammpapier, das atmosphärischen Verhältnissen angepasst ist. (Shaw 1930.)

2. Das Temperatur-logDruck-Diagramm (Emagramm), das für atmosphärische Verhältnisse gut geeignet ist. (Refsdal 1930.) Wir werden jetzt einige einfache flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms untersuchen, um energetische Diagrammpapiere zu finden, die für die Atmosphäre besonders geeignet sind.

Der Zustand eines Partikelchens kann durch eine Reihe von Koordinaten ausgedrückt werden. Mögliche Koordinaten sind z. B. Geschwindigkeit v , Druck p , spezifisches Volumen α , Dichte ρ , absolute Temperatur T , Geopotential Φ , und Entropie S . In den verschiedenen Systemen sind diese Koordinaten durch verschiedene Gleichungen verknüpft, und wir werden diese Gleichungen benutzen, um flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms zu finden. Die Gleichungen, die die verschiedenen Koordinaten und dadurch die verschiedenen Transformationen verknüpfen, gelten unter bestimmten Voraussetzungen, die wir näher betrachten werden.

Zwischen α und ρ besteht die Gleichung $\alpha = \frac{1}{\rho}$, die definitionsgemäss unter allen Umständen gilt.

Wenn man daher in einem Druck-Volumen-Diagramm die Koordinaten des spezifischen Volumens mit den inversen Werten bezeichnet, erhält man ein Diagramm mit Druck und Dichte als Koordinaten, das genau dieselben energetischen Eigenschaften wie das Druck-Volumen-Diagramm hat und demnach allgemein gültig ist.

Wir betrachten dann einen Kreisprozess, der auf einem Druck-Volumen-Diagramm die kleine Elementarfläche $dp \cdot da$ umschliesst und bei dem somit je Masseneinheit eine entsprechende Arbeit geleistet wird. Nach dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre ergibt sich:

$$dp \cdot da = dq \frac{dT}{T}, \quad \dots \dots \dots (13)$$

wo dq die zugeführte oder entfernte Wärme bezeichnet.

Bei umkehrbaren Prozessen — und wir betrachten nur solche — ist $dS = \frac{dq}{T}$. Wir können dann die Gleichung 13 folgendermassen schreiben:

$$dp \cdot da = dS \cdot dT \quad \dots \dots \dots (14)$$

dS ist wie bekannt ein totales Differential, und die Gleichung 14 zeigt daher, dass man ein Druck-Volumen-Diagramm flächentreu in ein Entropie-Temperatur-Diagramm transformieren kann. Zwei entsprechende Flächenelemente sind nämlich immer gleich gross, und da nun jede Fläche als Summe (Doppelintegral) solcher Flächenelemente aufgefasst werden kann, wird also auch jede Fläche des einen Diagramms einer gleich grossen Fläche des anderen Diagramms entsprechen. Die Gleichung 14 gibt daher die theoretische Grundlage des Tephigramms von *Shaw*.

Wir betrachten dann ideale Gase. Die Zustandsgleichung $pa = RT$, wo R die Gaskonstante ist, ergibt durch Ableitung:

$$pda + adp = RdT \quad \dots \dots \dots (15)$$

Wenn der Druck konstant ist, ergibt diese Gleichung für jeden Druck $da = \frac{RdT}{p}$. Die Einsetzung dieses Wertes in das Flächenelement $dp \cdot da$ ergibt:

$$dp \cdot da = RdT \cdot d(\log p) \quad \dots \dots \dots (16)$$

Wenn wir die Konstante R nicht berücksichtigen, sehen wir, dass sich das Flächenelement $dp \cdot da$ in das Flächenelement $dT \cdot d(\log p)$ umtransformieren lässt. Ein Diagrammpapier mit linearer Temperatur-

skala und logarithmischer Druckskala stellt demnach bis auf den konstanten Faktor R eine flächentreue Transformation des Druck-Volumen-Diagramms dar. Die Gleichung 16 ergibt daher die theoretische Grundlage des Emagramms. (Dass man in der Gleichung 15 den Druck konstant setzt, bedeutet, dass man auf dem Druck-Volumen-Diagramm die Flächenelemente längs der Drucklinien zählt.)

Wenn man in Gleichung 15 das Volumen konstant hält, ergibt sich bei jedem Volumen $dp = -\frac{RdT}{a}$.

Die Einsetzung dieses Wertes in das Flächenelement $dp \cdot da$ ergibt:

$$dp \cdot da = RdT \cdot d(\log a) \quad \dots \dots \dots (17)$$

Diese Gleichung zeigt, dass ein Druck-Volumen-Diagramm sich bis auf einen konstanten Faktor flächentreu in ein Temperatur-logVolumen-Diagramm transformieren lässt.

Die Gleichung 17 lässt sich weiter umformen. Wir haben:

$$d(\log a) = d\left(\log \frac{1}{\rho}\right) = -d(\log \rho) \quad \dots \dots \dots (18)$$

Das ergibt:

$$dp \cdot da = -RdT \cdot d(\log \rho) \quad \dots \dots \dots (19)$$

Man sieht daraus, dass das Druck-Volumen-Diagramm sich bis auf einen konstanten Faktor flächentreu in ein Temperatur-logDichte-Diagramm transformieren lässt. Die Diagrammpapiere, die nach den Gleichungen 16, 17 und 19 konstruiert sind, haben für ideale Gase genau dieselben energetischen Eigenschaften wie das Druck-Volumen-Diagramm.

Es ist uns in dieser Weise gelungen, 6 verschiedene Diagrammpapiere zu konstruieren, worauf sich Zirkulationsbetrachtungen nach *V. Bjerknes* und energetische Betrachtungen im Sinne *Margules'* und *Shaws* durchführen lassen. Sämtliche Diagrammpapiere haben rechtwinklige Koordinaten. Wenn wir auf diesen Punkt verzichten, lassen sich unendlich viele flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms herstellen. Es ist in dieser Weise möglich, flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms zu konstruieren, die ganz besonderen Zwecken dienen. Für die Meteorologie hat die Aufzeichnung eines genauen und einfachen graphischen Verfahrens bei Höhenberechnungen der Aerologie grosse Bedeutung. Dies lässt sich, wie der nächste Abschnitt zeigt, auf einem der schiefwinklichen Diagrammpapiere verblüffend

einfach ermöglichen. Die Konstruktion dieses Diagrammpapieres ergibt sich aus Gleichung 16, die sich in folgender Weise umformen lässt:

$$dp \cdot da = R \frac{dT}{T} \cdot Td(\log p) = Rd(\log T) \cdot Td(\log p) \quad (20)$$

Diese Gleichung zeigt folgendes: Das Druck-Volumen-Diagramm lässt sich bis auf den konstanten Faktor R flächentreu in ein Diagrammpapier mit logarithmischer Temperaturskala und logarithmischer Druckskala umformen, wo die Drucklinien derartig divergieren, dass ihr gegenseitiger Abstand der absoluten Temperatur proportional ist. (Ein derartiges Diagrammpapier ist in Abb. 6 dargestellt.)

* * *

Das hier entwickelte Verfahren um Ermittlung flächentreuer Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms ist sehr einfach und übersichtlich, mathematisch aber nur wenig befriedigend. Wir werden daher untersuchen, wann diese Transformationen mathematisch genau sind.

Wir betrachten zwei Ebenen, die eine mit x, y und die andere mit p, a als die rechtwinkligen Punktkoordinaten. x und y sind voneinander unabhängige Funktionen von p und a . Wenn diese Funktionen eine stetige Abbildung der p, a -Ebene auf die x, y -Ebene vermitteln, so ist die Abbildung flächentreu, sobald die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial a}$$

den Zahlenwert 1 erhält.¹⁾ Wir untersuchen daher bei den verschiedenen besprochenen Transformationen, unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$\left| \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial a} \right| = 1 \quad \dots \quad (21)$$

gültig ist.

Wir setzen $x = T$ und $y = S$, d. h. wir betrachten das Entropie-Temperatur-Diagramm. Wie die Thermodynamik lehrt,²⁾ besteht auch bei nicht umkehrbaren Prozessen die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial S}{\partial a} - \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial a} = 1 \quad \dots \quad (22)$$

Dies zeigt, dass das S - T -Diagramm unter allen Umständen eine flächentreue Transformation des

p - a -Diagramms ist und folglich allgemeine Gültigkeit hat.

Wir betrachten dann das $T \log p$ - $\log T$ -Diagramm. Wir legen die Drucklinie p_0 längs der x -Achse und die Temperaturlinie T_0 längs der y -Achse. Da in Gleichung 20 die Konstante R vorkommt, führen wir auch eine Konstante k ein und schreiben

$$y = T \log \left(\frac{p_0}{p} \right) \quad \text{und} \quad x = k \log \left(\frac{T}{T_0} \right).$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \log \left(\frac{p_0}{p} \right) \frac{\partial T}{\partial p} - T \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial p},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \log \left(\frac{p_0}{p} \right) \frac{\partial T}{\partial a}, \quad \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial a}.$$

Die Einsetzung dieser Werte in Gleichung 21 ergibt:

$$\frac{k}{p} \frac{\partial T}{\partial a} = 1.$$

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre ergibt ganz allgemein für Gase und Flüssigkeiten

$$dq = c_v dT + p da \quad \dots \quad (23)$$

$$\text{oder } dq = c_p dT - a dp \quad \dots \quad (24)$$

Daraus ergibt sich wiederum:

$$(c_p - c_v) dT = d(a p) \quad \dots \quad (25)$$

Man ersieht daraus, dass die Gleichung $\left| \frac{k \partial T}{p \partial a} \right| = 1$

bei den Systemen stimmt, bei denen $(c_p - c_v)$ gleich der Konstante k ist. Bei diesen Systemen ist folglich das $T \log p$ - $\log T$ -Diagramm bis auf den konstanten Faktor $(c_p - c_v)$ eine flächentreue Transformation des Druck-Volumen-Diagramms.

In der obigen Weise können wir sämtliche besprochenen Transformationen untersuchen und finden, dass sie unter folgenden Bedingungen flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms darstellen:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| 1. p - $\frac{1}{\rho}$ -Diagramm | } | Allgemein gültig. |
| 2. S - T -Diagramm | | |
| 3. $\log p$ - T -Diagramm | } | Gültig für Gase und Flüssigkeiten, wenn $(c_p - c_v)$ konstant ist. |
| 4. $\log a$ - T -Diagramm | | |
| 5. $\log \rho$ - T -Diagramm | | |
| 6. $T \log p$ - $\log T$ -Diagramm | | |

Wenn man in der Atmosphäre die virtuellen Temperaturen benutzt, kann man sie als ein ideales Gas betrachten, wodurch $(c_p - c_v)$ konstant wird.

¹⁾ Vgl. G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig 1910. Verlag Veit & Comp.

²⁾ Vgl. O. D. Chwolson: Lehrbuch der Physik, III Band, 2. Abt. p. 90. Braunschweig 1923. Verlag Vieweg & Sohn.

Die Diagrammpapiere 1 bis 6 sind daher in der Atmosphäre allgemein brauchbar.

Wir betrachten nun die Verwendungsmöglichkeiten der verschiedenen Diagrammpapiere genauer. Das $p-\alpha$ -Diagramm eignet sich besonders in der Technik, weil man in einer thermodynamischen Maschine oft sehr leicht Druck und Volumen der arbeitenden Masse messen kann. Das $S-T$ -Diagramm eignet sich besonders bei theoretischeren thermodynamischen Betrachtungen, bei denen der Entropiebegriff sehr nützlich ist. Shaw hat das $S-T$ -Diagramm atmosphärischen Verhältnissen angepasst. Sein Tephigramm ist aber unpraktisch, weil Entropie sich nicht direkt messen lässt. In der Meteorologie eignet sich das $\log p-T$ -Diagramm besser, weil sowohl p wie T bei den aerologischen Aufstiegen gemessen werden. Am besten eignet sich aber das $T \log p - \log T$ -Diagramm, wie die nächsten Abschnitte zeigen.

Die übrigen Diagrammpapiere (1, 4 und 5) sind kaum von Bedeutung für die Meteorologie. Es ist aber möglich, dass sie auf anderen Gebieten, z. B. in der Ozeanographie, Verwendung finden können. Es ist auch möglich, dass für einen besonderen Zweck eine bestimmte Koordinate erwünscht ist. Es ist dann immer möglich, die andere Koordinate derart zu bestimmen, dass die zwei Koordinaten eine flächentreue Transformation des Druck-Volumen-Diagramms darstellen. Wenn z. B. y eine bekannte Funktion von p und α ist, erhält man mittels Gleichung 21 die andere Koordinate x durch die Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

§ 3. Graphische Höhenberechnungen.

Wenn die Atmosphäre sich im statischen Gleichgewicht befindet, besteht die Gleichung $d\Phi = -adp$. Diese Gleichung ist, wie Hesselberg und Friedmann zeigen (1914), bei makroskopischen Verhältnissen mit einer Genauigkeit von 1/1000 gültig. Wir integrieren diese statische Grundgleichung von einer Höhe mit Druck p_0 und Geopotential Φ_0 bis zu einer Höhe mit Druck p_1 und Geopotential Φ_1 . Dies ergibt:

$$\Phi_1 - \Phi_0 = - \int_{p_0}^{p_1} adp \dots \dots (26)$$

Wir zeichnen die geometrische Zustandskurve der betrachteten Atmosphäre auf einem Druck-Volumen-Diagramm ein (Abb. 2). Man sieht ohne weiteres ein, dass hier $-\int_{p_0}^{p_1} adp$ durch die Fläche

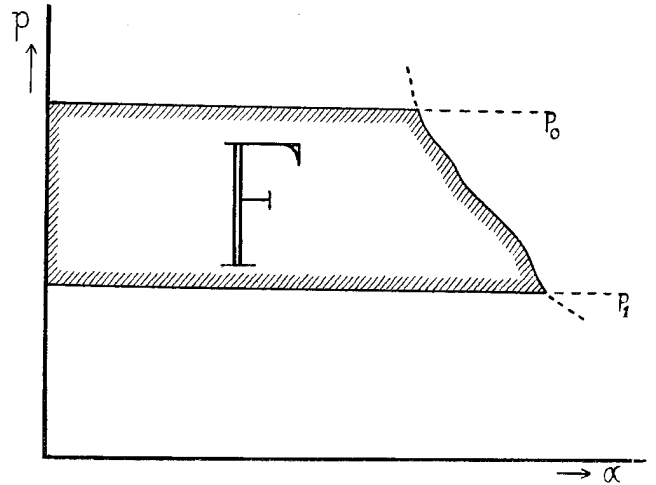


Abb. 2.

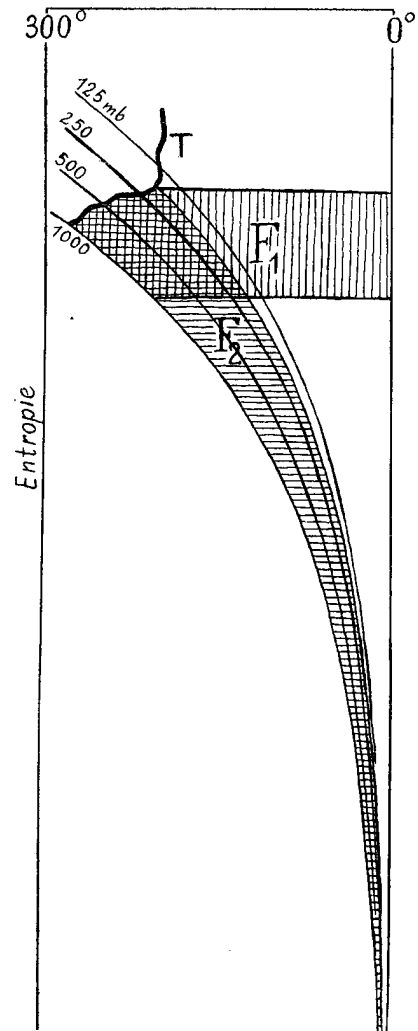


Abb. 3.

F dargestellt ist. Diese Fläche erstreckt sich zwischen den Drucklinien p_0 und p_1 und zwischen der Nulllinie des spezifischen Volumens und der betrachteten Zustandskurve der Atmosphäre. Es ergibt sich demnach:

$$g(z_1 - z_0) = \Phi_1 - \Phi_0 = F \dots (27)$$

Das Druck-Volumen-Diagramm lässt sich in dieser Weise durch Ausmessung einer Fläche F bei Höhenberechnungen anwenden. Bei sämtlichen flächentreuen Umformungen des Druck-Volumen-Diagramms wird der Geopotentialunterschied $\Phi_1 - \Phi_0$ durch eine entsprechende Fläche dargestellt. Auf dem Tephigramm von Shaw hat diese Fläche die gleiche Lage wie die Fläche F_2 auf Abb. 3. (Shaw hat auch gezeigt (1930), dass die Fläche F_1 von genau derselben Grösse ist.) Auf einem $\log p$ - T -Diagramm (Emagramm) hat diese Fläche eine Lage,

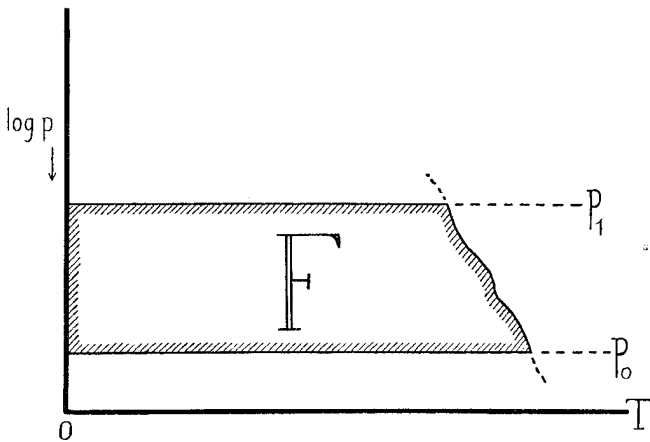


Abb. 4.

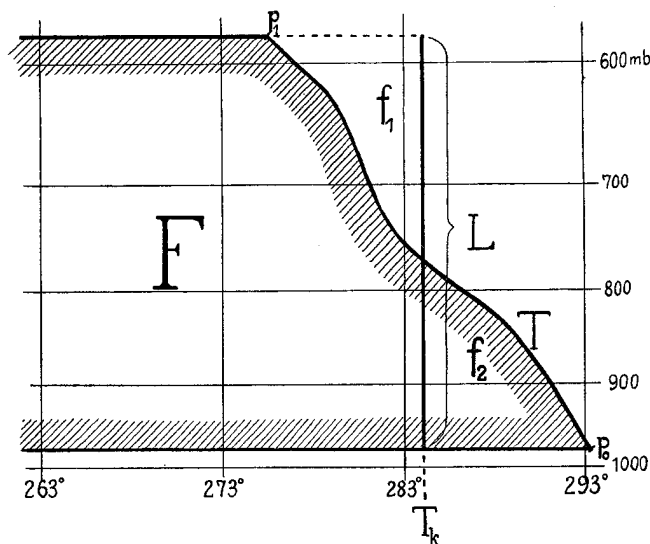


Abb. 5.

die Abb. 4 zeigt. (Sämtliche Temperaturkurven in den Abbildungen stellen virtuelle Temperaturen dar.)

Es ist unbequem, die Diagrammpapiere bis zu dem absoluten Nullpunkt der Temperatur ausstrecken zu müssen. Auf Abb. 5 ist gezeigt, dass dies nicht notwendig ist. Der Geopotentialunterschied von p_0 bis p_1 ist hier durch die Fläche F dargestellt. Wir legen eine Linie $T_k = \text{konst.}$ derartig, dass die Flächen f_1 und f_2 gleich gross werden. Der Geopotentialunterschied $\Phi_1 - \Phi_0$ ist demnach durch die Fläche zwischen den Drucklinien p_1 und p_0 und zwischen den Temperaturlinien $T_k = \text{konst.}$ und $T = 0$ gegeben. Die Strecke auf dem Diagrammpapier zwischen den Drucklinien p_0 und p_1 nennen wir L und erhalten:

$$\Phi_1 - \Phi_0 = kRT_k L, \dots (28)$$

wo k und R Konstanten sind. Der Geopotentialunterschied $\Phi_1 - \Phi_0$ ergibt sich demnach durch Ausmessung einer Linie L und eine einfache Multiplikation¹⁾. Es wäre aber wünschenswert, auch dieser Multiplikation ausweichen zu können, und auf der schiefwinkligen flächentreuen Transformation des Druck-Volumen-Diagramms, die durch Gleichung 20 dargestellt ist, ist dies auch möglich. Wir werden auf diesem Diagrammpapier einen Ausdruck für die Fläche F suchen.

Wir bezeichnen auf diesem Diagrammpapier die Abszissen mit x und die Ordinaten mit y , von den Grundlinien T_0 und p_0 gemessen. Aus der Konstruktion des Diagramms (Gleichung 20) ergibt sich:

$$x = k_2 \log \left(\frac{T}{T_0} \right) = k_2 \log T + k_3$$

und
$$y = k_1 T \log \left(\frac{p_0}{p} \right),$$

wo k_1 und k_2 positive Konstanten sind, die von dem Massstab des Diagrammpapieres abhängig sind, und k_3 gleich $-k_2 \log T_0$ ist. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$T = e^{\left(\frac{x - k_3}{k_2} \right)}$$

und
$$y = k_1 \log \left(\frac{p_0}{p} \right) e^{\left(\frac{x - k_3}{k_2} \right)} \dots (29)$$

Wie man sieht, ist y hier eine Exponentialfunktion von x . Die Fläche F zwischen den Drucklinien p_0 und p von $x = -\infty$ bis x wird

¹⁾ Dies ist schon von P. J. Kiefer in «Monthly Weather Review» März 1936 gezeigt worden.

$$F = \int_{-\infty}^x y dx = k_1 \log \left(\frac{p_0}{p} \right) \int_{-\infty}^x e^{\left(\frac{x-k_3}{k_2} \right)} dx = k_2 k_1 \log \left(\frac{p_0}{p} \right) e^{\left(\frac{x-k_3}{k_2} \right)} = k_2 y. \dots (30)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Fläche F zwischen den Drucklinien p_0 und p , von der unendlich weit entfernten Linie $x = -\infty$ gemessen, immer dem Abstand zwischen den Drucklinien proportional ist. Um den Geopotentialunterschied von der Höhe mit Druck p_0 bis zu der Höhe mit Druck p_1 zu finden, braucht man (Abb. 6) nur die Linie

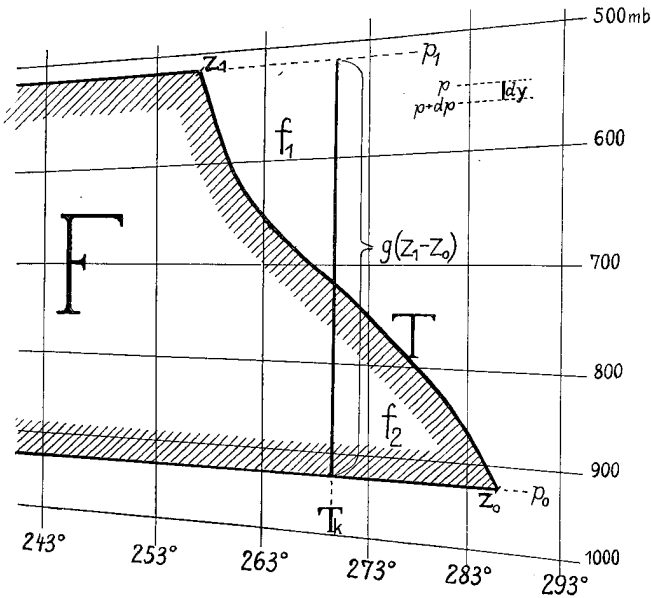


Abb. 6.

T_k derartig zu legen, dass die Flächen f_1 und f_2 gleich gross werden. Der Geopotentialunterschied ist dann durch die Länge dieser Linie T_k gegeben. Diese Linie kann man in den meisten Fällen mit genügender Genauigkeit nach dem Augenmass ziehen; die Grösse des Diagrammpapieres (oder des Messbandes) wählt man zweckmässig derartig, dass z. B. eine Einheit des Messbandes 10 dyn. m entspricht.

Es ist in dieser Weise gelungen, ein energetisches Diagrammpapier zu konstruieren, das für Höhenberechnungen besonders geeignet ist. Um dies Diagramm mit einem kurzen Namen bezeichnen zu können, nenne ich es «Aerogramm», weil es, wie später gezeigt wird, für alle aerologischen Untersuchungen geeignet ist. Einen auf einem Aerogramm eingezeichneten aerologischen Aufstieg nenne ich auch kurz «das Aerogramm des Aufstieges».

§ 4. Das Aerogramm.

Bei graphischen Höhenberechnungen werden jetzt meistens die Adiabatenpapiere von Stüve benutzt. Das erste Adiabatenpapier von Stüve (1921) ist ein Temperatur-logDruck-Diagramm, ist also ein energetisches Diagrammpapier, identisch mit dem Emagramm. Man war aber nicht darauf aufmerksam, dass dieses Diagrammpapier auch für energetische Betrachtungen geeignet war. Ein derartiges Diagrammpapier ist unbequem für grössere Höhen, weil das Diagrammpapier dann recht gross werden muss. In dieser Hinsicht ist das neue Adiabatenpapier von Stüve (1927) besser, weil der Druck hier nicht logarithmisch, sondern nach p^x geteilt ist, wo x den Wert 0.2884 hat. Auf diesem Diagrammpapier lassen sich Höhenberechnungen für jede Höhe durchführen, da die Drucklinie $p = 0$ hier nicht, wie bei dem Emagramm, unendlich weit entfernt liegt. Das neue Adiabatenpapier von Stüve ist aber kein energetisches Diagrammpapier und eignet sich daher nicht für energetische Untersuchungen. Es wäre wünschenswert, Höhenberechnungen für jede Höhe auf einem Emagramm durchführen zu können, ohne zu grosses Diagrammpapier anwenden zu müssen. Dies ist auch möglich, weil die Druckskala hier logarithmisch ist. Der Abstand zwischen den Drucklinien 500 mb und 400 mb ist gleich dem Abstand zwischen den Drucklinien 1000 mb und 800 mb. Es genügt daher, bei den Höhenberechnungen ein Emagramm bis 500 mb zu haben. Wenn der Aufstieg noch höher geht, beginnt man bei 500 mb wieder auf der 1000 mb-Linie und arbeitet weiter unter der Annahme, dass sämtliche Zahlen auf dem Emagramm, die den Druck angeben, halbiert sind. In dieser Weise lassen sich Aufstiege bis 250 mb berechnen. Geht der Aufstieg noch weiter, kann man dasselbe Verfahren wiederholen und die 1000 mb-Linie mit 250 mb, die 800 mb-Linie mit 200 mb bezeichnen usw. In dieser Weise kann man durch immer fortgesetzte Halbierung das Emagramm für jede Höhe benutzen. Da der Druck auch auf dem Aerogramm logarithmisch geteilt ist, lässt sich dasselbe Verfahren auch hier anwenden.

Wenn man auf dem Emagramm bei Höhenberechnungen das Verfahren von Stüve benutzt, muss man auf dem Emagramm die Trockenadiabaten eingezeichnet haben. Wenn man bei Höhenberechnungen auf dem Emagramm das beschriebene Halbierungsverfahren benutzt, sollte man eigentlich

nach jeder Halbierung eine neue Schar von Trockenadiabaten eingezeichnet haben. Dies ist aber nicht notwendig, und um dies zu zeigen, betrachten wir die Differentialgleichung der Trockenadiabaten. Der erste Hauptsatz der Wärmelehre ergibt

$$dq = c_p dT - \alpha dp.$$

Bei adiabatischen Zustandsänderungen ist $dq = 0$, und die Gleichung der Trockenadiabaten ist demnach $c_p dT = \alpha dp$. Mittels der Zustandsgleichung $p\alpha = RT$ können wir die Gleichung der Trockenadiabaten so schreiben:

$$0 = c_p dT - RT \frac{dp}{p}$$

oder

$$\frac{d(\log p)}{d(\log T)} = \frac{c_p}{R} \dots \dots \dots (31)$$

$\frac{c_p}{R}$ ist eine Konstante, und die Gleichung 31 zeigt daher folgendes: Auf einem Diagrammpapier mit logarithmischer Druckskala und logarithmischer Temperaturskala sind die Trockenadiabaten geradlinig und parallel. (Ein derartiges Diagrammpapier wird schon seit 1925 bei Daily Weather Report, London, verwendet. Siehe auch St ü v e 1927.) Wenn man auf diesem Diagrammpapier das Halbierungsverfahren benutzt, sieht man ohne weiteres ein, dass man immer dieselbe Schar von Trockenadiabaten benutzen kann, weil sie parallel laufen. Dies zeigt aber, dass man beim Halbierungsverfahren auch auf einem Emagramm und auf einem Aerogramm immer dieselbe Schar von Trockenadiabaten benutzen kann.

Die virtuellen Temperaturen werden in bekannter Weise (V. B j e r k n e s 1912) aus den von kurzen Strichen gebildeten Skalen gewonnen, die auf den Linien der Hauptdrucke eingetragen sind. Der Abstand zweier Skalenteile stellt die Differenz zwischen reeller und virtueller Temperatur bei gesättigter Luft dar. Wenn man auf einem Diagrammpapier die Skalen auf der 1000 mb Drucklinie und auf der 500 mb Drucklinie vergleicht, sieht man, dass der Abstand zwischen zwei Strichen auf der 500 mb Linie bei derselben Temperatur doppelt so gross wie auf der 1000 mb Linie ist. Das liegt daran, dass dieser Abstand der spezifischen Feuchtigkeit gesättigter Luft proportional ist und dass diese Grösse bei konstanter Temperatur dem Luftdruck ungefähr umgekehrt proportional ist. Um dies zu zeigen, betrachten wir den Aus-

druck für die virtuelle Temperatur T_r (V. B j e r k n e s 1912).

$$T_r = T (1 + 0,6 M) = T + 0,6 MT,$$

wo M die spezifische Feuchtigkeit ist. Die Differenz zwischen reeller und virtueller Temperatur ist also $\epsilon_r = 0,6 MT$, und bei gesättigter Luft ist diese Grösse durch den Abstand zwischen den kurzen Strichen dargestellt. Die spezifische Feuchtigkeit ist eine Funktion des Dampfdruckes e und des Luftdruckes p nach der Formel

$$M = \frac{623 e}{p - 0,377 e} \dots \dots \dots (32)$$

Wir erhalten für ϵ_r bei gesättigter Luft den Ausdruck

$$\epsilon_r = \frac{373,8 e_m T}{p - 0,377 e_m} \dots \dots \dots (33)$$

Da der maximale Dampfdruck e_m wesentlich kleiner als p ist, sehen wir, dass ϵ_r bei 100 % relativer Feuchtigkeit und dadurch auch der Abstand zwischen den kurzen Strichen dem Luftdruck annähernd umgekehrt proportional ist.

Wenn man die ursprünglichen Druckwerte auf dem Diagramm halbiert und das Diagramm für die Höhen mit Druck 500 mb bis 250 mb anwendet, stellt also der Abstand zweier Skalenteile die Differenz zwischen reeller und virtueller Temperatur bei 50 % relativer Feuchtigkeit dar. Auf einem Emagramm oder Aerogramm von 1000 mb bis 500 mb ist es in dieser Weise möglich, Höhenberechnungen für jede Höhe ohne jede Änderung des Diagramms durchzuführen. Das im Druck erschienene Aerogramm geht aber aus praktischen Gründen bis etwa 300 mb. Bei noch kleineren Druckwerten denkt man sich, dass die 900 mb-Linie 300 mb repräsentiert, die 600 mb-Linie 200 mb und die 300 mb-Linie 100 mb. Bei Druckwerten unter 100 mb beginnt man wieder von unten und denkt sich, dass die 1000 mb-Linie jetzt 100 mb entspricht, die 900 mb-Linie 90 mb, usw.

Die Kondensationsadiabaten sind auf dem gedruckten Aerogramm gestrichelt. Wenn man das Aerogramm für die Druckwerte 300 bis 100 mb benutzt, lässt sich selbstverständlich nicht dieselbe Schar von Kondensationsadiabaten wieder benutzen. Eine neue Schar, die für diese Druckwerte gilt, ist punktiert worden.

Die Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit werden auf dem Aerogramm fast gerade. Wie

Gleichung 32 zeigt, ist bei derselben Temperatur die maximale spezifische Feuchtigkeit mit grosser Genauigkeit dem Luftdruck umgekehrt proportional. Wenn man das gedruckte Aerogramm für die Druckwerte 300 bis 100 mb benutzt, können deshalb die Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit wieder benutzt werden, wobei jedoch vorauszusetzen ist, dass die Zahlenwerte dieser Linien verdreifacht sind.

Das Aerogramm gestattet in einfachster Weise die graphische Umrechnung von dynamischen Metern in geometrische Meter. Wir gehen davon aus, dass wir auf dem Aerogramm die Höhe zwischen den Drucklinien p_0 und p_1 bei der mittleren Temperatur T gefunden haben. Diese Höhe ist durch eine bestimmte Anzahl H dynamische m gegeben. In geometrischen Metern gemessen, beträgt diese Höhe $H \frac{10}{g}$ m. Wir erinnern jetzt, dass auf dem Aerogramm die Drucklinien derartig divergieren, dass ihr Abstand der absoluten Temperatur proportional ist. Wir messen daher die Höhe zwischen den Drucklinien p_0 und p_1 bei der mittleren Temperatur $T \frac{10}{g}$. Diese Höhe wird $H \frac{10}{g}$ dyn. m; wir können demnach die Höhe in geometrischen Metern bei der Temperatur T auf die Weise finden, dass wir die Ausmessung zwischen den Drucklinien p_0 und p_1 längs einer Temperaturlinie $T \frac{10}{g}$ vornehmen, die auf dem Aerogramm um eine bestimmte Strecke \mathcal{A} nach rechts verschoben ist. Diese Strecke \mathcal{A} ist aber wegen der logarithmischen Temperaturskala bei jeder Temperatur dieselbe. Es ergibt sich:

$$\mathcal{A} = k \left[\log \left(T \frac{10}{g} \right) - \log T \right] = k \log \left(\frac{10}{g} \right),$$

wo k eine von dem Massstab des Diagrammpapieres abhängige Konstante ist. Die Strecke \mathcal{A} ist also nur von der Grösse der Schwerebeschleunigung und von der Konstante des Diagrammpapiers abhängig, nicht aber von der Temperatur T . Über der Höhenskala auf dem gedruckten Aerogramm sind daher für die verschiedenen Werte von g Striche von verschiedener Länge eingezeichnet worden, die angeben, wie weit man die Kurve nach rechts verschieben muss, um die Höhen in geometrischen Metern zu erhalten. In dieser Weise kann man auch sehr leicht die Variationen der Schwerebeschleunigung mit der Höhe in Betracht

ziehen. Diese Variation ist auf der linken Seite des gedruckten Aerogramms angedeutet. In der Höhe auf dem Diagrammpapier, wo $g = 0,01$ steht, ist die Schwerebeschleunigung ungefähr 1 cm/sec^2 kleiner als am Boden, und entsprechend für $g = 0,02$ und für $g = 0,03$. Wenn man das Aerogramm für die Druckwerte 300 bis 100 mb benutzt, steht die Abnahme der Schwerebeschleunigung an der linken Seite in Klammern. Ungefähr in der Höhe auf dem Aerogramm, wo z. B. ($g = 0,04$) steht, ist also die Schwerebeschleunigung jetzt 4 cm/sec^2 kleiner als am Boden.

Das Aerogramm hat auch den Vorteil, dass das geschilderte Verfahren bei den Höhenberechnungen unabhängig von der Druckeinheit ist. Man kann daher dasselbe Diagramm sowohl für mm als auch für mb anwenden, wodurch Umrechnungen erspart werden. Um dies zu zeigen, denken wir uns, dass wir den Druck in einer anderen Einheit als mb messen. Der Druck p mb wird in dieser Einheit durch die Grösse Cp angegeben. Auf dem Aerogramm ist der Geopotentialunterschied zwischen den Drucklinien p_1 und p_2 bei der mittleren Temperatur \bar{T} durch die Grösse

$$\Phi_2 - \Phi_1 = k_1 \bar{T} \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

gegeben, wo k_1 eine von dem Massstab des Diagrammpapieres abhängige Konstante ist. Wenn wir jetzt den Druck mit der neuen Einheit messen, wird der Druck durch die Grössen Cp_1 und Cp_2 angegeben. Der Geopotentialunterschied auf dem Aerogramm mit diesen Druckwerten wird

$$\Phi_2' - \Phi_1' = k_1 \bar{T} \log \left(\frac{Cp_1}{Cp_2} \right) = \Phi_2 - \Phi_1,$$

also derselbe wie früher. Wenn wir daher den Druck in mm angeben, werden die Höhenberechnungen auf dem Aerogramm nicht beeinflusst. Man denkt sich nur, dass die Drucklinien auf dem Aerogramm in mm gegeben sind, und arbeitet genau wie früher.

Der Verlauf der Trockenadiabaten ist eine Funktion unabhängig von der Druckeinheit. (Siehe Gleichung 31). Wir können daher auf dem Aerogramm dieselbe Schar von Trockenadiabaten benutzen, auch wenn der Druck in mm gegeben ist. Sämtliche Linien, die von dem Wasserdampfgehalt der Luft abhängig sind, lassen sich aber selbstverständlich nicht unabhängig von der Druckeinheit benutzen, und dies ist auch der Fall mit den kurzen Strichen auf den Hauptdrucklinien, um

die virtuelle Temperatur zu berechnen. Wie auf S. 13 gezeigt ist, ist aber der Abstand zwischen diesen Strichen bei unveränderter Temperatur dem Luftdruck etwa umgekehrt proportional. Wenn der Druck in mm gegeben ist, kann man daher doch diese für mb berechneten Striche benutzen; man denkt sich nur, dass der Abstand zwischen den Strichen um ein Viertel verkleinert ist.

Eine Umrechnung von mm in mb ist jedoch bei den meisten aerologischen Untersuchungen nicht zu vermeiden, wenn der Druck in mm gegeben ist. Das Emagramm und das Aerogramm gestatten diese Umrechnung aber in einfachster Weise durch graphisches Verfahren. Die Druckwerte in mm verhalten sich zu den Druckwerten in mb, wie $\frac{750.1}{1000}$. Wegen der logarithmischen Druckskala ist

auf dem Emagramm der Abstand zwischen den Druckwerten in mm und in mb immer gleich dem Abstand zwischen den Drucklinien 750.1 und 1000. Man braucht daher nur diesen Abstand im Stechzirkel zu haben, um die Umrechnung von mm in mb und umgekehrt vorzunehmen. Auf dem Aerogramm muss man bei diesem Verfahren die Umrechnung immer bei derselben Temperaturlinie vornehmen, da die logarithmische Druckskala hier mit der Temperatur variiert.

Das Aerogramm gestattet auch, in einfacher Weise die Grösse des spezifischen Volumens zu bestimmen. Aus der statischen Grundgleichung $\alpha dp = -d\Phi$ ergibt sich $\alpha = -\frac{d\Phi}{dp}$. Wenn wir für dp die Druckeinheit wählen, wird α gleich dem Geopotentialunterschied $d\Phi$. Um das spezifische Volumen zu bestimmen, braucht man also auf dem Aerogramm nur den Abstand zwischen zwei benachbarten Drucklinien an der betrachteten Stelle mit der Skala für Geopotential zu messen. Es ist aber unbequem, eine so kleine Strecke auf dem Aerogramm zu messen, und daher ist für das spezifische Volumen eine viermal so grosse Skala eingezeichnet worden. Mit dieser Skala misst man an der betrachteten Stelle den Abstand zwischen vier Drucklinien auf dem Aerogramm. In einem Punkt mit Druck 330 mb und Temperatur -66°C misst man so den Abstand zwischen den Drucklinien 310 und 350 mb und erhält mittels der Skala für das spezifische Volumen an dieser Stelle $1800\text{ m}^3/\text{ton}$ (Abb. 7). Wünscht man statt des spezifischen Vo-

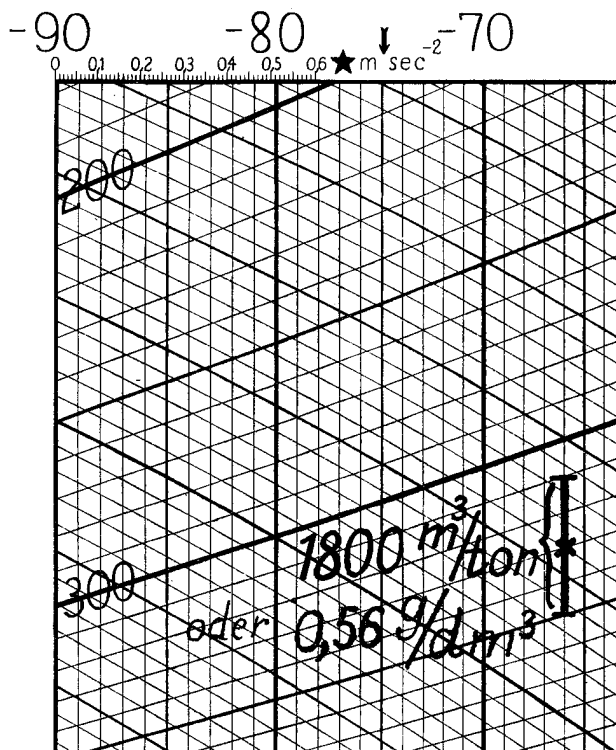


Abb. 7.

lomens die Dichte zu berechnen, überträgt man den Abstand zwischen 4 eb auf die Skala für Dichte in g/dm^3 . Im betrachteten Falle (Abb. 7) beträgt die Dichte 0.56 g/dm^3 .

* * *

Mittels des hier umrissenen Verfahrens lassen sich auf recht kleinen Diagrammpapieren Höhenberechnungen und energetische Betrachtungen für jede Höhe durchführen. Man kann daher den Massstab des Diagrammpapiers recht gross wählen, wodurch diese graphischen Verfahren genau werden. Das Aerogramm gestattet genaue Höhenberechnungen, und die Genauigkeit der Resultate ist nur von der Genauigkeit und der Grösse des Aerogramms abhängig. Das Aerogramm stellt beinahe sämtliche meteorologischen Tabellen von V. Bjerknes (1912) graphisch dar und macht diese bei Höhenberechnungen überflüssig, wenn nur ein Aerogramm mit genügendem Massstab vorhanden ist.

Auf dem gedruckten Aerogramm sind die Drucklinien für jeden Centibar gezogen. Der Druck bei den aerologischen Aufstiegen ist aber in ganzen Millibar gegeben, und die meisten Punkte muss man daher auf dem Aerogramm nach Augenmass zwischen die gezogenen Drucklinien legen. Diese

Punkte kann man aber bei Höhenberechnungen nicht benutzen, weil es nicht möglich ist, sie mit genügender Genauigkeit anzubringen. Das beschriebene Verfahren auf dem Aerogramm zur Bestimmung des Geopotentialunterschiedes zwischen zwei Höhen mit Druck p_1 und p_2 lässt sich daher nur mit Genauigkeit verwenden, wenn p_1 und p_2 in ganzen Centibar gegeben sind. Durch einen einfachen Kunstgriff lässt sich aber das Verfahren auch für Punkte mit Druck in ganzen Millibar erweitern. Wir betrachten (Abb. 8) auf einem Aerogramm eine Aufstiegskurve, die von 990 mb bis 736 mb verläuft. Wir bestimmen die Höhe bis zum Punkt mit Druck 740 mb und erhalten durch Messung der Linie T_k die Höhe 2410 dyn. m. Um den Höhenunterschied zwischen 736 mb und 740 mb zu finden, messen wir hier den Abstand zwischen 4 Centibar, also den Abstand zwischen 720 und 760 mb. Mit vollständig genügender Genauigkeit kann man diesen Abstand 10 mal so gross wie den Abstand zwischen 736 und 740 mb annehmen. Wir berechnen also in bekannter Weise auf dem Aerogramm den Höhenunterschied für eine 10 mal so grosse Strecke, wonach sich Strecken zwischen gezogenen Drucklinien messen lassen. Im betrachteten Beispiel (Abb. 8) ist der Höhenunterschied von 720 bis 760 mb 440 dyn. m, und der Höhen-

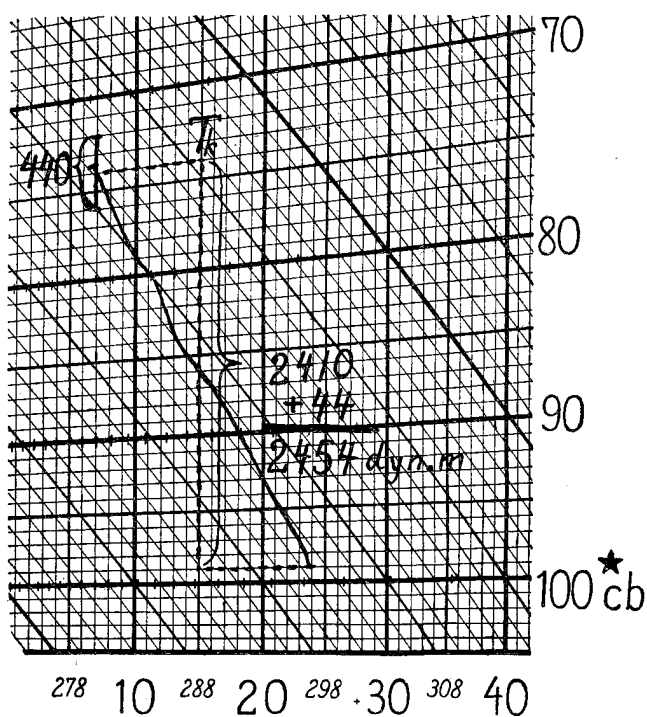


Abb. 8.

unterschied von 736 mb bis 740 mb folglich 44 dyn. m. Der Höhenunterschied im betrachteten Falle von 990 mb bis 736 mb ist also 2454 dyn. m. Die letzte Ziffer ist hier unsicher. In dieser Weise berechnet man auf dem Aerogramm aus den am nächsten gelegenen Drucklinien die Höhe für Punkte zwischen den Drucklinien.

§ 5. Graphische Ermittlung von Äquivalenttemperaturen.

Die Äquivalenttemperatur ist ein Ausdruck für den Gesamtwärmegehalt der Luft. Wir stellen hier kurz die Entwicklung nach *Robitzsch* (1930) dar. Er geht bei seinen Betrachtungen von Wasser von 0° aus. Wird 1 g Wasser von 0° auf die Temperatur von t° C erwärmt, so braucht man dazu t cal. Soll dieselbe Wassermenge bei der Temperatur t° verdampft werden, so sind zu diesem Verdampfungsprozess $606,5 - 0,695 t$ cal notwendig. Für beide Prozesse benötigt man dementsprechend $606,5 + 0,305 t$ cal (Gesamtwärme des Wasserdampfes). Diese Wärmemenge vermag — bei konstantem Druck — 1 kg trockener Luft um Δt_w° zu erwärmen, wo

$$\Delta t_w = \frac{606,5 + 0,305 t}{241} = 2,52 + 0,00128 t^\circ \text{ C.}$$

Setzen wir als Anfangszustand Eis von 0° voraus, so erhöht sich der Wärmebetrag um die Schmelzwärme des Eises, rund 80 cal, und wir erhalten

$$\Delta t_e = \frac{686,5 + 0,305 t}{241} = 2,84 + 0,00128 t^\circ \text{ C.}$$

Δt_e ist also rund gleich 1,1 Δt_w , mit anderen Worten ungefähr 10 % grösser als Δt_w .

Das Glied in Δt_w und Δt_e , das die Temperaturabhängigkeit ausdrückt, kann man für die Aerologie im allgemeinen vernachlässigen, da die Genauigkeit der Feuchtigkeitsmessungen recht gering ist. Sind 1 kg trockener Luft M' g Wasserdampf beigemischt, so ist Δt_w oder Δt_e mit M' zu multiplizieren, wenn man den Wärmegehalt dieser M' g Wasserdampf erfassen will. Es wird also $\Delta t_w = 2,52 M'$ und $\Delta t_e = 2,84 M'$. M' ist das Mischungsverhältnis und hat den Wert

$$M' = \frac{623 e}{p - e}$$

Wegen der Ungenauigkeit der Feuchtigkeitsmessungen setzt aber Robitzsch in der Praxis $M' = \frac{623 e}{p}$, wodurch ein kleiner Fehler entsteht, der aber im allgemeinen bedeutungslos ist. Die Grösse $T + \Delta t$ ist die Äquivalenttemperatur, und die Grösse Δt nennt Robitzsch «äquivalente Temperaturdifferenz». Sowohl Robitzsch (1930) als Diesing (1931) haben graphische Verfahren angegeben, die gestatten, die äquivalente Temperaturdifferenz recht rasch zu berechnen. Es wäre aber ein grosser Vorteil, wenn man diese auf einem gewöhnlichen Diagrammpapier berechnen und besondere Diagrammpapiere für diesen Zweck vermeiden könnte. Wir werden zeigen, dass ein Aerogramm oder Emagramm in einfachster Weise gestattet, die äquivalente Temperaturdifferenz zu berechnen.

Wir betrachten z. B. ein Emagramm, in das die Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit eingezeichnet sind. Für dieses Diagramm suchen wir ein Verfahren zur Bestimmung der äquivalenten Temperaturdifferenz aus Druck, Temperatur und relativer Feuchtigkeit. Die relative Feuchtigkeit r ist gleich $\frac{e}{e_m}$, wo e der Dampfdruck und e_m der maximale Dampfdruck bei der gegebenen Temperatur ist. Nun können wir mit vollständig genügender Genauigkeit die spezifische Feuchtigkeit so schreiben: $M = \frac{623 e}{p}$ und erhalten mittels dieser Gleichung

$$r = \frac{M p}{623 e_m}$$

Solange keine Kondensation oder Verdampfung stattfindet, ist M eine konstante Grösse. Bei unveränderter Temperatur ist e_m auch eine Konstante. Diese Gleichung zeigt daher, dass die relative Feuchtigkeit einer Partikel bei isothermen Bewegungen dem Druck proportional ist. Diesen Umstand können wir bei graphischen Berechnungen benutzen, und wir denken uns, dass die Drucklinien auch die relative Feuchtigkeit darstellen. 100 cb entsprechen dann 100 % relativer Feuchtigkeit, 90 cb entsprechen 90 %, usw. Ein Beispiel zeigt am besten, wie man dies graphisch verwenden kann. Wir nehmen an (Abb. 9), Punkt A habe Druck 78 cb, Temperatur $10,3^\circ \text{C}$ und 60 % relative Feuchtigkeit. Die spezifische Feuchtigkeit in diesem Punkt bei 100 % relativer Feuchtigkeit ist, wie die Linien maxi-

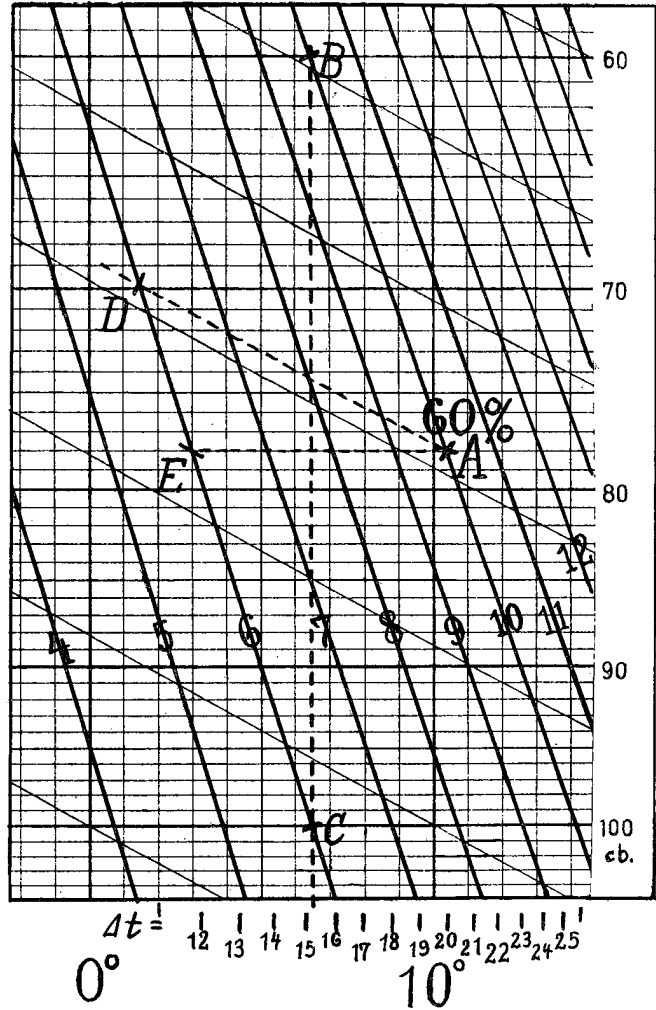


Abb. 9.

maler spezifischer Feuchtigkeit zeigen, 10 g je kg. Die spezifische Feuchtigkeit bei 60 % finden wir in folgender einfacher Weise: Wir folgen der Linie 10 g je kg bis zum Punkt B mit Druck 60 cb, da die relative Feuchtigkeit ja 60 % war. Bei einer derartigen Bewegung längs der Wasserdampflinien ist die relative Feuchtigkeit der Partikel mit grosser Genauigkeit konstant, da ja sowohl die spezifische Feuchtigkeit als die maximale spezifische Feuchtigkeit sich nicht ändern. Im Punkt B sind also die relative Feuchtigkeit und der Druck durch dieselbe Zahl gegeben. Vom Punkt B gehen wir isotherm bis 100 cb. Bei dieser Bewegung ändert sich die relative Feuchtigkeit proportional dem Druck, hat also in jedem Punkt denselben Wert wie der Druck. Bei 100 cb steigt die relative Feuchtigkeit auf 100 %. Wir sehen, dass die Wasserdampflinie 6 g je kg diesen Punkt C schneidet.

Folglich ist die spezifische Feuchtigkeit im Punkt A 6 g je kg. Suchen wir z. B. die Kondensationshöhe für eine Partikel im Punkt A mit 60 % relativer Feuchtigkeit, dann betrachten wir den Schnittpunkt der Linie 6 g je kg und der Trockenadiabate durch A und ersehen, dass dieser Punkt D etwa den Druck 70 cb hat.

Die Wasserdampflinie durch den Punkt C gibt die spezifische Feuchtigkeit der betrachteten Partikel im Punkt A an. Da die Grösse Δt eine Funktion der spezifischen Feuchtigkeit ist, kann man an diesen Linien Zahlen einzeichnen, die die äquivalente Temperaturdifferenz direkt angeben; so hat es z. B. Robitzsch gemacht (1930, 1931). Es ist aber bequemer, am Rande des Diagrammpapiers eine Skala für Δt einzuzichnen und die Linie B—C bis an diese Skala zu verlängern (Abb. 9). So liest man direkt ab, dass Δt für den Punkt A bei 60 % relativer Feuchtigkeit $15,2^\circ$ ist. Die Äquivalenttemperatur der betrachteten Partikel im Punkt A wird folglich $10,3^\circ + 15,2^\circ = 25,5^\circ$ C. Das Verfahren zur Ermittlung der äquivalenten Temperaturdifferenz Δt ist also ganz einfach folgendes: Von dem betrachteten Punkt A folgt man der Wasserdampflinie bis zur Drucklinie, die der relativen Feuchtigkeit entspricht. Von diesem Punkt B geht man isotherm bis zur Skala am Rande des Diagrammpapiers, und hier liest man direkt die äquivalente Temperaturdifferenz Δt ab. Will man die Äquivalenttemperatur auf Eis beziehen, fügt man diesem Wert 10 % hinzu. Das hier gezeigte Verfahren hat den grossen Vorteil, dass die äquivalente Temperaturdifferenz ohne Verwendung von Tafeln oder besonderen Diagrammpapieren sofort in ihrer Zuordnung zum Druck auf rein graphischem Wege gefunden wird.

Bei der Berechnung der Äquivalenttemperaturen setzt Robitzsch das Mischungsverhältnis M' gleich $\frac{623 e}{p}$ statt $\frac{623 e}{p-e}$. Der dadurch entstandene Fehler ist in der Praxis bedeutungslos. Bei theoretischeren Arbeiten ist es aber erwünscht, diesen Fehler zu vermeiden, und dies ist auf dem gedruckten Aerogramm dadurch ermöglicht, dass die Skala am Rande des Diagrammpapiers aus dem Mischungsverhältnis berechnet worden ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die in dieser Weise berechnete Äquivalenttemperatur erst bei einem Dampfdruck von 25 mb um 1° höher als nach der Berechnung von Robitzsch wird.

Mittels des Kunstgriffes, dass die Drucklinien auch die relative Feuchtigkeit darstellen, lässt sich auf graphischem Wege eine Reihe von Rechnungen einfach durchführen. Ich zeige hier ein paar Beispiele:

1. Auf dem gedruckten Aerogramm ist der maximale Dampfdruck als eine Linie mit der 300 mb-Linie als Grundlinie dargestellt worden, Die 400 mb-Linie entspricht einem maximalen Dampfdruck von 10 mb, die 500 mb-Linie einem von 20 mb, usw. Unter dem Gefrierpunkt ist die maximale Dampfdrucklinie über Wasser wie über Eis eingezeichnet und die letzte mit einem Schneestern bezeichnet worden. Bei jeder Temperatur kann man also den maximalen Dampfdruck in der Weise finden, dass man isotherm bis zu der Dampfdruck-

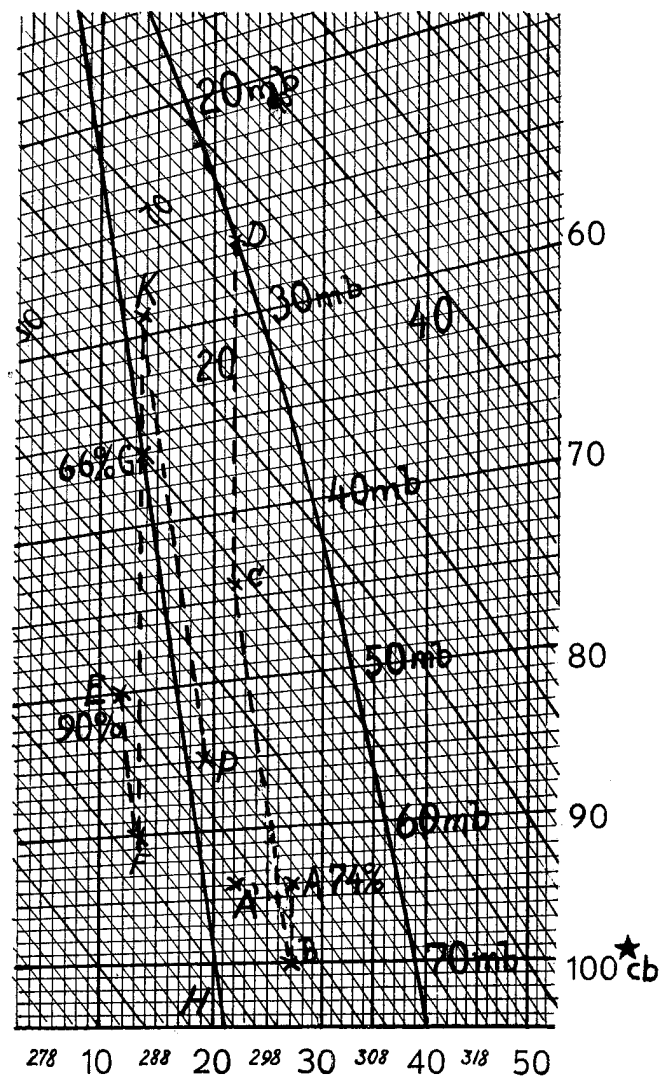


Abb. 10.

linie geht und in diesem Punkt den Dampfdruck abliest. Wir wünschen jetzt graphisch den Dampfdruck einer Partikel im Punkt A (Abb. 10) mit Druck p und relativer Feuchtigkeit r gleich z. B. 74 % zu berechnen. Wir gehen isotherm bis 100 cb. Bei dieser Bewegung ändert sich die relative Feuchtigkeit proportional dem Druck und erhält also den Wert $r \frac{100}{p}$. Von diesem Punkt B folgen wir der

Wasserdampflinie bis zum Druck r cb, in diesem Falle bis zu 74 cb. Die relative Feuchtigkeit ändert sich bei dieser Bewegung nicht, hat also fortgesetzt den Wert $r \frac{100}{p}$. Wir denken uns jetzt, dass

wir uns von diesem Punkt C isotherm bis zum Punkt A' mit Druck p bewegen. Die relative Feuchtigkeit ändert sich proportional dem Druck und erhält im Punkt A' den Wert $r \frac{100}{p} \cdot \frac{p}{r} = 100$.

Bei der Temperatur im Punkt A' und dem Druck p ist also die relative Feuchtigkeit der Partikel 100 %. Die Temperatur im Punkt A' ist also die Taupunkttemperatur der Partikel im Punkt A, wenn die Temperatur bei konstantem Druck p sinkt. Der Dampfdruck im Punkt A ist folglich gleich dem maximalen Dampfdruck bei der Temperatur im Punkt A'. Vom Punkt C, wo die Temperatur dieselbe wie im Punkt A' ist, geht man also isotherm bis zur Dampfdrucklinie und liest hier im Punkt D den Dampfdruck 26,4 mb ab.

Die graphische Bestimmung der Taupunkttemperatur wird bei diesem Verfahren besonders einfach. Man findet an der 100 cb-Linie die Temperatur der betrachteten Partikel und folgt von diesem Punkt aus den Wasserdampflinien bis an die Drucklinie, die denselben Druck in cb hat wie die relative Feuchtigkeit der Partikel in Prozenten. Die Temperatur in diesem Punkt ist die Taupunkttemperatur der betrachteten Partikel.

2. Eine Partikel im Punkt E (Abb. 10) hat 90 % relative Feuchtigkeit. Wie muss man Temperatur und Druck der Partikel ändern, um z. B. 66 % relative Feuchtigkeit zu erhalten? Wir gehen längs der Wasserdampflinie bis zur Drucklinie 90 cb. In diesem Punkt F sind dann der Druck und die relative Feuchtigkeit durch dieselbe Zahl gegeben. Dies ist dann auch der Fall bei allen Punkten auf der Temperaturlinie durch F. Wir gehen also vom Punkt F isotherm bis zum Punkt G mit

Druck 66 cb. Hier wird auch die relative Feuchtigkeit 66 %. Längs einer Wasserdampflinie ist die relative Feuchtigkeit konstant, und die Wasserdampflinie G—H stellt daher die Punkte dar, wo die relative Feuchtigkeit der betrachteten Partikel 66 % wird. Wie gross wird die relative Feuchtigkeit der Partikel im Punkt P? Vom Punkt P folgen wir der Wasserdampflinie bis zur Temperaturlinie durch F. Dieser Punkt K hat den Druck 59 cb. Die relative Feuchtigkeit der Partikel ändert sich also von 90 % in 59 %, wenn ihr Zustand sich von E in P ändert.

§ 6. Die Pseudo-Temperatur.

Stüve hat (1927) den Begriff «die pseudopotentielle Temperatur» eingeführt. Formelmässig ist bei 1000 mb die pseudopotentielle Temperatur identisch mit der Äquivalenttemperatur. Bezeichnen wir die potentielle Temperatur mit ϑ , die spezifische Feuchtigkeit mit M und die Verdampfungswärme mit r , wird die pseudopotentielle Temperatur nach der Formel von Stüve:

$$\tau = \vartheta + \frac{M r}{1000 \cdot c_p}$$

r hat hier den Wert 606,5 — 0,695 t . Berechnen wir nun die pseudopotentielle Temperatur z. B. bei 20° C und 1000 mb Druck, wo die spezifische Feuchtigkeit 14,7 g/kg ist, erhalten wir den Wert:

$$\tau_{20} = 20 + \frac{14,7 \cdot (606,5 - 0,695 \cdot 20)}{1000 \cdot 0,241} = 20 + 36 = 56^\circ \text{C.}$$

Der pseudopotentielle Temperaturunterschied von 36° wird in diesem Falle identisch mit dem äquivalenten Temperaturunterschied. Nach den Tabellen von Koschmieder in seiner Lehrbuch «Dynamische Meteorologie» ist bei gesättigter Luft von 20° C mit 1000 mb Druck der äquivalente Temperaturunterschied 35,7°.

Stüve hat aber auch folgende graphische Definition eingeführt: «Die pseudopotentielle Temperatur einer Luftmasse ist die Temperatur, die die Luftmasse annehmen würde, wenn sie kondensierend aufstiege, bis sie ihren Wasserdampf vollständig verloren hätte, und dann wieder absänke, bis sie auf Normaldruck wäre.»

Berechnen wir nun die Grösse τ_{20} auf graphischem Wege auf dem Diagrammpapier von Stüve, ergibt sich: $\tau_{20} = 62^\circ \text{C}$. Der auf graphischem Wege ermittelte pseudopotentielle Temperaturunter-

schied beträgt in diesem Falle also 42° und nicht 36° . Sämtliche bisherigen Verfasser setzen voraus, dass die zwei Methoden dasselbe Resultat geben müssen und dass der Unterschied nur durch die Ungenauigkeit der Methoden bedingt ist. Die graphischen Methoden auf einem korrekt gezeichneten Diagrammpapier sind aber recht genau. Der gefundene Unterschied ist so gross, dass er physikalisch bedingt sein muss, und da die Veränderung der Verdampfungswärme mit der Temperatur nur ca. 1° des Unterschiedes erklären kann, betrachten wir diesen Punkt genauer.

Die betrachtete Luftmasse bewegt sich von Punkt A mit 1000 mb Druck und 20°C nach den Kondensationsadiabaten von Stüve nach Punkt B mit einer Temperatur von etwa -55°C . Von dort ab bewegt die Luftmasse sich trockenadiabatisch nach Punkt C mit 1000 mb Druck. Die Temperatur erreicht hier ungefähr 62°C . Denken wir uns nun, dass die Luftmasse sich isobar nach Punkt A zurückbewegt, ist der Luftmasse je Masseneinheit eine Arbeit entsprechend der Fläche A—B—C—A zugeführt worden und diese Arbeit ist in Wärme übergegangen. Die Fläche A—B—C—A ist auf einem Aerogramm eingezeichnet worden; ihre Grösse beträgt $75,3\text{ cm}^2$, was 5600 joule/kg entspricht. 5600 joule ist gleich $0,00024 \cdot 5600\text{ kg kal.}$, und diese Wärmemenge vermag bei konstantem Druck 1 kg Luft um $\frac{0,00024 \cdot 5600}{0,241} = 5,6\text{ Grad C}$ zu erwärmen. Die bei der Bewegung A—B—C geleistete Arbeit bewirkt also, dass die Luft um $5,6^\circ$ erwärmt wird, und dadurch entsteht der Unterschied des Ergebnisses aus der graphischen Methode von Stüve und den Methoden, die formelmässig arbeiten.

Analog der Äquivalenttemperatur kann man eine «Pseudo-Temperatur»¹⁾ einführen, die in Übereinstimmung mit Stüves pseudopotentieller Temperatur in folgender Weise definiert wird: «Die Pseudo-Temperatur einer Luftmasse ist die Temperatur, die die Luftmasse annehmen würde, wenn sie kondensierend aufstiege, bis sie ihren Wasserdampf vollständig verloren hätte, und dann wieder absänke, bis sie auf ihrem ursprünglichen Druck wäre.»

¹⁾ Dieser Name ist an sich recht schlecht, ist aber wegen der Übereinstimmung mit dem Namen «die pseudopotentielle Temperatur» gewählt, die nach Stüve in der Meteorologie Eingang gefunden hat.

Die in dieser Weise definierte Pseudo-Temperatur ist immer etwas grösser als die Äquivalenttemperatur. (Siehe doch unten).

In seiner grundlegenden Arbeit (1930) entwickelt Robitzsch folgenden Satz: «Mag sich aufsteigende Luft im Trocken- oder Kondensationsstadium befinden, die Kurve der Äquivalenttemperatur, die ihre Zustandsänderung darstellt, weist in allen Höhen einen Gradienten auf, der dem Gradienten der dem Anfangsstadium entsprechenden Trockenadiabate gleich ist, d. h. die äquivalent-potentielle Temperatur der Luftmasse ändert sich nicht.»

Die äquivalent-potentielle Temperatur bei diesen Prozessen ist aber nicht konstant. Robitzsch hat nämlich den Begriff «die äquivalent-potentielle Temperatur» durch ein Verfahren, bei dem er die Höhe als Koordinate benutzt, abgeleitet. *Auf einem Diagrammpapier mit der Höhe als Koordinate lässt sich aber die gewöhnliche Schar von Trockenadiabaten überhaupt nicht einzeichnen.* Die Temperaturabnahme einer aufsteigenden Partikel ist nämlich nur konstant (angenähert 1° pr. 100 m) wenn die Partikel dieselbe Temperatur wie die Umgebung hat. (Siehe z. B. Brunt «Physical and Dynamical Meteorology» §§ 21 und 22). Ein Beispiel zeigt deutlich, wie die äquivalent-potentielle Temperatur einer aufsteigenden Partikel sich ändert. Wir betrachten eine gesättigte Partikel von 24°C und 1000 mb Druck. Ihre Äquivalenttemperatur beträgt 72°C , und dies ist auch ihre äquivalent-potentielle Temperatur. Diese Partikel bewegt sich kondensationsadiabatisch aufwärts, und erreicht bei Druck etwa 528 mb die Temperatur 0°C . Ihre Äquivalenttemperatur wird hier ca. $18,5^\circ\text{C}$ und ihre äquivalent-potentielle Temperatur ca. 77°C , also 5° mehr als ursprünglich.

Der Satz von Robitzsch und sämtliche Verfahren, die die Äquivalenttemperaturen bei Stabilitätsbetrachtungen benutzen, werden aber korrekt, wenn man statt der Äquivalenttemperatur die oben definierte Pseudo-Temperatur benutzt. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Pseudo-Temperatur. Es ist daher von Bedeutung, die Pseudo-Temperatur graphisch rasch bestimmen zu können. Die graphische Methode von Stüve ist an sich recht rasch auszuführen und wird bedeutend erleichtert dadurch, dass er die Trockenadiabaten und die Kondensationsadiabaten in derselben Weise nummeriert. Auf dem gedruckten Aerogramm, das nur bis etwa 300 mb geht, wird aber die graphische

Methode von Stüve komplizierter, und daher ist am oberen Rande des Aerogramms eine Skala entsprechend der Skala für den äquivalenten Temperaturunterschied eingezeichnet worden, um den Pseudo-Temperaturunterschied bestimmen zu können. Diese Skala ist rein empirisch in Verbindung mit den Kondensationsadiabaten nach Fjeldstad gefunden worden. Da in den Kondensationsadiabaten von Fjeldstad auch die Schmelzwärme in Betracht gezogen ist, ist also der Pseudo-Temperaturunterschied nach der Skala auf dem Aerogramm grösser als der auf dem Diagrammpapier von Stüve bestimmte Pseudo-Temperaturunterschied. (Siehe doch unten). Das Verfahren um auf dem Aerogramm den Pseudo-Temperaturunterschied $\Delta t'$ zu bestimmen ist folgendes: Vom betrachteten Punkt folgt man der Wasserdampflinie bis zur Drucklinie, deren Druck in cb der relativen Feuchtigkeit entspricht. Von dort aus bewegt man sich isotherm bis zur Skala am oberen Rande des Aerogramms, und hier liest man direkt den Pseudo-Temperaturunterschied $\Delta t'$ ab.

Der in dieser Weise bestimmte Pseudo-Temperaturunterschied ist selbstverständlich keine exakt bestimmte Grösse, da die Skala, wie gesagt, rein empirisch gefunden ist. Man sieht z. B., dass der in dieser Weise gefundene Pseudo-Temperaturunterschied bei tiefen Temperaturen kleiner wird als der äquivalenten Temperaturunterschied, was an sich fehlerhaft ist. Die Skala ist aber in der Weise ausgeglichen, dass die Fehler möglichst klein werden, und in den meisten Fällen kann man die Fehler als bedeutungslos betrachten. In der Wettervorhersage arbeitet man meines Erachtens besser mit den in dieser Weise gefundenen Pseudo-Temperaturen als mit den Äquivalenttemperaturen.

§ 7. Graphische Berechnung der Entropie.

Durch die Arbeiten von Margules (1903), Ansel (1913) und Shaw (1930) ist die Entropie als meteorologisches Element eingeführt worden. Rein theoretisch bietet das eine Reihe Vorteile; durch Shaw's Tephigramm und seine grundlegenden Arbeiten hat die Entropie auch in der praktischen Meteorologie Verwendung gefunden. Die graphischen Verfahren auf einem Tephigramm sind einfacher und übersichtlicher als die entsprechenden auf einem Druck-Volumen-Diagramm; eben dieser Umstand hat stark dazu beigetragen, dass

der Entropiebegriff in der praktischen Meteorologie Eingang gefunden hat. Wie gezeigt wurde, ist aber das Emagramm oder das Aerogram noch einfacher und schneller im Gebrauch; dieses Diagrammpapier bietet auch den Vorteil, dass es hier nicht notwendig ist, eine Hilfsgrösse wie die Entropie zu berechnen. Die Entropie muss nämlich als eine Hilfsgrösse betrachtet werden; meiner Meinung nach ist der Entropiebegriff in der Meteorologie nur bei rein theoretischen Betrachtungen notwendig und berechtigt. Da aber nach den Arbeiten von Shaw der Entropiebegriff praktische Verwendung findet, ist es vorteilhaft, die Entropie graphisch berechnen zu können. Derartige Verfahren sind von Shaw angegeben. Ich zeige hier, wie man diese Berechnung auf einem gewöhnlichen Diagrammpapier durchführen kann.

Aus dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre und der Zustandsgleichung ergibt sich:

$$dq = c_p dT - adp = c_p dT - \frac{RT}{p} dp \dots (34)$$

und daraus

$$dS = \frac{dq}{T} = c_p d(\log T) - R d(\log p) \dots (35)$$

Durch Integration ergibt sich

$$S - S_0 = c_p \log \frac{T}{T_0} - R \log \frac{p}{p_0}, \dots (36)$$

wo T_0 , p_0 und S_0 korrespondierende Werte von absoluter Temperatur, Druck und Entropie sind. Wir ersehen aus dieser Gleichung, dass bei unveränderter Temperatur die Entropieänderung als Folge einer Druckänderung bei jeder Temperatur dieselbe ist. Wenn die Temperatur konstant ist, z. B. 273° abs., hat man

$$S - k = -R \log p,$$

wo k eine Konstante ist. Auf einer logarithmischen Druckskala eingezeichnet, ist also die Entropieänderung durch eine lineare Skala gegeben. Wir können auf diese Weise auf jedem Diagrammpapier längs einer Temperaturlinie $T = \text{konstant}$ eine Entropieskala einzeichnen. Auf Abb. 11 ist z. B. eine derartige Skala längs der Linie $T = 273^\circ$ eingezeichnet worden, und bei dieser Temperatur kann man dann direkt die Grösse der Entropie ablesen. Bei anderen Temperaturen folgt man den Trockenadiabaten von dem betrachteten Punkt P bis zu dieser Linie, wie Abb. 11 zeigt. Die Trockenadiabaten stellen ja auch Linien gleicher Entropie dar,

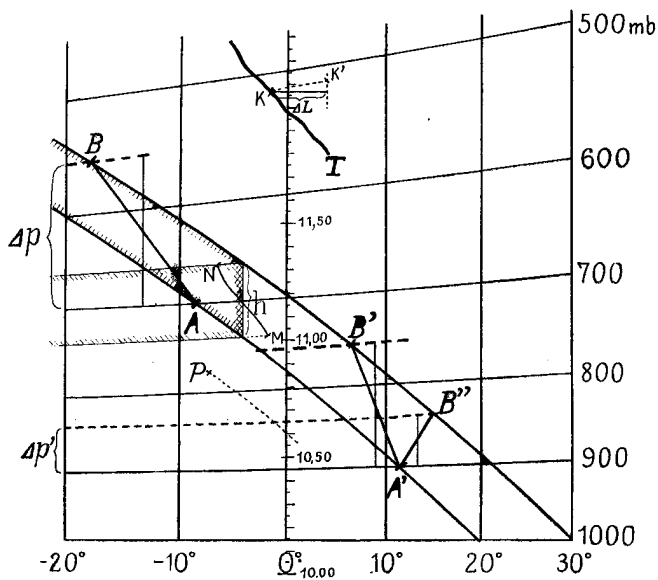


Abb. 11.

und auf diese Weise lässt sich für jeden Punkt auf dem Diagramm die Entropie schnell berechnen. Die Entropieskala auf Abb. 11 ist nach den Tabellen von Shaw berechnet, wo die Entropie bei der absoluten Temperatur 100° und dem Druck 1000 mb gleich Null ist.

Bekannt ist die Gleichung

$$S = c_p \log \vartheta + k,$$

wo ϑ die potentielle Temperatur und k eine Integrationskonstante ist. Der Logarithmus der potentiellen Temperatur ist in dieser Weise der Entropie proportional. So verfügt die Meteorologie über eine sehr übersichtliche Grösse, mit der man in den meisten Fällen ebenso gut wie mit der Entropie arbeiten kann. Es liegt daher kein Grund vor, einen so schwerfälligen Begriff wie die Entropie in die praktische Meteorologie einzuführen; bei rein theoretischen Betrachtungen ist es auch oft überflüssig.

§ 8. Die Änderung des Temperaturgradienten durch vertikale Verschiebung oder Ausbreitung einer Luftmasse.

Dieses Problem ist von Margules (1906) und Haurwitz (1931) analytisch behandelt worden. Es lässt sich aber, wie von Rossby gezeigt worden ist, besonders leicht graphisch lösen. Sein Verfahren, auf einem Emagramm durchgeführt, ist in «Meteorological Papers» vom Massachusetts Institute

of Technology, Vol. I, Nr. 2 veröffentlicht. Auf einem Aerogramm wird dieses Verfahren aber noch einfacher; ich stelle es daher in Kürze dar:

Wir betrachten (Abb. 11) eine Luftmasse mit demselben Temperaturgradienten zwischen Punkt A mit Druck 700 mb und Punkt B mit Druck 550 mb. Diese Luftmasse bewegt sich adiabatisch durch Vertikalverschiebung in der Art, dass die unteren Partikeln im Punkt A' z. B. den Druck 900 mb erhalten. Die oberen Partikeln in der Luftmasse bewegen sich bis an den Punkt B', wo der Druck 750 mb ist. Da keine horizontale Ausbreitung stattgefunden hat, ist nämlich der Druckunterschied zwischen den Punkten A' und B' gleich dem zwischen den Punkten A und B. Auf dem Aerogramm kann man nun in einfachster Weise den Höhenunterschied und den Temperaturunterschied zwischen den Punkten A und B und zwischen A' und B' berechnen und so den Temperaturgradienten vor und nach der vertikalen Verschiebung finden.

Wir betrachten nunmehr die Verhältnisse, wenn auch horizontale Ausbreitung stattfindet. Die oberen Partikeln in der Luftmasse bewegen sich dann noch weiter abwärts, z. B. nach dem Punkt B'', und die Temperaturkurve in der Luftmasse geht nach sowohl vertikaler Verschiebung, als auch horizontaler Ausbreitung von A' bis B''. Je grösser die horizontale Ausbreitung ist, desto höheren Druck können die oberen Partikeln erreichen. Wenn der Druckunterschied in der Schicht ursprünglich Δp (Abb. 11), und nach der Ausbreitung $\Delta p'$ ist, so hat eine Luftmasse, deren Querschnitt ursprünglich Q ist, nach der Ausbreitung den Querschnitt $Q \frac{\Delta p}{\Delta p'}$. Wenn man durch ein konservatives Element wie die spezifische Feuchtigkeit den Platz der sinkenden Luftmassen bestimmen kann, lässt sich aus den Druckunterschieden Δp und $\Delta p'$ die Grösse der horizontalen Ausbreitung berechnen.

§ 9. Das Thetagrammpapier von Moese und Schinze.

An dem Observatorium Krietern sind in den letzten Jahren wertvolle Versuche gemacht worden, um die verschiedenen Luftmassen durch ihre aerologischen Daten zu charakterisieren. Diese Fragen sind auch gleichzeitig am Massachusetts Institute of Technology untersucht worden (siehe § 11); es ist

sehr wertvoll, dass diese aerologische Luftmassenanalyse gleichzeitig in U. S. A. und in Europa begonnen hat, da die Eigenschaften der Luftmassen wahrscheinlich in mehrfacher Hinsicht geographisch ganz wesentlich verschieden sind. Während das Verfahren am Massachusetts Institute of Technology theoretisch begründet ist, sind die Verfahren von Schinze und Moese rein empirisch und knüpfen unmittelbar an Betrachtungen über die äquivalentpotentielle Temperatur nach Robitzsch an. Das Thetagramm von Moese und Schinze (1932) hat die äquivalentpotentielle Temperatur als Abszisse und die Höhe als Ordinate, und auf diesem Diagramm sind «homologe» Kurven eingezeichnet, die den durchschnittlichen Zustand verschiedener Luftmassen darstellen. Dies Verfahren ist übersichtlich und bietet gute Möglichkeiten, die verschiedenen Luftmassen in der Troposphäre zu erkennen. Die Arbeiten von Schinze (1932) legen überzeugend dar, wie sich in dieser Weise gut und zweckmässig arbeiten lässt. Es ist aber etwas unpraktisch, die Höhe als Ordinate zu benutzen. Man kann ebenso gut eine logarithmische Druckskala verwenden, wodurch Höhenberechnungen vermieden werden. Ein Emagramm oder Aerogramm mit Temperaturskala bis etwa 70° C gestattet auch, die Verfahren von Moese und Schinze anzuwenden; man hat dabei den Vorteil, auf demselben Diagrammpapier die gewöhnlichen Temperaturkurven und die in Breslau ausgearbeiteten Thetagrammkurven vorzufinden. Es ist also nicht notwendig, besondere Diagrammpapiere herzustellen.

§ 10. Das logDruck-logTemperatur-Diagramm.

In § 4 ist dargelegt (Gleichung 31), dass die Trockenadiabaten auf einem Diagrammpapier mit logarithmischer Druckskala und logarithmischer Temperaturskala geradlinig und parallel sind. Dieses Diagrammpapier ist aber keine flächentreue Transformation des Druck-Volumen-Diagramms, ist also kein energetisches Diagrammpapier, und daher oft im Gebrauch unpraktisch. Bei theoretischeren Untersuchungen eignet es sich aber oft gut; es wurde in § 4 bereits ein Beispiel dafür angeführt. Ich bringe hier noch ein paar weitere.

Wir betrachten (Abb. 12) auf einem Diagrammpapier mit logarithmischer Druckskala und logarithmischer Temperaturskala zwei Trockenadiabaten und zwei Isobaren, die durch die Punkte A und B

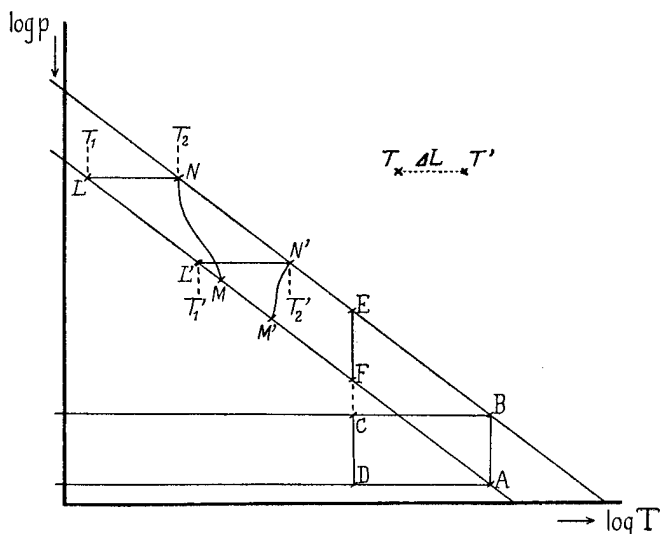


Abb. 12.

gehen. Da die Trockenadiabaten geradlinig und parallel sind, sehen wir, dass die Flächen ABCD und ABEF gleich gross sind. Dieses Verhältnis ändert sich auch nicht, wenn wir die Temperaturskala derart verschieben, dass sie linear wird und ein Emagramm bildet. Die entsprechenden Flächen auf einem Aerogramm werden dann aber auch gleich gross. In Abb. 11 stellt daher die Linie h die Grösse der beiden schraffierten Flächen dar, die sich bis an die unendlich weit entfernte Nulllinie der Temperatur erstrecken. Der Geopotentialunterschied von M bis N wird so durch zwei verschiedene Flächen dargestellt. (Vergleiche auch Abb. 3, p. 10).

Wir betrachten (Abb. 12) eine Luftmasse mit Temperaturverlauf von M bis N. Die Trockenadiabaten einer Partikel, die sich durch diese Schicht bewegt, ist durch die Grösse $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$ gegeben.

(Refsdal 1930.) Durch vertikale Verschiebung und durch horizontale Ausbreitung erhält diese Luftmasse bei adiabatischen Bewegungen den Temperaturverlauf von M' bis N'. Da die Trockenadiabaten auf diesem Diagrammpapier parallel laufen, sind die Linien L—N und L'—N' gleich gross. Wegen der logarithmischen Temperaturskala ist die Linie L—N durch die Grösse $k \log \frac{T_2}{T_1}$ und die Linie L'—N' durch die Grösse $k \log \frac{T_2'}{T_1'}$ gegeben, wo k eine von dem Masstab des Diagrammpapiers abhängige Konstante ist. Das ergibt

$$\log \frac{T_2}{T_1} = \log \frac{T_2'}{T_1'}$$

woraus

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2'}{T_1'} \text{ oder } \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{T_1' - T_2'}{T_2'} \text{ ist.}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Trockenlabilität der Partikel, die sich durch die Schicht bewegt, unabhängig von der Höhe der Schicht ist, wenn diese sich adiabatisch bewegt. Da die Trockenlabilität, mit der Beschleunigung der Schwere multipliziert, direkt die Kraft ergibt, die auf eine aufwärtsbewegte Partikel mit der Masse 1 wirkt, sind also diese Kräfte bei adiabatischen Höhenänderungen einer Schicht unverändert.

Wir betrachten in der Atmosphäre ein Niveau wo die Dichte ρ und die Temperatur T ist. In diesem Niveau befindet sich eine Masseneinheit mit Dichte ρ' und Temperatur T' . Auf diese Masseneinheit wirkt eine Kraft $g \frac{\rho - \rho'}{\rho'}$, welche wir mittels der Zustandsgleichung $\rho = \frac{p}{RT}$ gleich $g \frac{T' - T}{T}$ schreiben können. Auf dem $\log p$ - $\log T$ -Diagramm ist diese Kraft recht genau durch die Strecke ΔL (Abb. 12) gegeben. Die Länge dieser Linie ist nämlich $k \log \frac{T'}{T}$,

welche wir gleich $k \frac{T' - T}{T_m}$ schreiben können, wo T_m eine mittlere Temperatur zwischen T und T' ist. Mittels einer geeigneten Einheit beim Messen der Linie ΔL können wir die Konstante k gleich g erhalten. Die Länge der Linie ΔL mit dieser Einheit gemessen wird ein wenig grösser als $g \frac{T' - T}{T}$, wenn T grösser als T' ist, ein wenig kleiner, wenn T' grösser als T ist. Der Unterschied ist in den meisten Fällen bedeutungslos; wenn man aber die Linie ΔL mit zwei ein wenig verschiedenen Skalen misst, lässt sich dieser Unterschied beseitigen. Auf dem gedruckten Aerogramm, das ja auch eine logarithmische Temperaturskala hat, sind zwei Skalen eingezeichnet worden. Mit der Skala rechts oben am Rande des Diagrammpapiers misst man die Strecke ΔL , wenn T' grösser als T ist, also bei aufwärts gerichteten Beschleunigungen, während man bei abwärts gerichteten die entsprechende Skala links benutzt. Man muss nur auf dem Aerogramm darauf achten, dass man nicht längs der Isobaren misst, sondern den wirklichen Abstand zwischen den Temperaturlinien bestimmt. Auf Abb. 11 stellt z. B. T die Temperaturkurve einer Luftmasse dar. Eine Partikel

im Punkt K wird erwärmt und erreicht auf dem Aerogramm den Punkt K' . Die Beschleunigung der Partikel erhalten wir, wenn wir die Länge der Linie ΔL auf der Skala oben rechts auf dem Aerogramm absetzen.

Das $\log p$ - $\log T$ -Diagramm hat auch die Eigenschaft, die isothermen Linien geradelinig zu machen. Das ist aus der Differentialgleichung der isothermen Linien, $da = 0$ ersichtlich. Aus der Zustandsgleichung $pa = RT$ ergibt sich

$$pda + adp = RdT;$$

da das spezifische Volumen sich nicht ändert, ergibt sich $adp = RdT$; hier wird für a der Wert $a = \frac{RT}{p}$ eingeführt; daraus erhält man:

$$\frac{d(\log p)}{d(\log T)} = 1 \dots \dots \dots (37)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die isothermen Linien auf einem Diagrammpapier mit logarithmischer Druckskala und mit logarithmischer Temperaturskala geradelinig und parallel werden.

§ 11. Das Diagrammpapier von Rossby.

Am Massachusetts Institute of Technology sind in den letzten Jahren grosszügige theoretische und praktische Versuche gemacht worden, um charakteristische Eigenschaften verschiedener Luftmassen zu erforschen. (Earl and Turner 1930, Rossby 1932 und Wille t 1933.) In der Arbeit von Rossby ist ein neues Diagrammpapier konstruiert worden um «charakteristische Kurven» der Luftmassen einzeichnen zu können. Das Diagrammpapier hat die partiell-potentielle Temperatur von Rossby als Ordinate und den Wasserdampfgehalt je kg trockener Luft, also das Mischungsverhältnis, als Abszisse. Weiter sind Isothermen, Isobaren und Linien mit konstanter äquivalent-potentieller Temperatur (nach der Definition von Rossby) eingezeichnet. Die Isobaren beziehen sich auf den Druck der trockenen Luft. Wenn man die Isothermen nicht in Betracht zieht, sind sämtliche Linien auf Rossbys Diagrammpapier aus dem Druck der trockenen Luft berechnet worden, und hierin liegt der grosse Unterschied zwischen den gewöhnlichen Diagrammpapieren und Rossbys Diagrammpapier. Wenn man aber das Diagrammpapier von Rossby genau mit den gewöhnlichen Diagrammpapieren vergleicht, sieht man bald, dass es nur eine Transformation dieser

Diagrammpapiere ist. Die verschiedenen Linien, Isobaren, Isothermen, Trockenadiabaten, Kondensationsadiabaten und die Wasserdampflinien kreuzen sich nämlich in Rossbys Diagrammpapier und z. B. in dem neuen Diagrammpapier von Stüve überall in genau denselben Punkten. Dies bedeutet aber, dass man das Diagrammpapier von Rossby auch benutzen kann, wenn man wie gewöhnlich mit dem gesamten Luftdruck arbeitet. Dies scheint beim ersten Anblick recht erstaunlich, liegt aber daran, dass Rossby so konsequent mit dem Druck der trockenen Luft rechnet und statt der gewöhnlichen potentiellen Temperatur die partiell-potentielle Temperatur eingeführt und auch die Äquivalenttemperatur in neuer Weise definiert hat. Wenn man aber in Rossbys Diagramm annimmt, dass die Abszissen die maximale spezifische Feuchtigkeit und die Ordinaten die gewöhnliche potentielle Temperatur darstellen, dann stellen die Isobaren den gesamten Luftdruck dar und die äquivalent-potentiellen Linien im Sinne Rossbys werden zu pseudopotentiellen Temperaturlinien (Kondensationsadiabaten) nach Stüve. Wir können also auf Rossbys Diagramm genau wie auf einem gewöhnlichen Diagramm arbeiten, es sind nur zwei verschiedene Transformationen derselben Kurvenscharen. Daraus folgt aber, dass wir das von Rossby entwickelte Verfahren auch auf einem gewöhnlichen Diagrammpapier benutzen können. Rossby ist selbst darauf aufmerksam, er hat das neue Diagrammpapier konstruiert, um seine charakteristischen Kurven übersichtlicher und grösser darstellen zu können. Es ist aber ein grosser Vorteil, die charakteristischen Punkte und die charakteristischen Kurven von Rossby auf einem gewöhnlichen Diagrammpapier einzeichnen zu können, und es spielt in diesem Zusammenhang nur eine untergeordnete Rolle, dass die charakteristischen Kurven nicht so gross werden. Wir untersuchen daher, was die charakteristischen Punkte auf einem gewöhnlichen Diagramm, z. B. auf einem Emagramm darstellen. Die Ordinaten in Rossbys Diagramm können, wie gesagt, Trockenadiabaten und die Abszissen spezifische Feuchtigkeit darstellen. Um einen charakteristischen Punkt nach Rossby zu finden, benutzt man auf einem Emagramm folgendes einfache Verfahren: Die Temperaturkurve des Aufstieges ist bekannt und auf einem Emagramm eingezeichnet worden. Wir haben hier (Abb. 9) einen Punkt A mit bekannter relativer Feuchtig-

keit, z. B. 60 %. Die spezifische Feuchtigkeit beträgt dann 6 g je kg. Der charakteristische Punkt von Rossby wird dann der Punkt, wo diese Wasserdampflinie und die Trockenadiabate durch A sich schneiden, also der Punkt D. Der charakteristische Punkt von Rossby ist mit anderen Worten derjenige Punkt auf dem Emagramm, in dem die Kondensation beginnt. Dieser Punkt lässt sich, wie Abb. 9 zeigt, graphisch sehr leicht finden, und wenn man für alle Punkte A der Temperaturkurve die entsprechenden D-Punkte ermittelt und diese Punkte verbindet, hat man die charakteristische Kurve nach Rossby. Da man bei energetischen Untersuchungen immer die Punkte D ermitteln muss, um den Temperaturverlauf aufsteigender Luft zu ersehen, erhält man die charakteristischen Punkte und die charakteristischen Kurven nach Rossby als ein Nebenergebnis der gewöhnlichen energetischen Betrachtungen. Dies ist ein grosser Vorteil, und da man auf einem gewöhnlichen Diagrammpapier rein graphisch, und dadurch schnell und übersichtlich, arbeiten kann, wird das neue Diagrammpapier von Rossby eigentlich überflüssig. Die grundlegenden theoretischen Betrachtungen über die charakteristischen Punkte und die charakteristischen Kurven, die Rossby durchgeführt hat, behalten aber selbstverständlich ihren Wert. Es liegt jetzt nahe, die charakteristischen Kurven nach Rossby auf den gewöhnlichen Diagrammpapieren einzuzichnen. Diese Kurven ersetzen mit Vorteil die «Depegramm»-Kurven von Shaw (1930). Die Depegrammkurve ist eine Taupunktkurve, die entsteht, wenn man für alle Punkte der Temperaturkurve den Isobaren folgt, bis man die Temperatur des Taupunktes erreicht. In Abb. 9 zeigt so der Punkt E und in Abb. 10 der Punkt A' den Taupunkt des Punktes A. Der Taupunkt lässt sich also auf zwei verschiedene Arten graphisch bestimmen. Die Verbindung aller Taupunkte ergibt die Depegrammkurve von Shaw. Diese Kurve sagt aber nicht viel aus. Meines Erachtens erhält man einen ebenso guten Überblick über die Feuchtigkeitsverhältnisse, wenn man der Temperaturkurve die Zahlen für die relative Feuchtigkeit beifügt. Wenn man aber statt der Depegrammkurve die charakteristische Kurve von Rossby einzeichnet, erhält man eine Kurve, die theoretisch wie praktisch von grossem Interesse ist.

In charakteristischen Kurven von Rossby zeigen

sich die Inversionen verstärkt, wenn die relative Feuchtigkeit mit der Höhe wächst, verkleinert, wenn die relative Feuchtigkeit abnimmt. Um dies zu zeigen, betrachten wir auf einem Emagramm ($\log p$ - T -Diagramm) zwei Punkte A und B mit derselben Temperatur und derselben relativen Feuchtigkeit, aber mit verschiedenem Druck. Wir untersuchen die entsprechenden charakteristischen Punkte A' und B' und werden zeigen, dass sie in diesem Falle auch dieselbe Temperatur haben.

Die maximale spezifische Feuchtigkeit ist mit recht grosser Genauigkeit durch die Gleichung

$$M_m = \frac{0,623 e_m}{p}$$

gegeben, wo e_m den maximalen Dampfdruck bedeutet. Durch logarithmische Ableitung ergibt sich:

$$\frac{dM_m}{M_m} = d(\log e_m) - d(\log p).$$

Die Differentialgleichung der Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit ist $dM_m = 0$, woraus sich ergibt:

$$d(\log p) = d(\log e_m).$$

Nun ist e_m nur von der Temperatur abhängig. Wir setzen $\log e_m$ gleich einer Funktion $f(T)$ der Temperatur und erhalten

$$d(\log p) = d(f(T))$$

als die Differentialgleichung der Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit mit den Koordinaten p und T . Auf einem Emagramm, wo die Druckskala ja logarithmisch ist, schneiden daher alle diese Linien dieselbe Temperaturlinie unter demselben Winkel. Die Differentialgleichung der Trockenadiabaten (Gleichung 31) können wir so schreiben:

$$d(\log p) = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{dT}{T}.$$

Auf einem Emagramm schneiden so auch alle Trockenadiabaten dieselbe Temperaturlinie unter demselben Winkel. Diese Eigenschaft der Trockenadiabaten und der Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit werden wir jetzt benutzen.

Von den Punkten A und B (Abb. 13) mit der relativen Feuchtigkeit $r\%$ und mit gleicher Tem-

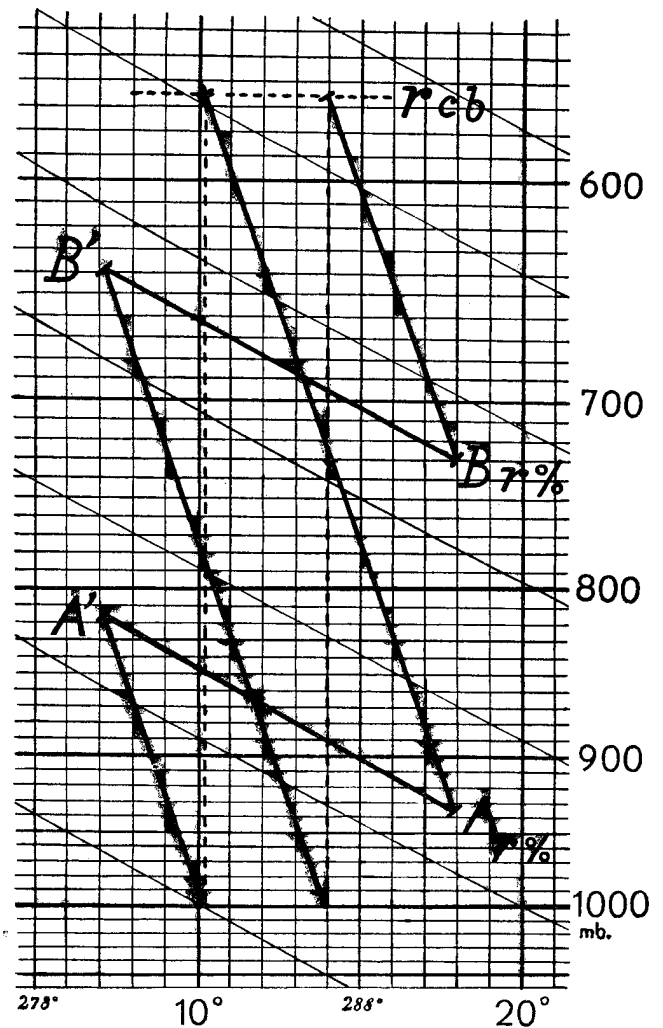


Abb. 13.

peratur gehen wir erst längs der Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit bis an die Drucklinie r cb. Von dort ab bewegen wir uns isotherm bis 100 cb, und von dort wieder längs der Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit bis an die Trockenadiabate durch den betrachteten Punkt. Da die Trockenadiabaten wie die Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit jede einzelne Temperaturlinie unter demselben Winkel schneiden, ergibt sich, dass auch die Punkte A' und B' an derselben Temperaturlinie liegen müssen. Wenn aber die relative Feuchtigkeit in B grösser als $r\%$ wäre, erhielte der charakteristische Punkt B' eine höhere Temperatur als der Punkt A'. Das Umgekehrte würde gelten, wenn die relative Feuchtigkeit in B kleiner als $r\%$ wäre. Da die relative Feuchtigkeit in Luft über einer Aufgleitfläche gross und über einer Abgleitfläche klein ist,

verstärken sich die Inversionen an Aufgleitflächen in den charakteristischen Kurven, während die Inversionen an Abgleitflächen sich abgeschwächt zeigen. Die charakteristischen Kurven sind daher, wie auch R o s s b y gezeigt hat (1932), gut geeignet, um die Aufgleitflächen zu finden. Bekanntlich ist dies auch bei den Äquivalenttemperaturkurven der Fall. Eine Inversion verstärkt sich hier, wie man leicht einzieht, wenn die spezifische Feuchtigkeit mit der Höhe zunimmt. Die charakteristischen Punkte A' und B' stellen die Punkte beginnender Kondensation

dar, wenn die Partikeln in den Punkten A und B sich adiabatisch aufwärts bewegen. Bei derselben Temperatur und derselben relativen Feuchtigkeit in den zwei Punkten wird die adiabatische Abkühlung der Partikeln auch dieselbe, und daraus folgt, dass die Kondensationshöhe der Partikeln, von der ursprünglichen Höhe gemessen, auch dieselbe wird. Die Kondensationshöhe einer Partikel ist also nur von der Temperatur und von der relativen Feuchtigkeit der Partikel abhängig.

AEROLOGISCHE DIAGRAMMPAPIERE

VON ANFINN REFSDAL

TEIL II

VORWORT

In Technik und Wissenschaft haben das Druck-Volumen-Diagramm und das Entropie-Temperatur-Diagramm auch bei rein theoretischen Betrachtungen eine ausgedehnte Anwendung gefunden. Das graphische Verfahren auf diesen Diagrammpapieren führt eine bedeutend bessere Übersicht über die Probleme mit sich und zeigt sich in dieser Weise als ungemein fruchtbar. In der Meteorologie hat von *Bezold* (1889) zum ersten Mal bei rein theoretischen Betrachtungen systematischen Gebrauch von dem Druck-Volumen-Diagramm gemacht, und später hat *Shaw* das Entropie-Temperatur-Diagramm sowohl in der theoretischen als in der praktischen Meteorologie eingeführt. Da wir jetzt auch andere flächentreue Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms kennen, liegt heute die Möglichkeit vor, im jeweiligen Falle ein besonders geeignetes Diagrammpapier zu verwenden. In den meisten Fällen zeigt sich das Druck-Volumen-Diagramm oder das Emagramm am geeignetsten. Wenn eine Fläche auf dem Druck-Volumen-Diagramm im Sinne des Uhrzeigers umkreist wird, erhalten wir eine positive Fläche, was zeigt, dass Arbeit geleistet wird. Auf dem Emagramm oder auf dem Aerogramm in der gewöhnlichen Ausführung erhalten wir eine positive Fläche, wenn diese im Gegensinne des Uhrzeigers umkreist wird.

Wenn man bei rein theoretischen Betrachtungen energetische Diagrammpapiere benutzt, denkt man sich zweckmässig, dass die Diagrammpapiere in «natürlicher» Grösse vorliegen. Zwischen zwei Drucklinien p_1 und p_2 auf einem Druck-Volumen-Diagramm wird z. B. dann der Abstand gleich $(p_2 - p_1)$ Längeneinheiten; das gleiche gilt für die Linien des spezifischen Volumens. Eine Fläche F zwischen den Linien p_1 und p_2 und den Linien α_1 und α_2 erhält dann die Grösse $(p_2 - p_1) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$, und die Solenoidanzahl zwischen diesen Linien ist auch $(p_2 - p_1) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$. Einer Fläche F auf dem Druck-Volumen-Diagramm entspricht so eine Solenoidanzahl F oder eine Energiemenge F je Masseneinheit. Wie Gleichung 14 zeigt, hat die entsprechende Fläche auf dem Entropie-Temperatur-Diagramm auch die Grösse F . Auf einem Emagramm (oder Aerogramm) erhält aber diese Fläche eine andere Grösse F' , die laut Gleichung 16 (oder 20) in folgender Weise mit F verbunden ist: $F = RF'$. Einer Fläche F' auf einem Emagramm oder Aerogramm in «natürlicher» Grösse entspricht so eine R -mal so grosse Energiemenge je Masseneinheit oder eine R -mal so grosse Solenoidanzahl wie die Grösse der Fläche.

Wir werden in den nächsten Paragraphen einige Beispiele über die Verwendung von Diagrammpapieren bei rein theoretischen Problemen zeigen. Wir werden auch bei einigen Problemen Diagrammpapiere benutzen, die keine flächentreuen Transformationen des Druck-Volumen-Diagramms sind.

Teil II ist hauptsächlich in den Jahren 1934—36 geschrieben.

§ 12. Solenoide und Druckfeld.

Wir betrachten (Abb. 14) zwei benachbarte Luftmassen mit vertikalen Zustandskurven B—A und B'—A' auf einem Druck-Volumen-Diagramm. Die Punkte B und B' liegen auf demselben Niveau; das ist auch bei den Punkten A und A' der Fall. Der Geopotentialunterschied von B bis A ist also gleich dem Geopotentialunterschied von B' bis A'. Daraus folgt, dass die Fläche CABDC gleich der Fläche C'A'B'D'C' ist, und weiter, dass die Fläche DBED'D gleich der Summe der Flächen EB'A'AE und AA'C'CA ist. Fügen wir jetzt auf beiden Seiten die Fläche BB'EB hinzu, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\text{Fläche DBB'D'D} = \\ &\text{Fläche BB'A'AB} + \text{Fläche CAA'C'C}. \end{aligned}$$

Die Fläche BB'A'AB ist gleich der Anzahl Solenoide zwischen den Kurven B—A und B'—A' und den betrachteten Niveaulächen. Wir bezeichnen diese Solenoidanzahl mit F . Die Fläche DBB'D'D können wir gleich $\bar{\alpha}_0 (p_0 - p'_0) = \bar{\alpha}_0 \Delta p_0$ setzen, wo $\bar{\alpha}_0$ eine mittlere Dichte zwischen den Punkten B

und B' bezeichnet. Dementsprechend erhält man für die Fläche CAA'C'C den Ausdruck $\bar{\alpha}_h \Delta p_h$ und kann die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$F = \bar{\alpha}_0 \Delta p_0 - \bar{\alpha}_h \Delta p_h. \dots \dots \dots (38)$$

Die Solenoidanzahl zwischen zwei Luftmassen innerhalb zweier Niveaus lässt sich in dieser Weise aus den Druckunterschieden und den mittleren spezifischen Volumen in den zwei Niveaus bestimmen. Die Gleichung lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\Delta p_0 = \frac{F}{\bar{\alpha}_0} + \frac{\bar{\alpha}_h}{\bar{\alpha}_0} \Delta p_h. \dots \dots \dots (39)$$

Wenn eine Luftmasse durch eine andere ersetzt wird, ergibt diese Gleichung die am Boden entstandene Druckänderung. Wie man sieht, ist diese Druckänderung teils durch die Solenoide zwischen den Luftmassen in der Schicht vom Niveau Null bis zum Niveau h , teils durch Druckänderungen über dem Niveau h bedingt. Wenn Δp_h gleich Null ist, wird die Druckänderung am Boden nur durch die Solenoide *unter* dem Niveau h und durch das mittlere spezifische Volumen am Boden bestimmt.

Die nächste Frage ist, ob in der Atmosphäre Druckänderungen entstehen können, die nicht durch Solenoide bedingt sind. Wir betrachten zwei Luftmassen mit genau derselben Zustandskurve vom Boden mit dem Druck p_0 bis an die Atmosphären-grenze. Zwischen diesen Luftmassen existieren dann keine Solenoide. Unter der einen Luftmasse entfernen wir dann eine Luftmenge mit dem Gewicht Δp_0 je Flächeneinheit. Dadurch senkt sich die ganze darüberliegende Atmosphäre wie ein Kolben, und der Druck am Boden sinkt um den Betrag Δp_0 . Bei dieser Vertikalbewegung bleiben Druck und Temperatur jeder Partikel unverändert; die Zustandskurve der Luftmasse bleibt also auch unverändert, sie ist nur etwas verkürzt worden und geht jetzt bis zum Druck $p_0 - \Delta p_0$. Da die Zustandskurven der zwei Luftmassen sich auch jetzt decken und nur von verschiedener Länge sind, gibt es auch

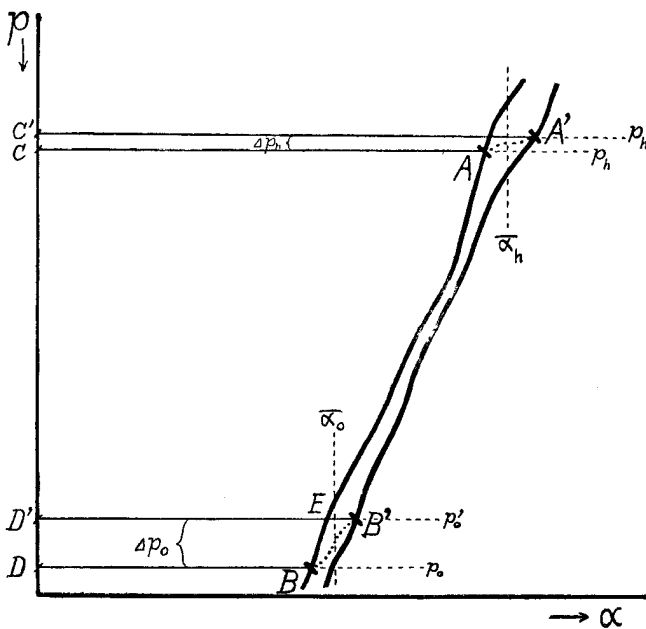


Abb. 14.

jetzt keine Solenoide zwischen den Luftmassen. Die Druckänderung Δp_0 ist also in diesem Falle nur durch Einsenkung der ganzen Atmosphäre entstanden. Entsprechend kann eine Drucksteigerung am Boden durch Ausbauschung der ganzen Atmosphäre ohne Änderungen der Solenoidanzahl entstehen. Wir sehen also, dass die Druckänderungen in einem Niveau entweder durch Solenoideinfluss oder durch Einsenkungen oder Ausbauschungen der ganzen Atmosphäre entstehen können.

Um die Gleichung 38 physikalisch übersichtlich zu machen, denken wir uns, dass der horizontale Abstand zwischen den Punkten B und B' nur eine kleine Strecke ds ist, mit entsprechenden kleinen Druckunterschieden dp_0 und dp_h und einer entsprechenden dazwischenliegenden Solenoidanzahl dF . Die Gleichung 38 können wir dann so schreiben:

$$\alpha_0 \frac{dp_0}{ds} - \alpha_h \frac{dp_h}{ds} = \frac{dF}{ds} \dots \dots (40)$$

$\alpha \frac{dp}{ds}$ ist bekanntlich die Gradientkraft je Masseneinheit und $\frac{dF}{ds}$ wird die darüberliegende Solenoidanzahl je Längeneinheit. Gleichung 40 besagt also:

Innerhalb der betrachteten Luftmasse ist die Änderung in der horizontalen Gradientkraft je Masseneinheit gleich der Solenoidanzahl je Längeneinheit.

Diese Gleichung zeigt daher, dass die Solenoide sich im horizontalen Druckfeld nicht maskieren können, da sie die Änderungen in der horizontalen Gradientkraft je Masseneinheit bewirken.

Wenn wir annehmen, dass das obere Niveau mit Druck p_h in sehr grosser Höhe liegt und dass die horizontale Gradientkraft je Masseneinheit hier gleich Null ist, dass also die Luftmassen hier in Ruhe liegen, wird $\alpha_0 \frac{dp_0}{ds} = \frac{dF}{ds}$. Die Solenoidanzahl in der Atmosphäre ist also in diesem Falle je Längeneinheit gleich der horizontalen Gradientkraft je Masseneinheit am Boden.

Wenn die Druckänderungen am Boden nur durch Einsenkungen oder Ausbauschungen der ganzen Atmosphäre entstehen, gibt es, wie gezeigt wurde, keine Solenoide in der Atmosphäre. In diesem Falle ist also die Gradientkraft je Masseneinheit in allen Niveaus dieselbe.

Wenn wir geradlinig unbeschleunigte Bewegung, also stationäre Verhältnisse betrachten, werden

$$\alpha_0 \frac{dp_0}{ds} = 2 \omega \sin \varphi v_0 \quad \text{und} \quad \alpha_h \frac{dp_h}{ds} = 2 \omega \sin \varphi v_h,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, φ die Breite und v den Gradientwind bedeutet. Aus Gleichung 40 erhalten wir dann:

$$v_0 - v_h = \frac{dF}{2 \omega \sin \varphi ds}$$

Diese Formel ist dieselbe wie eine Formel von S a n d s t r ö m, nur etwas anders geschrieben.¹⁾

Im praktischen Wetterdienst ist es üblich, den Druckgradienten in mb/111 km auszudrücken. (111 km = 1° Breitendifferenz). Da aber die Druckeinheit im Meter-Tonnen-Sekunden-System der Centibar ist, sind wir wegen der Gleichung 40 gezwungen, den Druckgradienten in cb/111 km auszudrücken. Die Solenoidanzahl ist nämlich im Meter-Tonnen-Sekunden-System gegeben, und es fällt in dieser Weise natürlich, Druckgradienten in cb und Solenoide je 111 km auszudrücken. Aus der Gradientkraft je Masseneinheit kann man im stationären Falle für geradlinige, unbeschleunigte und reibungslose Bewegungen die «zugehörige» Windgeschwindigkeit, den Gradientwind, berechnen. In diesem Falle hat man die Gleichung $\bar{\alpha} \Delta p / 111 \text{ km.} = 2 \omega \sin \varphi v$, wo v den Gradientwind bedeutet. In Abb. 15 ist $\bar{\alpha} \Delta p$ je 111 km als Ordinate und der Gradientwind in m je Sekunde als Abszisse eingezeichnet worden. Die schrägen Linien geben bei verschiedenen Breiten den Zusammenhang zwischen $\bar{\alpha} \Delta p$ je 111 km und dem Gradientwind. $\bar{\alpha}$ ist in m³/ton und Δp in Centibar gegeben. Der Wert 700 für $\bar{\alpha} \Delta p$ je 111 km entspricht also bei 60° einem Gradientwind von 50 m/sec. Wie Gleichung 40 zeigt, bewirkt die Solenoidanzahl je Längeneinheit eine Änderung der horizontalen Gradientkraft je Masseneinheit und folglich auch des Gradientwindes. Abb. 15 zeigt daher auch, wie die Solenoidanzahl je 111 km den Gradientwind ändert. 700 Solenoide je 111 km ändern z. B. bei 60° den Gradientwind um 50 m/sec.

Da man auf dem Aerogramm das spezifische Volumen graphisch bestimmen kann, ergibt sich die Grösse $\bar{\alpha} \Delta p$ durch eine einfache Multiplikation. Das Aerogramm gestattet aber auch, die Grösse $\bar{\alpha} \Delta p$ rein graphisch ohne jede Rechnung zu bestimmen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die statische Grundgleichung, die wir in folgender Weise schreiben können: $\bar{\alpha} \Delta p = - \Delta \Phi$. Auf dem Aerogramm ist aber $\Delta \Phi$ in dyn. dm durch den vertikalen Abstand

¹⁾ Siehe z. B. «Dynamische Meteorologie» von K o s c h m i e d e r, S. 355.

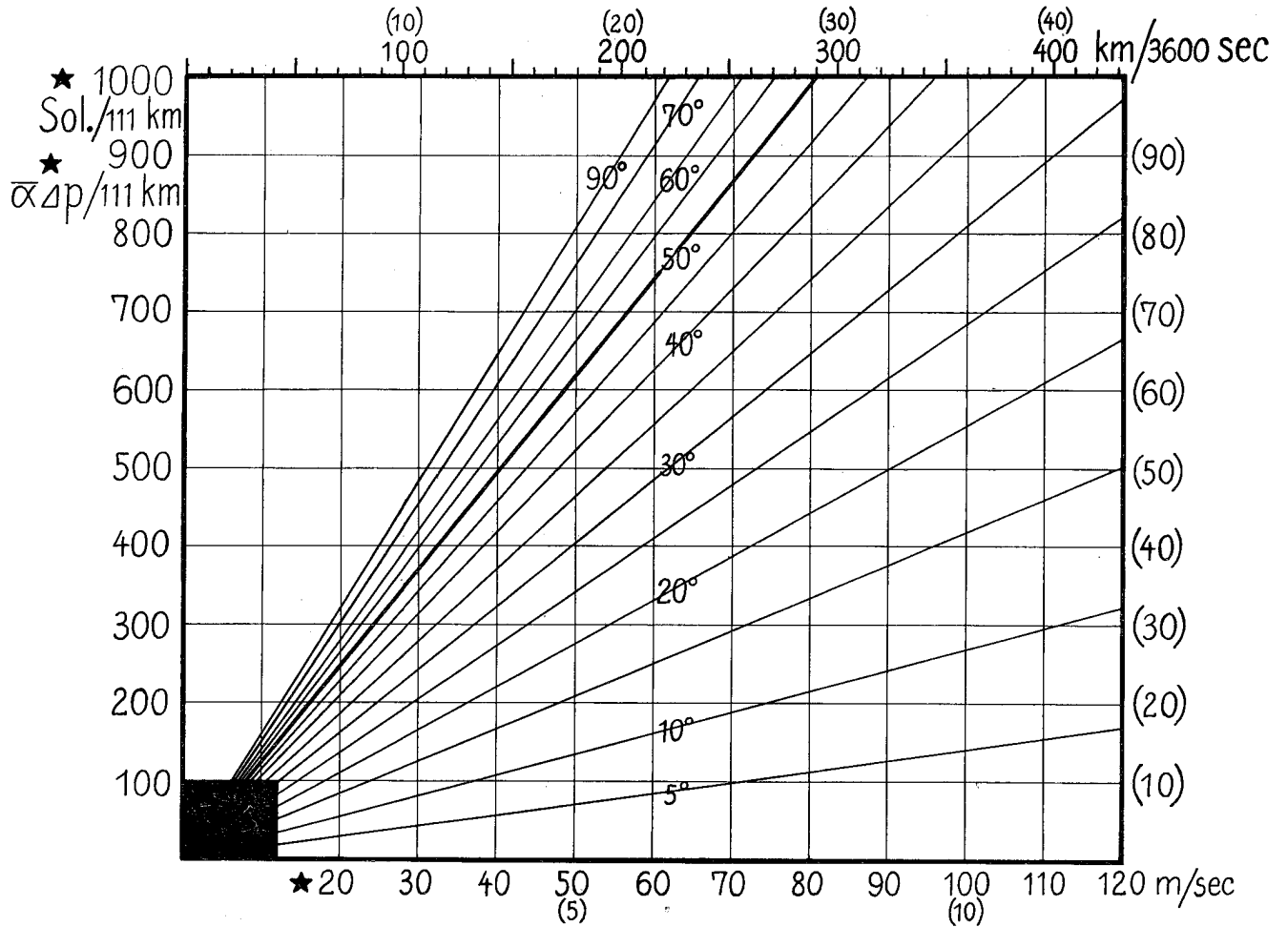


Abb. 15.

zwischen den Drucklinien p und $p + \Delta p$ an der betrachteten Stelle gegeben. Nun ist $\Delta \Phi$ bei diesen Berechnungen im allgemeinen eine sehr kurze Strecke auf dem Aerogramm und daher schwer genau zu messen. Man macht daher zweckmässig Δp zehnmal so gross, wodurch auch $\Delta \Phi$ zehnmal so gross wird. Wenn man dann diese zehnmal so grosse Strecke in dyn. m statt in dyn. dm misst, erhält man die korrekte Zahl für $\bar{\alpha} \Delta p$, wo $\bar{\alpha}$ in m^3/ton und Δp in cb gegeben ist. Sämtliche Berechnungen über den Zusammenhang zwischen Solenoiden, Druckfeld und Gradientwind lassen sich in dieser Weise mittels des Aerogramms und der Abb. 15 auf rein graphischem Wege durchführen. Um die Einfachheit dieser Methode zu zeigen, behandeln wir folgende Beispiele:

1. Die Stationen A und B auf Breite 50° liegen 3 Meridiangrade (333 km) voneinander entfernt. Der Druck in A ist 102,0 cb, in B 102,3 cb. Zwischen

den Zustandskurven über A und B (Abb. 16) liegen bis 5000 dyn. m 400 Solenoide. Die mittlere Temperatur zwischen A und B ist am Boden $17,5^\circ \text{C}$. und in 5000 dyn. m — $3,5^\circ \text{C}$. Wie gross ist der Gradientwind senkrecht auf die Linie A—B am Boden und in 5000 dyn. m? Wie gross ist der Druckunterschied in 5000 dyn. m?

Wir bestimmen erst die Grösse $\bar{\alpha} \Delta p$ am Boden und bezeichnen diese Grösse mit $\bar{\alpha}_0 \Delta p_0$. Wir messen bei $17,5^\circ$ in dyn. m die Strecke h_0 , die am Boden über 3 cb geht (Abb. 16), da der Druckunterschied hier 3 mb war. Wir erhalten $h_0 = 245$ dyn. m und sehen also, dass $\bar{\alpha}_0 \Delta p_0$ im Meter-Tonnen-Sekunden-System den Wert 245 hat. Da bis 5000 dyn. m 400 Solenoide zwischen den Zustandskurven liegen, ist nach Gleichung 38

$$\bar{\alpha}_h \Delta p_h = \bar{\alpha}_0 \Delta p_0 - F = 245 + 400 = 645.$$

Ein Aufriss (wie Abb. 16) zeigt, dass in diesem Falle $\bar{\alpha}_0 \Delta p_0$ und die Solenoidanzahl positive Zahlen

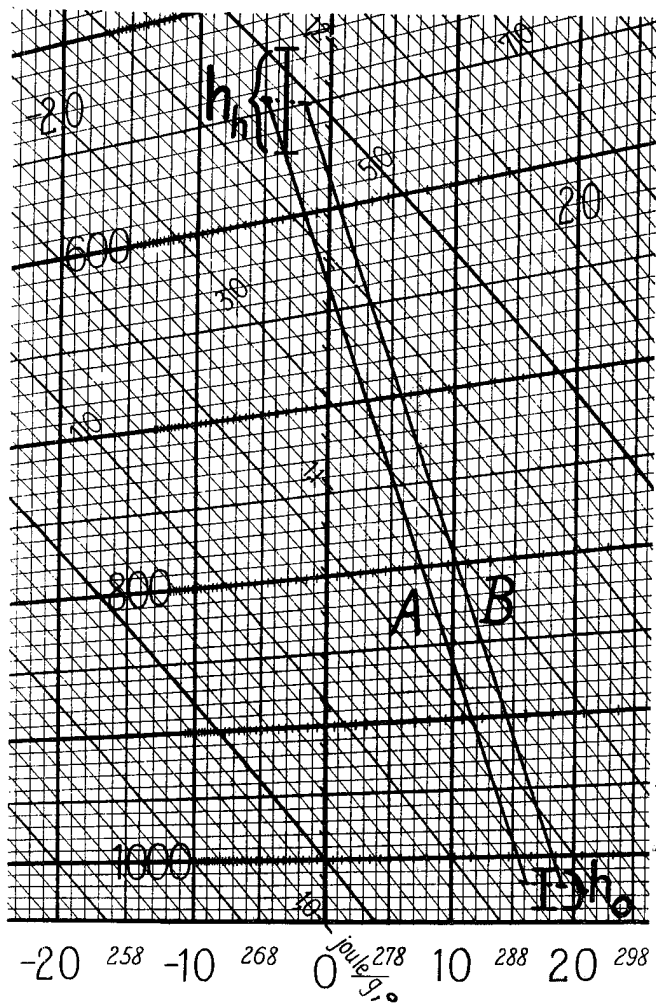


Abb. 16.

ergeben, die addiert werden müssen. Die Strecke $h_h = 645$ dyn. m bringen wir (Abb. 16) in 5000 dyn. m bei $-4,5^\circ$ an und ersehen, dass sie sich über 4,6 cb erstreckt. Der Druckunterschied in 5000 dyn. m zwischen den Stationen B und A ist also 4,6 mb.

Am Boden war $\bar{\alpha} \Delta p$ gleich 245 und in 5000 dyn. m gleich 645. Da der Abstand zwischen den Stationen 3 Meridiangrade war, erhalten wir

$$\bar{\alpha}_0 \Delta p_0 / 111 \text{ km.} = 82 \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}_h \Delta p_h / 111 \text{ km.} = 215.$$

Aus Abb. 15 ersehen wir, dass der Gradientwind senkrecht auf die Linie A—B am Boden 6.6 m/sec und in 5000 dyn. m 17,5 m/sec wird. Weiter sieht man, dass 400 Solenoide auf 3 Meridiangrade oder 133 sol./111 km den Gradientwind ungefähr um 11 m/sec ändern.

2. Wir haben eine ruhige Wetterlage mit Land- und Seewind an der Küste. Nachmittags ist der

Druck über Land 1 mb tiefer als über Meer und spät nachts umgekehrt. Wie viele Solenoide gibt es nachmittags oder spät nachts zwischen der Luft über Land und über See? Die mittlere Temperatur im Etmal ist 20°C , und der mittlere Druck am Boden ist 1015 mb. Da der Druckunterschied 1 mb war, messen wir in dyn. m die Länge eines Centibars von 101 cb bis 102 cb bei der Temperatur 20° und erhalten 85 dyn. m. $\bar{\alpha}_0 \Delta p_0$ hat also den Wert 85. Da die Wetterlage ruhig war, ist in recht kleiner Höhe, wahrscheinlich schon in 1000 dyn. m, $\bar{\alpha}_h \Delta p_h$ gleich Null. Gleichung 38 ergibt dann direkt

$$F = \bar{\alpha}_0 \Delta p_0 = 85.$$

Die Solenoidanzahl im Meter-Tonnen-Sekunden-System zwischen der Luft über Land und über See nachmittags oder spät nachts ist also 85.

§ 13. Korrespondierende Druckänderungen in höheren Luftschichten und am Boden.

Der Zusammenhang zwischen Druckänderungen in der Höhe und am Boden ist von einer Reihe von Verfassern behandelt worden. Das korrekte Berechnungsverfahren ist zum ersten Mal von Hesselberg (1915) gegeben. Seine Formeln sind aber recht kompliziert und daher unbequem im Gebrauch. Die Mitteltemperatur der Luft zwischen den betrachteten Schichten kommt z. B. in der zweiten Potenz vor, welches bei den zahlenmässigen Berechnungen leicht grössere Fehler mit sich führt. Haurwitz hat z. B. (1927) mit Hilfe der Formeln von Hesselberg Druckänderungen am Boden berechnet, die, wie wir später sehen werden, bisweilen mehr als 100 % zu gross sind. 1926 ist es aber Steiner gelungen, eine sehr einfache Formel abzuleiten, die für zahlenmässige Berechnungen gut geeignet ist. Später hat auch Rossby (1927) unabhängig von ihm genau dieselbe Formel gefunden. Wir werden sehen, dass sich diese einfache Formel auf graphischem Wege sehr leicht ableiten lässt und dass man dann auch gesättigte Luft in Betracht ziehen kann. Wie Steiner betrachten wir nur infinitesimale Änderungen und behandeln erst die Frage unter der Voraussetzung, dass die Zustandsänderungen in der Luftsäule trockenadiabatisch erfolgen.

Wir betrachten (Abb. 17) auf einem Druck-Volumen-Diagramm die vertikale Zustandskurve A—B einer Luftmasse, die in vertikalem statischem

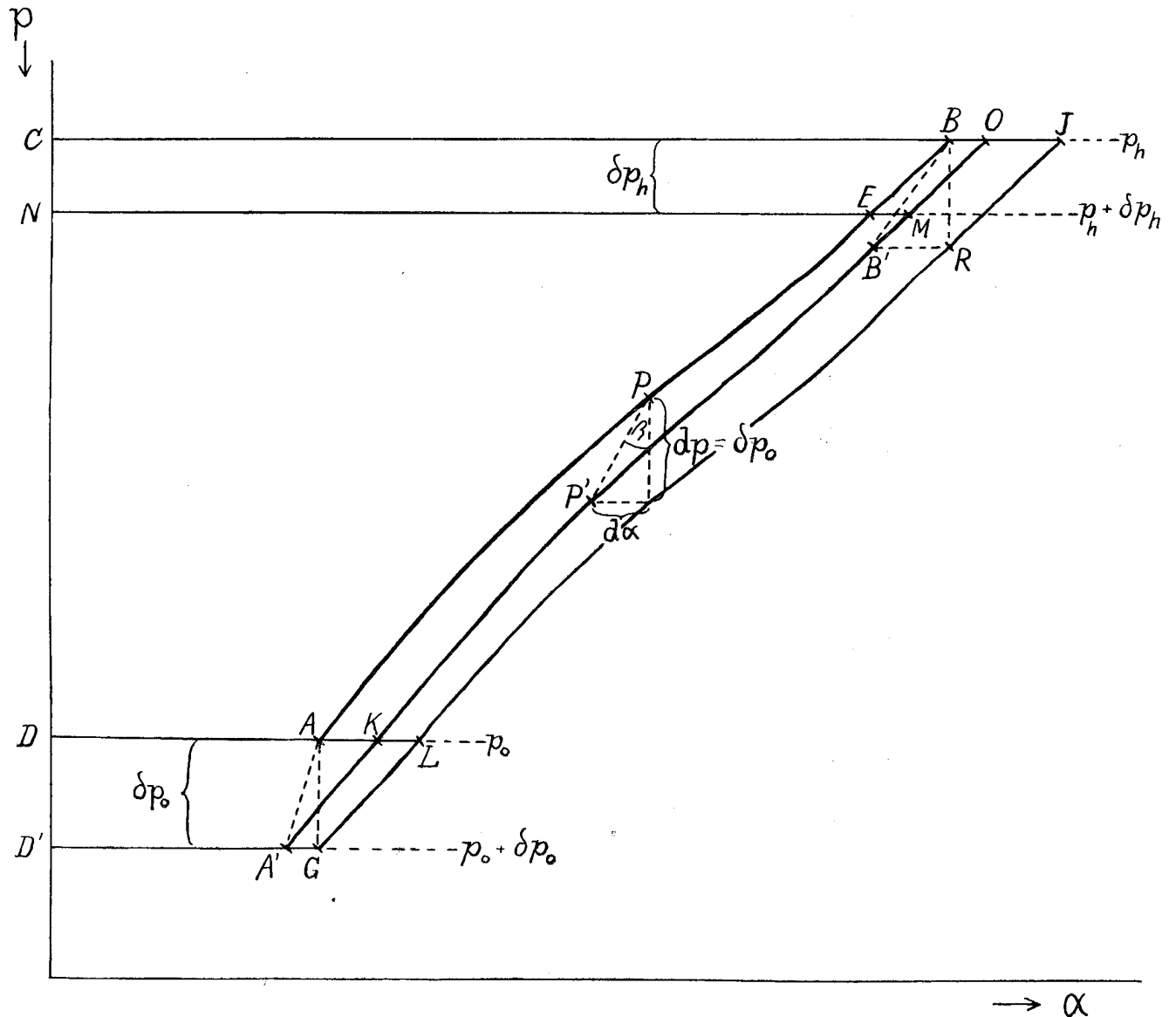


Abb. 17.

Gleichgewicht ist. In den Schichten oberhalb B entsteht eine Massenzufuhr, deren Gewicht je Flächeneinheit dp ist. Dadurch ändern sich die Druckverhältnisse der ganzen darunterliegenden Luftmasse; die Luftmasse wird etwas zusammengedrückt und vertikales statisches Gleichgewicht wird wieder erreicht. Wir setzen voraus, dass in der Luftmasse die Reihenfolge der Schichten sich nicht ändert und dass keine horizontalen Bewegungen lokale Massenänderungen bewirken. Jede Luftpartikel erhält dann eine individuelle Drucksteigerung dp , da der Druck in statischen Gleichgewicht dem Gewicht der darüberliegenden Luft entspricht. Am Boden mit Druck p_0 erhalten wir

eine lokale Druckänderung $\delta p_0 = dp$; wir werden jetzt untersuchen, wie gross die lokale Druckänderung δp_h in der Höhe B mit Druck p_h wird. Wir setzen hier voraus, dass dp im Verhältnis zu dem Druck p eine infinitesimale Grösse ist.

Der Geopotentialunterschied zwischen A und B ist durch die Fläche ABCDA dargestellt (Abb. 17). Jede Partikel in der Zustandskurve A—B erhält eine individuelle Druckänderung $dp = \delta p_0$, und wir bekommen die Zustandskurve A'—B'. (Um die Abbildung übersichtlich zu machen, ist dp recht gross gezeichnet). Die Punkte A und A' liegen am Boden, also auf demselben Niveau. B' liegt aber wegen des Zusammensinkens der Luftmasse auf einem

tiefere Niveau als B. An der Kurve A'—B' liege der Punkt M in derselben Höhe wie ursprünglich B. In dieser Höhe ist eine lokale Druckänderung δp_h entstanden. Da der Geopotentialunterschied zwischen A und B gleich dem Geopotentialunterschied zwischen A' und M ist, werden auch die Flächen ABCDA und A'MND'A' gleich gross. Daraus folgt, dass die Fläche NEBCN gleich der Summe der Flächen D'A'ADD' und A'MEAA' wird. Da wir nur infinitesimale Druckänderungen betrachten, ist die Fläche NEBCN gleich $\alpha_h \delta p_h$ und die Fläche D'A'ADD' gleich $\alpha_0 \delta p_0$. Die Fläche A'MEAA' bezeichnen wir mit F und erhalten:

$$\alpha_h \delta p_h = \alpha_0 \delta p_0 + F \dots \dots \dots (41)$$

Wir suchen dann einen Ausdruck für die Fläche F und betrachten zu diesem Zwecke einen beliebigen Punkt P der Kurve A—B. Der Druck der Partikel in P ändert sich um den Betrag $dp = \delta p_0$, und die betrachtete Luftpartikel verschiebt sich dadurch längs der Trockenadiabate bis zum Punkt P'. Dadurch ändert sich das spezifische Volumen um den Betrag da , und Abb. 17 zeigt, dass $da = \delta p_0 \operatorname{tg} \beta$ ist, wo β der Winkel zwischen der Trockenadiabate und der isosteren Linie im Punkt P ist. Nun können wir $\operatorname{tg} \beta$ aus der Gleichung der Trochenadiabaten berechnen. Diese Gleichung ist

$$dq = c_v dT + p da = 0 \text{ oder } dq = c_p dT - adp = 0;$$

da $\operatorname{tg} \beta = \frac{-da}{dp}$, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c_v dT}{p} \frac{\alpha}{c_p dT} = \frac{c_v \alpha}{c_p p}.$$

Wir haben demnach

$$da = \delta p_0 \frac{c_v \alpha}{c_p p}$$

Die Fläche F können wir nun, da wir nur infinitesimale Druckänderungen betrachten, als die Fläche AGRBA minus Fläche KLJOK schreiben, also:

$$F = (\alpha_h - \alpha_0) \delta p_0 - \int_{p_h}^{p_0} dadp = \alpha_h \delta p_0 - \alpha_0 \delta p_0 - \delta p_0 \frac{c_v}{c_p} \int_{p_h}^{p_0} \frac{\alpha}{p} dp \dots \dots \dots (42)$$

Dieser Wert, in Gleichung 41 eingesetzt, ergibt:

$$\alpha_h \delta p_h = \alpha_h \delta p_0 - \delta p_0 \frac{c_v}{c_p} \int_{p_h}^{p_0} \frac{\alpha}{p} dp,$$

woraus

$$\delta p_h = \delta p_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha_h} \frac{c_v}{c_p} \int_{p_h}^{p_0} \frac{\alpha}{p} dp \right) \dots \dots (43)$$

abgeleitet wird.

Wenn wir in Gleichung 43 $\alpha_h = \frac{RT_h}{p_h}$ setzen und $-gdz$ statt adp schreiben, erhalten wir die Formel von Steiner:

$$\delta p_h = \delta p_0 \left(1 - \frac{c_v g}{c_p R} \frac{p_h}{T_h} \int_0^z \frac{dz}{p} \right) \dots \dots (44)$$

Die Grösse $k = 1 - \frac{c_v g}{c_p R} \frac{p_h}{T_h} \int_0^z \frac{dz}{p}$ nennt Ross-

by den Reduktionsfaktor.

Es ist aber in den meisten Fällen bequemer, nur Temperatur und Druck als Koordinaten zu haben. In Gleichung 43 können wir mit Hilfe der Zustandsgleichung α_h und α eliminieren und erhalten:

$$\delta p_h = \delta p_0 \left[1 - \frac{c_v p_h}{c_p T_h} \int_{p_0}^{p_h} T d \left(\frac{1}{p} \right) \right], \dots \dots (45)$$

Das Integral $\int_{p_0}^{p_h} T d \left(\frac{1}{p} \right)$ können wir auf einem

Diagrammpapier mit linearer Temperaturskala und mit Druckskala nach $\frac{1}{p}$ geteilt graphisch integrieren. Die Zustandskurve der Atmosphäre wird hier eingezeichnet (Abb. 18), und man legt eine Linie $T_m = \text{konst.}$ derartig, dass die Flächen F_1 und F_2 gleich gross werden. Wir haben dann:

$$\int_{p_0}^{p_h} T d \left(\frac{1}{p} \right) = T_m \int_{p_0}^{p_h} d \left(\frac{1}{p} \right) = T_m \left(\frac{1}{p_h} - \frac{1}{p_0} \right).$$

Dieser Wert in Gleichung 45 eingesetzt, ergibt:

$$\delta p_h = \delta p_0 \left[1 - \frac{c_v T_m}{c_p T_h} \left(1 - \frac{p_h}{p_0} \right) \right] \dots \dots (46)$$

Die Grössen $\frac{T_m}{T_h}$ und $\left(1 - \frac{p_h}{p_0} \right)$ nähern sich bei zunehmender Höhe beide dem Wert 1, wobei die erste grösser und die zweite kleiner als 1 ist. Die Grösse $\frac{T_m}{T_h} \left(1 - \frac{p_h}{p_0} \right)$ nähert sich daher recht rasch dem Wert 1.

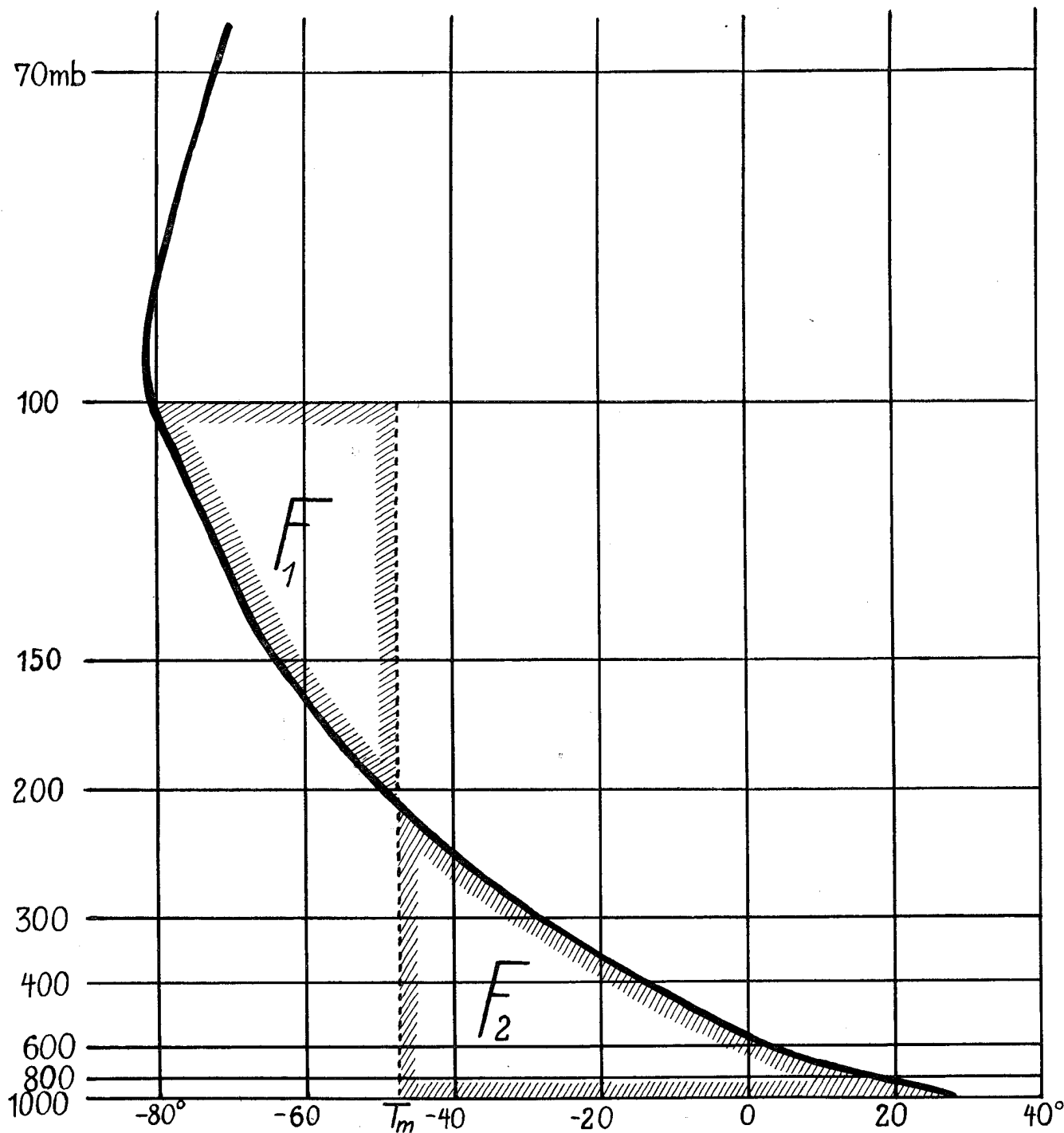


Abb. 18.

Die durchschnittliche Zustandkurve über Agra in October. Die Grösse T_m auf der Abbildung ist für die Höhe mit Druck 100 mb. berechnet worden.

Schon in 20 km Höhe gilt mit recht grosser Genauigkeit

$$\delta p_h = \delta p_0 \left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right) = \delta p_0 \frac{R}{c_p} = \delta p_0 \kappa \dots (47)$$

Der Reduktionsfaktor nähert sich in dieser Weise in der isothermen Stratosphäre recht rasch dem Wert $\kappa = 0,2884$. In dem von Rossby berechneten Falle ergibt sich z. B. in 13 km Höhe

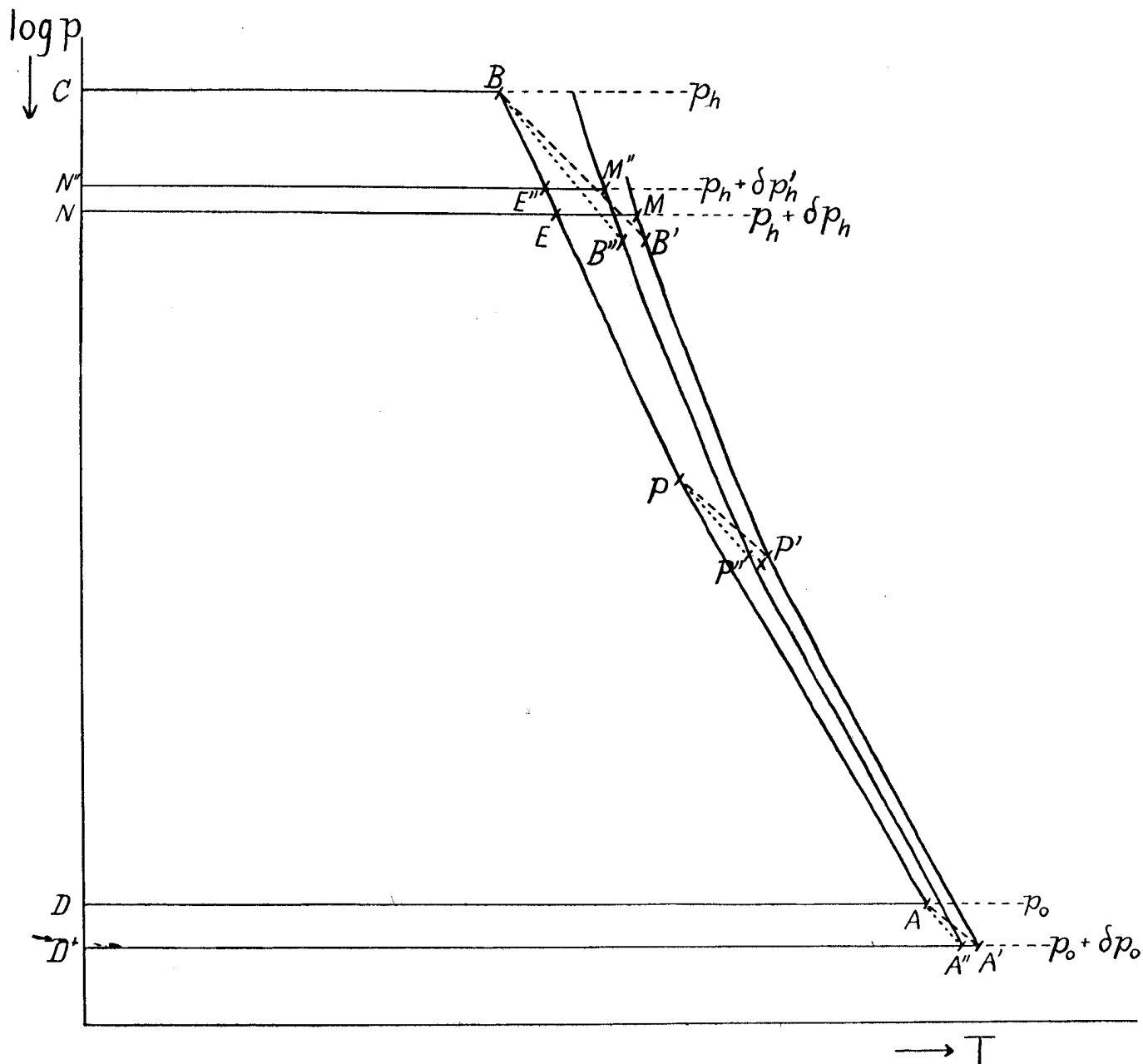


Abb. 19.

$\delta p_h = \delta p_0 \cdot 0,32$ und in 17 km $\delta p_h = \delta p_0 \cdot 0,30$. An der Tropopause in den Tropen findet man einen Reduktionsfaktor von etwa 0,25, und von da ab steigt der Wert wieder. Von 20 km ab kann man mit genügender Genauigkeit über der ganzen Erde den Reduktionsfaktor gleich α setzen. Einer Druckänderung in dieser Höhe um 1 mb entsprechen in dieser Weise ungefähr 3,5 mb am Boden, während Haurwitz (1927) in Tabelle I 7,60 mb angibt, also mehr als den doppelten Betrag.

Die Gleichung 46 zeigt somit, dass lokale Druckänderungen in der oberen Stratosphäre nur unbedeutend auf das Druckfeld am Boden einwirken. Einer Druckänderung von z. B. 0,1 mb in der Stratosphäre entsprechen nämlich 0,3 bis 0,4 mb am Boden, gleichgültig in welcher Höhe innerhalb der Stratosphäre die primäre Druckänderung um 0,1 mb stattfand. Da die Druckschwankungen in der Stratosphäre nur in den untersten km größere Absolutbeträge erreichen können, ist eine stra-

tosphärische Steuerung im Sinne der deutsch-österreichischen Schule nur durch die untersten km der Stratosphäre denkbar.

Wir behandeln dann diese Frage unter der Voraussetzung, dass die Luftmassen gesättigt sind, und die Bewegungen durch Kondensation oder Verdampfung kondensationsadiabatisch erfolgen. Wir denken uns die Abbildung 17 auf einem Emagramm transformiert (Abb. 19). Die verschiedenen Punkte sind also mit denselben Buchstaben bezeichnet. Die vertikale Zustandskurve der betrachteten Luftsäule geht von A bis B. In den Schichten oberhalb B haben wir eine Massenzufuhr, deren Gewicht je Flächeneinheit dp ist. Dadurch ändert sich der individuelle Druck jeder Partikel unter B um den Betrag dp . Nach der Druckänderung geht für trockene Luft die Zustandskurve von A' bis B'. Die Linien A—A' und B—B' sind hier Trockenadiabaten. Da die Abb. 19 eine flächentreue Transformation der Abb. 17 ist, ergibt die Gleichung 41:

$$\alpha_h \delta p_h = \alpha_0 \delta p_0 + F = \alpha_0 \delta p_0 + RF',$$

wo F' die Fläche A'AEMA' darstellt und $RF' = F$ die Solenoidanzahl dieser Fläche ist. Wenn aber die Luftmassen gesättigt sind und die Bewegungen kondensationsadiabatisch erfolgen, geht die Zustandskurve nach der Druckänderung von A'' nach B'', wo die Linien A—A'' und B—B'' Kondensationsadiabaten sind. Die individuellen Druckänderungen und also auch die lokale Druckänderung am Boden bleiben dieselben wie im trockenadiabatischen Falle. Die lokale Druckänderung in der Höhe B wird aber eine andere; wir bezeichnen diese Druckänderung im kondensationsadiabatischen Falle mit $\delta p'_h$ und erhalten die Gleichung

$$\alpha_h \delta p'_h = \alpha_0 \delta p_0 + RF'', \dots \dots \dots (48)$$

wo RF'' die Solenoidanzahl der Fläche A''AE''M''A'' ist. Da wir nur infinitesimale Druckänderungen betrachten, können wir $F'' = F' - f$ schreiben, wo f die Fläche A'A''M''MA' ist. Die Gleichung 48 können wir dann so schreiben:

$$\alpha_h \delta p'_h = \alpha_0 \delta p_0 + R(F' - f),$$

woraus sich ergibt (Siehe Gleichung 42):

$$\delta p'_h = \frac{1}{\alpha_h} (\alpha_0 \delta p_0 + RF') - \frac{Rf}{\alpha_h} = \delta p_0 k - \frac{p_h f}{T_h} \dots (49)$$

k ist der Reduktionsfaktor für trockene Luft und hat den in Gleichung 45 gefundenen Wert. Wir

suchen einen geeigneten Ausdruck auch für die Grösse $\frac{p_h f}{T_h}$.

Wir betrachten einen willkürlichen Punkt P an der Zustandskurve (Abb. 19). Nach der Druckänderung erhält eine Partikel hier im trockenadiabatischen Falle den Zustand P' , im kondensationsadiabatischen Falle den Zustand P'' . Der Abstand $x = P' - P''$ ist durch den Unterschied zwischen dem trockenadiabatischen Temperaturgradienten γ' und dem kondensationsadiabatischen Temperaturgradienten γ'' bedingt. Der Druckunterschied zwischen den Punkten P und P' (oder P'') ist $-\delta p = -\delta p_0$, und der entsprechende Höhenunterschied im statischen Falle ist $\delta z = \frac{\alpha \delta p_0}{g}$. (Dies bedeutet selbstverständlich nicht, dass die Partikel in P bei der Druckänderung ihre Höhe um δz ändert). Die Länge der Linie x wird

$$\delta z (-\gamma' + \gamma'') = \frac{\alpha \delta p_0}{g} (-\gamma' + \gamma'').$$

Nun ist die Fläche f gleich $\int_{p_h}^{p_0} x d(\log p)$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{p_h}{T_h} \cdot f &= \frac{p_h}{T_h} \int_{p_h}^{p_0} x d(\log p) = \frac{p_h}{T_h} \int_{p_h}^{p_0} \frac{\alpha \delta p_0}{g} (-\gamma' + \gamma'') \frac{dp}{p} = \\ &= \frac{\delta p_0 R p_h}{g T_h} \int_{p_h}^{p_0} T (-\gamma' + \gamma'') \frac{dp}{p^2} = \\ &= \frac{\delta p_0 R p_h}{g T_h} \int_{p_0}^{p_h} T (-\gamma' + \gamma'') d\left(\frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Dieser Wert und der Wert von k (Gleichung 45), in Gleichung 49 eingesetzt, ergibt dann:

$$\delta p'_h = \delta p_0 \left[1 - \frac{c_v}{c_p} \frac{p_h}{T_h} \int_{p_0}^{p_h} T d\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{R}{g} \frac{p_h}{T_h} \int_{p_0}^{p_h} T (-\gamma' + \gamma'') d\left(\frac{1}{p}\right) \right] \quad (50)$$

Diese Gleichung ergibt im allgemeinen Falle die Druckänderungen in einer vertikalen Luftsäule bei Massenzufuhr über den betrachteten Niveaus. Bei nicht gesättigter Luft verschwindet das letzte Glied. Wenn die Luft nur in einer oder mehreren

Schichten gesättigt ist, wertet man das letzte Integral nur für diese Schichten aus. Das Integral

$$\int_{p_0}^{p_h} T(-\gamma' + \gamma'') d\left(\frac{1}{p}\right)$$

lässt sich wie das Integral $\int_{p_0}^{p_h} T d\left(\frac{1}{p}\right)$ auf einem Diagrammpapier mit linearer Temperaturskala und mit nach $\frac{1}{p}$ geteilter Druckskala (Abb. 18) graphisch integrieren. Die Grösse

$$\frac{R}{g} \int_{p_0}^{p_h} T(-\gamma' + \gamma'') d\left(\frac{1}{p}\right)$$

ist für verschiedene Temperatur- und Druckstufen berechnet und in Tab. 1 aufgestellt worden. Durch Interpolation lässt sich dann diese Grösse mit genügender Genauigkeit für jede Schicht berechnen.

Tab. 1.

	100—80	80—60	60—40	40—30	30—20	cb
30°	0.142					
20°	0.121	0.219				
10°	0.098	0.182	0.397			
0°	0.071	0.137	0.315	0.355		
—10°	0.045	0.091	0.220	0.270	0.628	
—20°	0.025	0.051	0.131	0.172	0.424	
—30°	0.012	0.024	0.065	0.090	0.238	
—40°	0.005	0.010	0.027	0.040	0.109	
—50°				0.015	0.042	
—60°					0.014	

Ein Beispiel zeigt am besten, wie man diese Tabelle benutzt, um den Reduktionsfaktor k auch für teilweise gesättigte Luft zu berechnen. Wir betrachten eine Luftsäule vom Boden mit Druck 100 cb und Temperatur 20° C bis zur Höhe mit Druck 30 cb und Temperatur —30° C. Wir zeichnen die vertikale Zustandskurve der Luftsäule auf einem Diagrammpapier mit linearer Temperaturskala und mit nach $\frac{1}{p}$ geteilter Druckskala ein und finden in dieser Weise, dass die Grösse T_m in Gleichung 46 in diesem Falle 263 ist. Für trockene Luft erhalten wir aus Gleichung 46

$$\delta p_h = \delta p_0 (1 - 0,540) = \delta p_0 \cdot 0,460.$$

Nun setzen wir voraus, dass die Luft von 95 bis 83 cb und von 40 bis 32 cb gesättigt ist und dass die Zustandsänderungen hier kondensationsadiabatisch erfolgen. Die Mitteltemperatur der Luft von 95 bis 83 cb ist 15° C, und in der Tabelle finden wir für die Druckstufe 100—80 cb durch Interpolation die Zahl 0,110 bei dieser Temperatur. Da die Luft nur von 95 bis 83 cb gesättigt war, multipliziert man 0,110 mit $\frac{12}{20}$ und erhält die Zahl

0,066. Die Mitteltemperatur der Luft von 40 bis 32 cb ist —23° C, und durch Interpolation findet man in der Tabelle für die Druckstufe 40—30 cb die Zahl 0,147. Da nur die Luft von 40 bis 32 cb gesättigt war, multipliziert man dies mit $\frac{8}{10}$ und

erhält die Zahl 0,118. Für die gesättigten Gebiete der betrachteten Luftsäule ergibt also die Tabelle die Zahl $0,066 + 0,118 = 0,184$. Diese Zahl multipliziert man mit $\frac{p_h}{T_h} = \frac{30}{243}$ und erhält $0,184 \cdot \frac{30}{243} = 0,023$, welches also der Wert von

$$\frac{p_h R}{T_h g} \int_{p_0}^{p_h} T(-\gamma' + \gamma'') d\left(\frac{1}{p}\right)$$

in Gleichung 50 ist. Wir erhalten also

$$\delta p_h' = \delta p_0 (1 - 0,540 - 0,023) = \delta p_0 \cdot 0,437.$$

Der Reduktionsfaktor im betrachteten Falle ist also 0,44.

* * *

Wir untersuchen dann, wie sich der Druck in der Höhe ändert, wenn Massenänderungen am Boden den Druck dort ändern. Wir betrachten auch hier nur adiabatische Bewegungen. Die in ein Druck-Volumen-Diagramm eingezeichnete Zustandskurve der Luftmasse (Abb. 20) geht ursprünglich von A mit Druck p_0 bis B mit Druck p_h . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die ganze Massenzufuhr unten am Boden stattfindet und dass die oberhalb liegende Luft dadurch wie ein Kolben gehoben wird. Jede Partikel behält dadurch ihren Druck und ihre Temperatur, so dass die Zustandskurve der Luftmasse durch die Hebung unverändert bleibt. Die Massenzufuhr am Boden bewirkt nur, dass diese Kurve sich von A bis A' verlängert.

Der Geopotentialunterschied von A bis B ist durch die Fläche ABCDA dargestellt. Nach der Massenzufuhr am Boden liegt der Punkt B höher als früher, und der Punkt B' liegt jetzt in

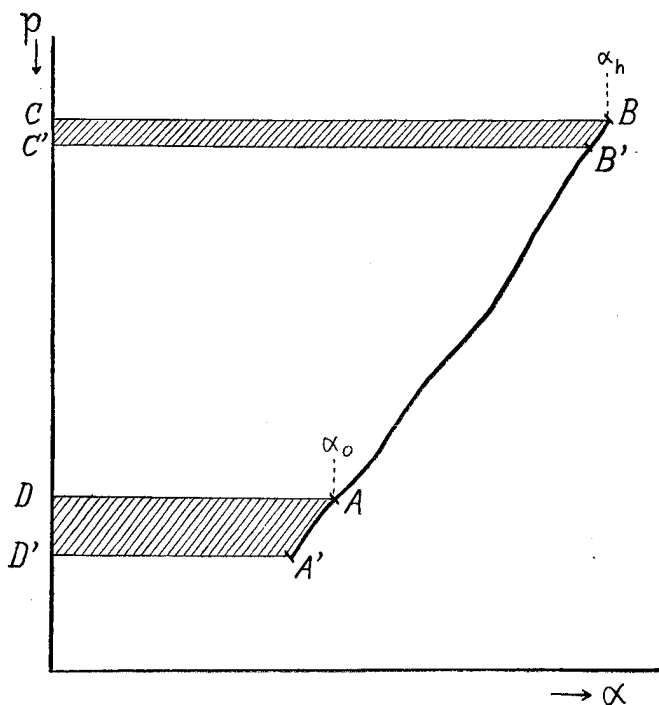


Abb. 20.

derselben Höhe wie ursprünglich B. Der Geopotentialunterschied zwischen A' und B' ist also gleich dem Geopotentialunterschied zwischen A und B; daraus ergibt sich, dass die Flächen ABCDA und A'B'C'D'A' gleich gross sind, und weiter, dass die schraffierten Flächen (Abb. 20) auch gleich gross werden. Bezeichnen wir den Druckunterschied zwischen A und A' mit δp_0 und zwischen B und B' mit δp_h , so ergibt sich:

$$\alpha_h \delta p_h = \alpha_0 \delta p_0$$

und daraus die Formel von Hesselberg (1915):

$$\delta p_h = \frac{\alpha_0}{\alpha_h} \delta p_0 \dots \dots \dots (51)$$

In § 12 (Gleichung 40) ist gezeigt worden, dass die horizontale Gradientkraft je Masseneinheit in allen Niveaus dieselbe wird, wenn verschiedene Massenänderungen am Boden die darüberliegende Atmosphäre wie einen Kolben bewegen.

Wenn eine Zyklone sich entwickelt und in Wirbel übergeht, senkt sich die Tropopause und in der Stratosphäre entsteht eine absteigende Bewegung. Gleichzeitig tritt auch eine Erwärmung ein. Dies zeigt, dass die Stratosphäre sich bei der Zyklonentätigkeit nicht wie ein Kolben bewegt, dass also Luft auch von den Seiten zuströmt

wodurch die einzelnen Partikeln unter höheren Druck gelangen und adiabatisch erhitzt werden. Auf der anderen Seite kann man bei dieser Abwärtsbewegung nicht mit einer adiabatischen Erwärmung von 1° C je 100 m rechnen, da Luft selbstverständlich auch von oben heruntersinkt.

Wir untersuchen jetzt die korrespondierenden lokalen Druckänderungen am Boden und in der Höhe, wenn die Atmosphäre trockenadiabatisch geschichtet ist; wir arbeiten auf einem Emagramm und betrachten hier eine Luftmasse mit trockenadiabatischem Temperaturverlauf (Abb. 21) vom Boden A mit Druck p_0 bis B mit Druck p_h . Durch Massenänderungen über der Höhe B ändert sich der Druck am Boden um δp_0 . Wir berechnen die entsprechende Druckänderung δp_h in der Höhe B für diesen Fall.

Da die Fläche ABCDA und A'B'C'D'A' gleich gross sind, werden auch die schraffierten Flächen gleich gross. Daraus ergibt sich:

$$\frac{\delta p_h}{p_h} T_h = \frac{\delta p_0}{p_0} T_0,$$

und daraus:

$$\delta p_h = \delta p_0 \frac{p_h T_0}{p_0 T_h} \dots \dots \dots (52)$$

Da die Kurve A—B eine Trockenadiabate ist, haben wir:

$$\frac{T_0}{T_h} = \left(\frac{p_0}{p_h} \right)^{\left(\frac{R}{c_p} \right)}. \text{ Dies ergibt:}$$

$$\delta p_h = \delta p_0 \left(\frac{p_h}{p_0} \right)^{\left(1 - \frac{R}{c_p} \right)} = \delta p_0 \left(\frac{p_h}{p_0} \right)^{\left(\frac{c_v}{c_p} \right)} \dots (53)$$

Wenn man sich in einer trockenadiabatisch geschichteten Atmosphäre die Massenänderungen am Boden denkt und die Druckänderungen in der Höhe berechnet, erhält man genau denselben Ausdruck wie in Gleichung 52. Die korrespondierenden lokalen Druckänderungen sind also in diesem Falle dieselben, gleichgültig in welcher Höhe die Massenänderungen vor sich gehen. Die Gleichung 53 zeigt, dass die korrespondierenden Druckänderungen in einer trockenadiabatisch geschichteten Atmosphäre nur von dem Druck abhängen.

Die Gleichung 52 ist geeignet, einen ange-näherten Ausdruck für den Reduktionsfaktor fin-

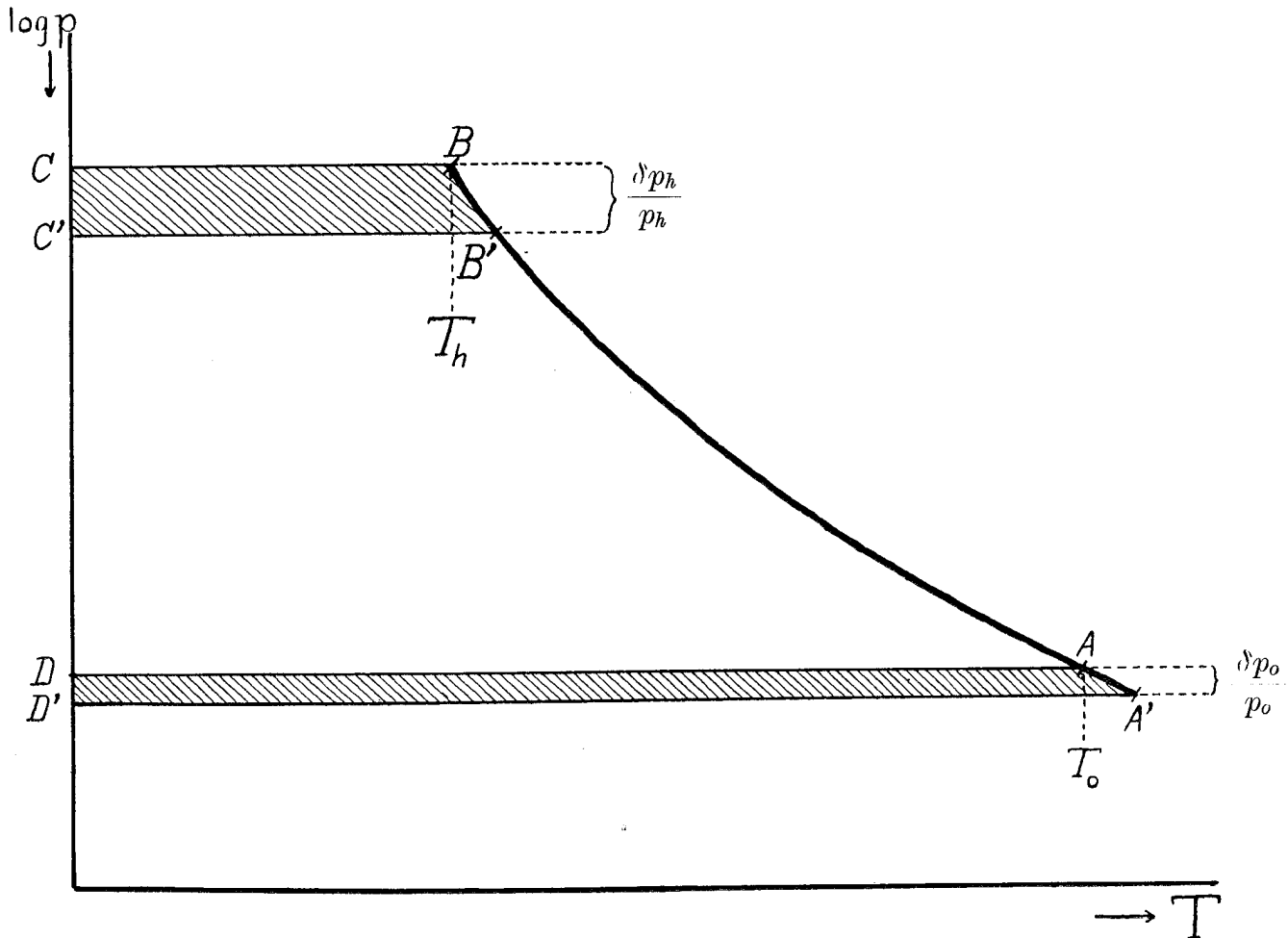


Abb. 21.

den zu lassen. Man denkt sich, dass die Atmosphäre unter der betrachteten Höhe trockenadiabatisch geschichtet ist. In diesem Falle ist

$$\delta p_h = \delta p_0 \frac{p_h \vartheta_0}{p_0 T_h} \dots \dots \dots (54)$$

wo ϑ_0 die Temperatur bedeutet, die eine Partikel mit den ursprünglichen Koordinaten T_h, p_h erhält, wenn der Druck gleich p_0 wird. Um ϑ_0 zu finden, braucht man nur die Trockenadiabate durch den Punkt T_h, p_h bis zu dem Druck p_0 zu verfolgen.

Der Reduktionsfaktor $\frac{p_h \vartheta_0}{p_0 T_h}$ in Gleichung 54 stimmt bei den unteren 10 km in der Atmosphäre sehr gut mit dem exakten Reduktionsfaktor überein. In dem von Rossby berechneten Falle hat z. B. der exakte Reduktionsfaktor in den Höhen 3, 6, 9 und 12 km die Werte 0,80, 0,61, 0,42 und 0,35. Der

Reduktionsfaktor $\frac{p_h \vartheta_0}{p_0 T_h}$ für dieselben Höhen ist in diesem Falle 0,80, 0,61, 0,41 und 0,33. In den meisten Fällen kann man in der Troposphäre ausserhalb der Tropen bei trockenadiabatischen Bewegungen den Reduktionsfaktor $\frac{p_h \vartheta_0}{p_0 T_h}$ als hinreichend genau betrachten.

§ 14. Die verfügbare kinetische Energie in der Atmosphäre.

Nach Margules ist die verfügbare kinetische Energie in der Atmosphäre in der Energie der Lage, in der inneren Energie und in der Energie der Druckverteilung zu suchen. Wir werden die verschiedenen Energieformen in der Atmosphäre genauer untersuchen und gleichzeitig die Energie-

formen graphisch darstellen. Wir betrachten die mathematische Identität

$$\operatorname{div}(p\mathbf{v}) = p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \dots (55)$$

Die Kontinuitätsgleichung können wir so schreiben:

$$\frac{d\alpha}{adt} = \operatorname{div} \mathbf{v} \dots (56)$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha \operatorname{div}(p\mathbf{v}) = p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p \dots (57)$$

Diese Gleichung integrieren wir über alle Elemente einer endlichen, bewegten Masse m . Wir erhalten:

$$\int_0^m \alpha \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dm = \int_0^m p \frac{d\alpha}{dt} dm + \int_0^m \alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p dm \quad (58)$$

Wir setzen $\alpha dm = dk$, wo dk das Volumenelement bedeutet. Das Glied $\int_0^m \alpha \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dm$ können wir dann nach Gauss' Theorem folgendermassen umformen:

$$\int_0^m \alpha \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dm = \int_0^k \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dk = \int_{\Sigma} p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{o} \quad (59)$$

k ist das Volumen und Σ die Oberfläche der betrachteten Masse m , und $d\mathbf{o}$ ist das Oberflächenelement, aufgefasst als Vektor von der Richtung der nach aussen gerichteten Normalen. Wenn wir $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ setzen, können wir Gleichung 58 so schreiben:

$$\int_0^{\Sigma} p d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{o} = \int_0^m p d\alpha dm + \int_0^m \alpha d\mathbf{r} \cdot \nabla p dm \quad (60)$$

Das Glied links ist die durch die Bewegung der Oberfläche der betrachteten Masse nach aussen abgegebene Arbeit. Das erste Glied rechts ist die Summe sämtlicher Expansionsarbeiten innerhalb der betrachteten Masse, und das letzte Glied ist die Arbeit gegen die Gradientkräfte.

Wir betrachten dann die hydrodynamische Energiegleichung

$$d(\frac{1}{2}v^2) + d\Phi + \alpha \mathbf{v} \cdot \nabla p dt - \alpha \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (61)$$

R bedeutet hier Reibungskraft je Volumeneinheit. Wir schreiben $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$ und integrieren die Gleichung 61 über dieselbe Masse wie in Gleichung 58. Daraus ergibt sich:

$$\int_0^m d(\frac{1}{2}v^2) dm - \int_0^m \alpha \mathbf{R} d\mathbf{r} dm = - \int_0^m d\Phi dm - \int_0^m \alpha d\mathbf{r} \cdot \nabla p dm \quad (62)$$

Den grössten erreichbaren Wert von

$$\int_0^m d(\frac{1}{2}v^2) dm - \int_0^m \alpha \mathbf{R} d\mathbf{r} dm$$

nennt Margules «die verfügbare kinetische Energie des betrachteten Systems». Wie man sieht, entsteht diese Energie teils durch Verkleinerung der potentiellen Energie der Lage, teils durch die Arbeit der Gradientkräfte. Wir bezeichnen die Glieder $\int_0^m d(\frac{1}{2}v^2) dm - \int_0^m \alpha \mathbf{R} d\mathbf{r} dm$ mit dK und setzen den Wert von $\int_0^m \alpha d\mathbf{r} \cdot \nabla p dm$ aus Gleichung 60 in Gleichung 62 ein. Dies ergibt:

$$dK = - \int_0^m d\Phi dm + \int_0^m p d\alpha dm - \int_0^{\Sigma} p d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{o} \quad (63)$$

In dieser Gleichung zeigt sich die verfügbare kinetische Energie in einer übersichtlicheren Form. Die verfügbare kinetische Energie entsteht teils durch Verkleinerung der potentiellen Energie der Lage, teils aus der Expansionsarbeit und teils aus Arbeit, die von aussen geleistet wird. Diese fundamentale Gleichung lässt sich nun unter der Voraussetzung, dass die Atmosphäre sich in vertikalem, statischem Gleichgewicht befindet, weiter umformen. Wir berechnen die potentielle Energie der Lage einer Säule mit Querschnitt 1 bis an die Atmosphären-grenze. Es wird mit der Energie der Lage im Verhältnis zum Boden gerechnet, wo der Druck p ist. Da der Querschnitt der Säule 1 ist, ist die gesamte Masse innerhalb der Säule $\frac{p}{g}$. Wir bezeichnen die

Energie der Lage mit P und erhalten:

$$P = \int_0^{\frac{p}{g}} \Phi dm = \int_0^{\infty} g z \rho dz = - \int_p^0 z dp = - \left[pz \right]_{z=0}^{z=\infty} + \int_0^{\infty} p dz = \int_0^{\infty} p dz = R \int_0^{\infty} T dz = -R \int_p^0 \frac{T}{g} dp = R \int_0^{\frac{p}{g}} T dm \quad (64)$$

Der Ausdruck $P = -R \int_p^0 \frac{T}{g} dp$ eignet sich besonders gut für graphische Berechnungen. Auf einem Diagrammpapier mit p und T als Koordi-

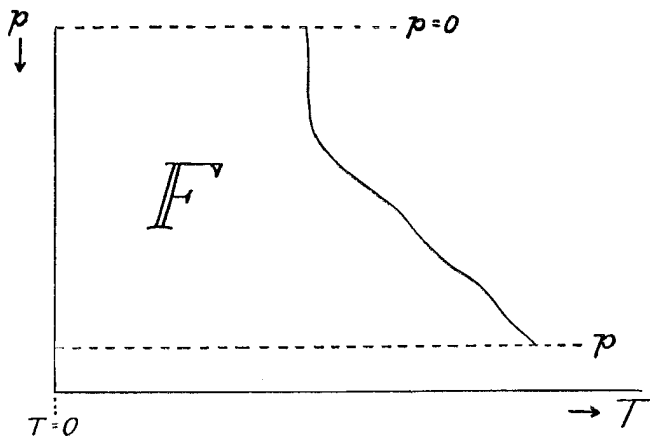


Abb. 22.

naten (p - T -Diagramm) zeichnen wir die vertikale Zustandskurve der betrachteten Säule ein (Abb. 22). Die Fläche F zwischen der Zustandskurve und der Drucklinie p bis an die Linien $T = 0$ und $p = 0$ hat den Wert $F = - \int_p^0 T dp$. Die Energie der Lage der ganzen Säule mit Querschnitt 1 erhält also den Wert $P = \int_0^m d\Phi dm = \frac{R}{g} \cdot F$. Die Änderung der Energie der Lage innerhalb einer Säule lässt sich in dieser Weise sehr leicht darstellen. Auf Abb. 23 stellt z. B. die Kurve A—B—C die ursprüngliche vertikale Zustandskurve der Luft einer Säule dar. Die Energie der Lage dieser Säule wird je Flächeneinheit $\frac{R}{g} \cdot F$, wo F die Fläche A—B—C—D—E—A ist. In den Schichten von A bis B erhalten wir dann durch Umlagerungen und Strahlung

eine andere Zustandskurve. Gleichzeitig lagern sich auch unter der Säule andere Luftmassen, wodurch der Druck am Boden um Δp steigt. Die Energie der Lage der ganzen Säule wird jetzt je Flächeneinheit $\left(\frac{R}{g} \cdot F + \frac{R}{g} \cdot \Delta F \right)$, wo ΔF die Fläche H—B—A—E—G—H ist. Wir erhalten also für jede Flächeneinheit der betrachteten Säule $\Delta P = \frac{R}{g} \cdot \Delta F$, wo ΔP die Änderung der Energie der Lage ist.

Wenn wir in Gleichung 64 statt einer einzelnen Säule mit der Masse $\frac{p}{g}$ eine Reihe Säulen mit verschiedenen vertikalen Zustandskurven und einer gesamten Masse m betrachten, erhalten wir für die gesamte Energie der Lage dieser Säulen:

$$P = \int_0^m \Phi dm = R \int_0^m T dm.$$

Durch Ableitung erhalten wir:

$$dP = \int_0^m d\Phi dm = R \int_0^m dT dm. \dots (65)$$

Den Wert $\int_0^m d\Phi dm = R \int_0^m dT dm$ setzen wir in Gleichung 63 ein und erhalten:

$$dK = - R \int_0^m dT dm + \int_0^m p da dm - \int_0^{\Sigma} p dr do = - \int_0^m adp dm - \int_0^{\Sigma} p dr do. \dots (66)$$

Aus dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre $dq = c_p dT - adp$ ergibt sich

$$- \int_0^m adp dm = - c_p \int_0^m dT dm + \int_0^m dq dm.$$

Dieser Wert in Gleichung 66 eingesetzt, ergibt:

$$dK = - c_p \int_0^m dT dm + \int_0^m dq dm - \int_0^{\Sigma} p dr do. \dots (67)$$

Diese Gleichung gilt für die Luft in einer Säule bis an die Atmosphäregrenze. Wenn die Bewegungen innerhalb der Säule adiabatisch verlaufen und so keine Wärme zugeführt wird und wenn keine Arbeit von der Säule nach aussen abgegeben wird, erhalten wir den Ausdruck von Margules

$$dK = - c_p \int_0^m dT dm. \dots (68)$$

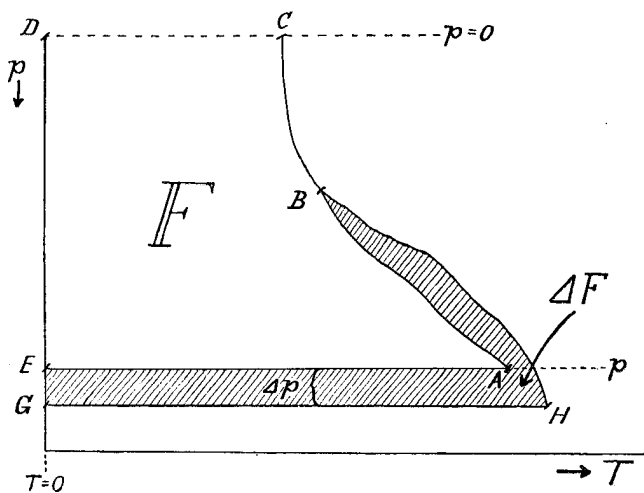


Abb. 23.

Dieser Ausdruck lässt sich auch wie der Ausdruck in Gleichung 64 auf einem p - T -Diagramm graphisch integrieren.

Die Gleichung 66

$$dK = - \int_0^m \alpha dp dm - \int_0^{\Sigma} p dr do$$

drückt die kinetische Energie aus, die innerhalb der betrachteten Masse freigemacht werden kann. Wir setzen jetzt voraus, dass keine Arbeit nach aussen abgegeben wird, wodurch das letzte Glied verschwindet. Weiter betrachten wir keine infinitesimale Druckänderung dp , sondern eine Druckänderung von p_1 bis p_2 . Die entsprechende Änderung in der kinetischen Energie K von K_1 bis K_2 nennen wir ΔK und erhalten:

$$\Delta K = - \int_0^m \left(\int_{p_1}^{p_2} \alpha dp \right) dm$$

oder mit Hilfe der Zustandsgleichung $pa = RT$

$$\Delta K = - \int_0^m \left(R \int_{p_1}^{p_2} T d(\log p) \right) dm. \quad (69)$$

Wir ersehen aus diesen Ausdrücken für ΔK , dass eine Partikel, die ihren Druck nicht ändert, keinen Beitrag zur kinetischen Energie geben kann. Wir brauchen also die Integration nur über die Massen auszudehnen, die durch Umlagerungen ihren Druck ändern. Der erste Ausdruck für ΔK lässt sich auf einem Druck-Volumen-Diagramm und der letzte auf einem Emagramm graphisch berechnen.

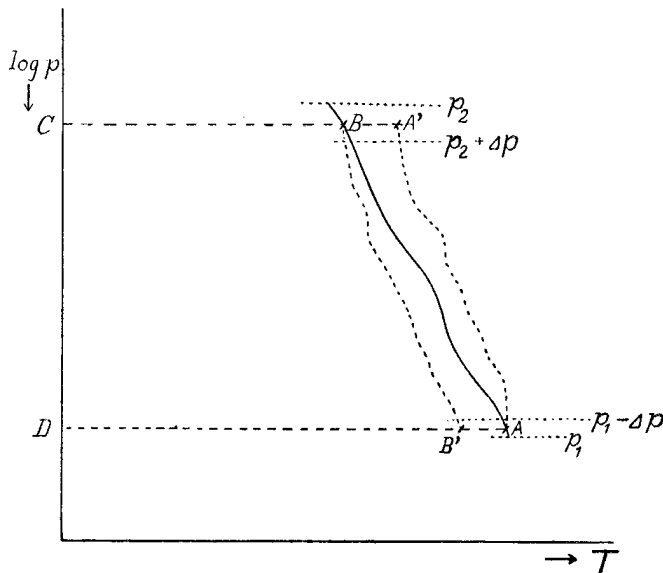


Abb. 24.

Wir zeigen kurz das Verfahren auf einem Emagramm und betrachten als Beispiel die Abb. 24. Der Temperaturverlauf einer Luftmasse ist hier durch die gezogene Linie gegeben. Innerhalb dieser Luftmasse haben wir dann Umlagerungen, deren Verlauf wir kennen und graphisch aufzeichnen können. Wir betrachten zwei verschiedenen Fälle:

1. Ein Massenelement, dessen Grundfläche H und dessen Gewicht je Flächeneinheit Δp ist, bewegt sich längs der punktierten Linie von A bis A'. $\int T d(\log p)$ wird in diesem Falle gleich der Fläche A—A'—C—D—A, die wir gleich $+F_A$ setzen, da die Umlaufrichtung der des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Die gesamte Masse, die sich längs der Linie A—A' bewegt, wird $\frac{\Delta p}{g} H$, und der Ausdruck

in Gleichung 69 erhält die Grösse $RF_A \frac{\Delta p}{g} H$. Bei dieser Bewegung müssen auch andere Massenelemente ihren Druck ändern. Wir betrachten den Fall, dass ein anderes Massenelement mit Druckfläche H und Gewicht je Flächeneinheit Δp sich von B bis B' bewegt. Bei dieser Bewegung wird $\int T d(\log p)$ gleich der Fläche B—B'—D—C—B, die wir gleich $-F_B$ setzen, da die Umlaufrichtung die des Uhrzeigers ist. Der Ausdruck in Gleichung 69 erhält für dieses Massenelement die Grösse $-RF_B \frac{\Delta p}{g} H$. Die bei der Umlagerung dieser zwei Massenelemente freigemachte Energie wird $R(F_A - F_B) \frac{\Delta p}{g} H$. Denken

wir uns, dass die Umlagerung der ganzen Masse in der Weise vor sich geht, dass immer zwei Massenelemente den Platz wechseln, können wir diese Berechnung für alle Massenelemente durchführen. Durch Addition der Resultate erhalten wir dann die Grösse von ΔK nach Gleichung 69. Für Δp wählt man zweckmässig die Grösse 1 cb, und man kann in den meisten Fällen zweifellos Δp gleich 5 oder 10 cb setzen, ohne nennenswerte Fehler zu erhalten.

2. Wir betrachten dann wieder das Massenelement mit Grundfläche H und Gewicht Δp je Flächeneinheit, das sich von A bis A' bewegt (Abb. 25). Im Punkt A' breitet dieses Massenelement sich über eine m -mal so grosse Fläche aus. Das Gewicht des Massenelementes je Flächeneinheit wird dann $\frac{\Delta p}{m}$.

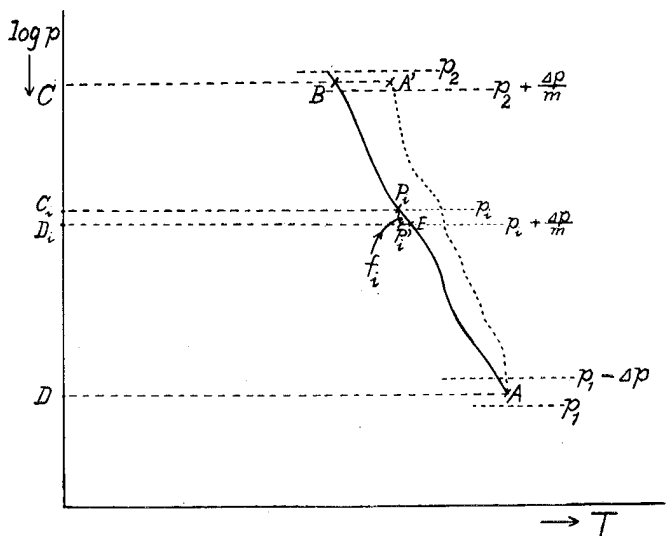


Abb. 25.

Der Ausdruck in Gleichung 69 erhält, wie gezeigt wurde, für diese Bewegung den Wert $RF_A \frac{\Delta p}{g} H$, wo F_A die Fläche $A-A'-C-D-A$ ist. Die kompensierenden Abwärtsbewegungen denken wir uns gleichmässig über eine grosse Masse zwischen den Drucklinien p_1 und p_2 mit der Grundfläche mH ausgedehnt. Jede Partikel der sinkenden Luft erhält dadurch einen Druckanstieg $\frac{\Delta p}{m}$. Wir denken uns jetzt, dass die sinkende Luft eine n -mal so grosse Masse wie die aufsteigende Luft hat. Die Masse der aufsteigenden Luft war $\frac{\Delta p}{g} H$; wir können daher annehmen, dass die sinkende Luft aus n Schichten mit Masse $\frac{\Delta p}{g} H$ besteht. In einer willkürlichen Schicht i denken wir uns, dass eine mittlere Partikel im Punkt P_i liegt (Abb. 25). Während der Umlagerung steigt ihr Druck um $\frac{\Delta p}{m}$, und sie erreicht den Punkt P_i' . Für die Schicht i wird $\int T d(\log p)$ gleich der Fläche $P_i-P_i'-D_i-C_i-P_i$, die wir gleich $-F_i$ setzen. Die Masse der Schicht i ist, wie gezeigt wurde, $\frac{\Delta p}{g} H$. Der Ausdruck in Gleichung 69 für die Schicht i erhält den Wert $-RF_i \frac{\Delta p}{g} H$. Für die ganze sinkende Luftmasse erhalten wir den Wert $-R \frac{\Delta p}{g} H \sum_1^n F_i$. Wir

bezeichnen jetzt (Abb. 25) die Fläche $B-A-D-C-B$ mit $-F_F$ und die kleine Fläche $P_i-P_i'-E-E-P_i$ mit f_i und können dann $\sum_1^n F_i$ gleich $-F_F + \sum_1^n f_i$ setzen. Der Ausdruck in Gleichung 69 erhält dann für die ganze sinkende Luftmasse den Wert $R \frac{\Delta p}{g} H \left(\sum_1^n f_i - F_F \right)$. Für das aufsteigende Massenelement erhalten wir, wie gezeigt wurde, den Wert $R \frac{\Delta p}{g} H F_A$, und die freigemachte Energie ΔK wird nach Gleichung 69

$$\Delta K = R \frac{\Delta p}{g} H \left(F_A + \sum_1^n f_i - F_F \right).$$

Wenn n sich ∞ nähert, was bedeutet, dass die aufsteigende Luftmasse im Verhältnis zu der sinkenden unendlich klein wird, nähert $\sum_1^n f_i$ sich Null. Bezeichnen wir $(F_A - F_F)$, also die Fläche $A-A'-B-A$ mit F , erhalten wir dann für ΔK den Ausdruck:

$$\Delta K = R \frac{\Delta p}{g} H F$$

oder je Masseneinheit der steigenden Luft:

$$\Delta K = RF. \dots \dots \dots (70)$$

Wir haben so nur mit Hilfe der Grundgleichungen bewiesen, dass das gewöhnliche energetische Verfahren auf einem energetischen Diagrammpapier für eine kleine Partikel, die sich in einer grossen ruhig liegenden Luftmasse bewegt, korrekt ist. Da aber unser Verfahren ganz allgemein gültig ist, können wir aus Gleichung 69 unter allen Umständen die in einem geschlossenen Raum bei Umlagerungen freigemachte Energie berechnen. Die einzige Voraussetzung dieser Berechnungen ist, dass die Atmosphäre sich in vertikalem, statischem Gleichgewicht befindet. Derartige Berechnungen sind in adiabatischen Fällen schon von Littwin auf dem Tephigramm graphisch durchgeführt worden (1935). Sein Verfahren bleibt selbstverständlich auf einem Emagramm oder auf einem Aerogramm genau dasselbe.

Mittels der Gleichungen 62, 63, 68 und 69 lässt sich die verfügbare kinetische Energie im allgemeinen Falle, wie unter bestimmten vereinfachenden Voraussetzungen recht übersichtlich darstellen. Eine andere Frage ist es aber, ob diese Gleichungen ge-

eignet sind, eine praktische Einteilung der Energiemengen in der Atmosphäre zu schaffen. Wir werden diesen Punkt genauer betrachten.

Die verfügbare kinetische Energie in der Atmosphäre entsteht nach Margules teils aus vertikal oder horizontal benachbarten Luftmassen, teils aus der Energie der Druckverteilung. Die verfügbare kinetische Energie vertikal benachbarter Luftmassen zeigt sich darin, dass in der betrachteten Luftmasse arbeitsleistende Vertikalbewegungen auftreten können. Die verfügbare kinetische Energie vertikal benachbarter Luftmassen habe ich (1932) «Labilitätsenergie» genannt. Die verfügbare kinetische Energie zweier horizontal benachbarter Luftmassen gibt sich durch die Solenoide zwischen den Luftmassen zu erkennen. Die verfügbare kinetische Energie sowohl vertikal als horizontal benachbarter Luftmassen habe ich «labile Energie» genannt. Die labile Energie ist also die Summe der verfügbaren Energie der Lage und der entsprechenden inneren Energie, die bei Instabilität oder in Verbindung mit Solenoiden in der Atmosphäre auftritt. Die Frage ist nun, ob disponible Energie der Lage in der Atmosphäre in anderen Formen auftreten kann. Um dies zu untersuchen, betrachten wir in der Atmosphäre einen Tiefdruck mit stabiler Luft ohne Solenoide. Nach Gleichung 40 bedeutet dies, dass die horizontale Gradientkraft je Masseneinheit auf allen Niveaus dieselbe ist. Wir werden die Grösse und die Form der Energiemengen ermitteln, die bei der Ausfüllung freigemacht werden und sich so als kinetische Energie zeigen können.

Der Arbeitswert einer Luftdruckverteilung, d. h. die Arbeit der Gradientkräfte, lässt sich, wie Gleichung 60 zeigt, für ein geschlossenes System aus der Expansionsarbeit berechnen. (Für ein geschlossenes System ist ja $\int_0^{\Sigma} p dr do = 0$). Dies hat

Margules gemacht (1901), und er fand, wie bekannt ist, dass die kinetische Energie in einer Zyklone weitaus grösser als der Arbeitswert der horizontalen Druckverteilung war.

Margules denkt sich die Atmosphäre in eine Reihe dünner horizontaler Schichten eingeteilt und macht die vereinfachende Voraussetzung, dass die Zyklone sich nur durch Horizontalbewegungen ausfüllt, wodurch also keine Änderungen in der potentiellen Energie der Lage entstehen. Margules ist aber selbst darauf aufmerksam, dass

diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Er schreibt: «Die einfachen Voraussetzungen, die der Berechnung von A (Arbeitswert der Druckverteilung) zugrunde gelegt sind, trifft man in der Atmosphäre nicht. Will man die Luft aus dem Zustand, den man vorfindet, in einen Gleichgewichtszustand übergehen lassen, so wird das auf adiabatischem Wege nicht möglich sein, ohne Luftmassen aus einer Höhenschicht in eine andere zu versetzen.»

In der Atmosphäre strömt, dank der Reibung am Boden, Luft hier gegen den tieferen Druck. Die Luft in diesem Gebiete wird dadurch gehoben, und entsprechend sinkt die Luft in den Gebieten mit hohem Druck. Die Ausfüllung eines Tiefdruckes ist demnach sowohl von Horizontal-, als auch von Vertikalbewegungen begleitet, und es ist von Interesse, die Energieumsätze in diesem allgemeinen Falle zu untersuchen.

Während Margules sich die Atmosphäre in dünne, horizontale Schichten eingeteilt dachte, denken wir uns die Atmosphäre aus vertikalen Säulen aufgebaut. In dem Gebiet, in dem der Druck während der Ausfüllung steigt, hat jede Säule den Querschnitt 1. Ausserhalb dieses Gebietes denken wir uns eine gleiche Anzahl Säulen, aber mit verschiedenen Querschnitten. Zusammen bilden sämtliche Säulen ein geschlossenes System. Wir betrachten jätzt eine der Säulen mit Querschnitt 1 (Abb. 26). Vor der Ausfüllung war ihr Druck am Boden $p_B - \Delta p$, nach der Ausfüllung p_B . Eine Luftmenge mit Gewicht Δp und Masse $\frac{\Delta p}{g}$ hat sich also bei der Ausfüllung unter der Säule gelagert und die Säule wie einen Kolben gehoben. Wir denken uns, dass die Luftmasse $\frac{\Delta p}{g}$ aus einer Säule mit Querschnitt n stammt. Vor der Ausfüllung war der Druck am

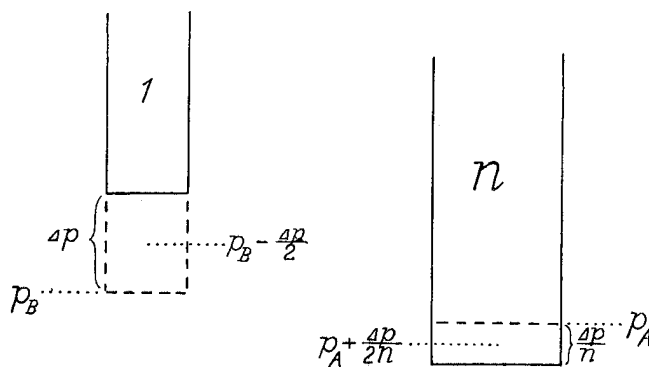


Abb. 26.

Boden $p_A + \frac{\Delta p}{n}$, nach der Ausfüllung p_A . Die Ausfüllung geht also in der Weise vor sich, dass eine Luftmenge mit Gewicht Δp sich am Boden von der Säule mit Querschnitt n bis zur Säule mit Querschnitt 1 verschiebt. Während der Ausfüllung bewegen sich die Säulen wie Kolben. Diese Vertikalbewegungen ändern also nicht die Temperatur und den Druck der Partikeln innerhalb der Säulen. Die Temperatur einer willkürlichen Partikel in den Säulen mit Querschnitt n und 1 nennen wir T_1 , bzw. T_2 und benennen den Druck p und das spezifische Volumen α entsprechend. Die Säule mit dem Querschnitt n nennen wir Säule A , die mit Querschnitt 1 Säule B . Wir untersuchen jetzt die Änderung der potentiellen Energie der Lage, wenn eine Luftmenge mit Gewicht Δp und Masse $\frac{\Delta p}{g}$ sich am Boden von der Säule A bis zur Säule B verschiebt. Nach der Ausfüllung ist, wie Gleichung 64 zeigt, die

potentielle Energie der Säule B $\frac{p_B}{g} \int_0^m RT_2 dm$, und in der

Säule A ist sie $n \frac{p_A}{g} \int_0^m RT_1 dm$. Vor der Ausfüllung war

die potentielle Energie $\frac{p_B}{g} \frac{\Delta p}{g} - \frac{\Delta p}{g} \frac{p_A}{g} + \frac{\Delta p}{ng}$ $\int_0^m RT_2 dm$, bzw. $n \int_0^m RT_1 dm$.

Die Änderung in der potentiellen Energie wird also:

$$\Delta P = \int_0^m \frac{p_B}{g} RT_2 dm + n \int_0^m \frac{p_A}{g} RT_1 dm - \int_0^m \frac{p_B}{g} \frac{\Delta p}{g} RT_2 dm -$$

$$n \int_0^m \frac{p_A}{g} + \frac{\Delta p}{ng} RT_1 dm = - n \int_0^m \frac{\Delta p}{ng} RT_1 dm - \int_0^m \frac{\Delta p}{g} RT_2 dm$$

$$\Delta P = - \int_0^m \frac{\Delta p}{g} RT_1 dm + \int_0^m \frac{\Delta p}{g} RT_2 dm = \int_0^m R (T_2 - T_1) dm. \quad (71)$$

Diese Gleichung gibt die durch die Ausfüllung bewirkte Änderungen der potentiellen Energie der Lage in den zwei Säulen, gleichgültig wie die Temperaturänderungen der bewegten Masse $\frac{\Delta p}{g}$ sind.

Wenn wir statt des Temperaturunterschiedes $T_2 - T_1$ einen infinitesimalen Temperaturunterschied dT und

statt der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ eine Masse m betrachten, erhält

Gleichung 71 die Form $dP = \int_0^m R dT dm$, also genau dieselbe Form wie Gleichung 65. Die freigemachte Energie der Lage zeigt sich so unter allen Umständen durch die Temperaturänderungen der betrachteten Masse. Wir berechnen dann die ausgeführte Expansionsarbeit während der Ausfüllung. Die Masse, die von der Säule A bis zur Säule B strömt, ist $\frac{\Delta p}{g}$. Das spezifische Volumen einer willkürlichen Masseneinheit vor und nach der Ausfüllung nennen wir α_1 und α_2 . Die Expansionsarbeit der Masseneinheit wird $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p da$, und die Expansionsarbeit der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ wird:

$$\Delta E = \int_0^m \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p da \right) dm. \quad (72)$$

Wir suchen dann die Summe der Expansionsarbeit ΔE und der freigemachten Energie der Lage $-\Delta P$.

$$\Delta E - \Delta P = \int_0^m \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p da \right) dm - \int_0^m R (T_2 - T_1) dm =$$

$$\int_0^m \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p da \right) dm - \int_0^m \left(\int_{T_1}^{T_2} R dT \right) dm.$$

$$\Delta E - \Delta P = - \int_0^m \left(\int_{p_1}^{p_2} \alpha dp \right) dm =$$

$$- \int_0^m \left(\int_{p_1}^{p_2} R T d(\log p) \right) dm. \quad (73)$$

Wenn wir die Integration über die ganze Masse m der zwei Säulen ausdehnen, verändert dies den Wert des Integrals nicht, da nur die Masse $\frac{\Delta p}{g}$ Beiträge zum Integral gibt. Wir können daher $\Delta E - \Delta P$ so schreiben:

$$\Delta E - \Delta P = - \int_0^m \left(R \int_{p_1}^{p_2} T d(\log p) \right) dm.$$

Dieser Ausdruck hat genau dieselbe Form wie der in Gleichung 69. Für ein geschlossenes System ist also in allen Fällen die freigemachte Energie sowohl bei Umlagerungen, als bei Ausfüllungen durch

$$\Delta K = - \int_0^m \left(\int_{p_1}^{p_2} adp \right) dm = - \int_0^m \left(R \int_{p_1}^{p_2} Td(\log p) \right) dm \dots (74)$$

gegeben. Wenn wir dieses Integral über die Massen erstrecken, die bei Umlagerungen oder Ausfüllungen ihren Druck ändern, erhalten wir die gesamte Energie, die innerhalb des betrachteten geschlossenen Systems in kinetische Energie übergehen kann.

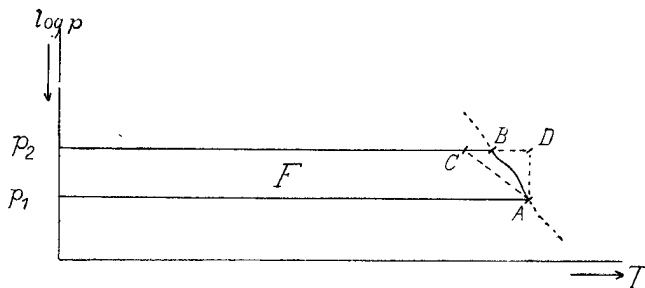


Abb. 27.

Die Grösse $\Delta E - \Delta P$ in Gleichung 73 eignet sich gut für graphische Berechnungen. Wir zeigen das Verfahren auf einem Emagramm. Hier ist $\int_{p_1}^{p_2} Td(\log p)$ gleich der Fläche F (Abb. 27) zwischen den Drucklinien p_1 und p_2 vom absoluten Nullpunkt der Temperatur bis zur Zustandskurve A—B der betrachteten Masseneinheit während der Ausfüllung. Wir erhalten also:

$$\Delta E - \Delta P = - \int_0^{\frac{\Delta p}{g}} \left(\int_{p_1}^{p_2} RTd(\log p) \right) dm = \int_0^{\frac{\Delta p}{g}} RF dm = R\bar{F} \frac{\Delta p}{g}, \dots (75)$$

wo \bar{F} eine durchschnittliche Fläche (Abb. 28) ist, die analog der Fläche F (Abb. 27) durch die durchschnittliche Bewegung der Masseneinheiten in der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ bestimmt wird. Für eine sehr kleine

Partikel wird die je Masseneinheit freigemachte Energie (siehe Abb. 27)

$$\Delta E - \Delta P = RF \dots (76)$$

Dieser Ausdruck ist von genau derselben Form, wie der Ausdruck in Gleichung 70. Wenn eine kleine Partikel ihren Druck ändert, gestattet so ein energetisches Diagrammpapier unter allen Umständen und in einfachster Weise die dadurch freigemachte Energie zu berechnen, gleichgültig ob wir mit Umlagerungen oder mit Ausfüllungen zu tun haben.

Die bei der Ausfüllung freigemachte Energie $\Delta E - \Delta P$ in Gleichung 73 wird ungefähr dieselbe Grösse behalten, gleichgültig wie die ausfüllenden Bewegungen verlaufen. Um dies zu zeigen, betrachten wir genauer die Fläche F auf Abb. 27. Der Druckunterschied $p_1 - p_2$ wird nur selten grösser als 50 mb. Die Zustandskurve einer Masseneinheit während der Ausfüllung liegt im allgemeinen zwischen der isothermen Zustandskurve (Kurve A—D) und der adiabatischen (Kurve A—C). Die Fläche A—C—D—A ist im Verhältnis zu F so klein, dass wir mit genügender Genauigkeit die Fläche F als unabhängig von den Zustandsänderungen der Masseneinheit unterwegs betrachten können. Wenn z. B. $p_1 - p_2$ gleich 50 mb ist, beträgt die Fläche A—C—D—A nur 0,7 % von der Fläche F , und bei einem kleinerem Druckunterschied noch weniger Prozente. Da die Fläche F fast unabhängig von den Zustandsänderungen der am Boden bewegten Masse ist, ist nach Gleichung 75 dies auch bei der durch die Ausfüllung freigemachten Energie $\Delta E - \Delta P$ der Fall. Wir suchen dann den möglichst einfachen Ausdruck für die Fläche \bar{F} in Gleichung 75. Der durchschnittliche Druck der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ vor der Ausfüllung war $p_A + \frac{\Delta p}{2n}$, nach der Ausfüllung $p_B - \frac{\Delta p}{2}$ (Abb. 26). Die Fläche \bar{F} erstreckt sich also auf einem Emagramm (Abb. 28)

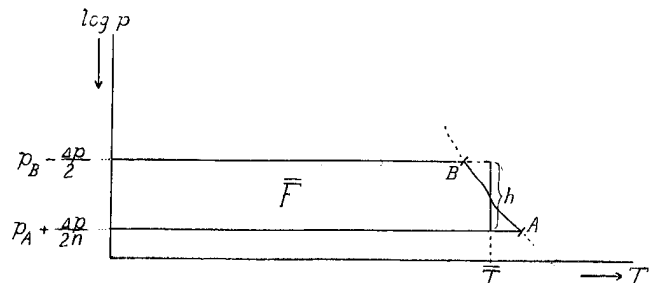


Abb. 28.

zwischen diesen Drucklinien bis zur Zustandskurve A—B, die dem durchschnittlichen Zustand der Masseneinheiten in der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ bei der Ausfüllung entspricht. Bezeichnen wir die mittlere Temperatur bei dieser Kurve mit \bar{T} und den Abstand zwischen den betrachteten Drucklinien mit h (Abb. 28), erhalten wir für \bar{F} folgenden Ausdruck:

$$\bar{F} = \bar{T} \cdot h = \bar{T} \log \left(\frac{p_A + \frac{\Delta p}{2n}}{p_B - \frac{\Delta p}{2}} \right) =$$

$$= \bar{T} \frac{p_A + \frac{\Delta p}{2n} - \left(p_B - \frac{\Delta p}{2} \right)}{\bar{p}} = \frac{\bar{T}}{\bar{p}} \left(p_A - p_B + \frac{n+1}{2n} \cdot \Delta p \right),$$

wo \bar{p} ein mittlerer Druck ist. Die gesamte freigemachte Energie während der Ausfüllung wird dann nach Gleichung 75:

$$\Delta E - \Delta P = \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \left(p_A - p_B + \frac{n+1}{2n} \cdot \Delta p \right) \frac{\Delta p}{g} =$$

$$\bar{\alpha} \left(p_A - p_B + \frac{n+1}{2n} \cdot \Delta p \right) \frac{\Delta p}{g}, \dots (77)$$

wo $\bar{\alpha}$ ein mittleres spezifisches Volumen der Masse $\frac{\Delta p}{g}$ während der Ausfüllung ist.

Es ist uns in dieser Weise gelungen, die bei der Ausfüllung freigemachte Energie in den zwei Säulen zu berechnen. Da die Tief- und Hochdrucke aus derartigen Säulen aufgebaut gedacht werden können, lässt sich in dieser Weise leicht die gesamte bei der Ausfüllung freigemachte Energie mit genügender Genauigkeit berechnen.

Margules hat die Energie der horizontalen Druckverteilung nur aus der Expansionsarbeit berechnet, was nur im isothermen Falle richtig ist. Erst wenn man auch die Änderung der potentiellen Energie der Lage in Betracht zieht, erhält man die leicht übersichtlichen Resultate auf energetischen Diagrammpapieren. Unser Verfahren ist sowohl einfacher, als auch genauer als das Verfahren von Margules, und die Voraussetzungen, die unseren Berechnungen zugrunde liegen, stimmen auch besser mit den tatsächlichen Verhältnissen in der Atmosphäre überein.

Der Arbeitswert der horizontalen Druckverteilung ist von Margules mit der kinetischen Energie verglichen worden. Er entdeckte bekannt-

lich, dass die kinetische Energie in einer Zyklone weitaus am grössten war. Margules berechnete die freigemachte Energie, wenn die Zyklone sich ganz ausfüllt. Nach unserem Verfahren bedeutet dies, dass p_A gleich p_B wird. Weiter setzte Margules voraus, dass die Gebiete, in denen der Druck während der Ausfüllung steigt, unendlich gross sind, wodurch der Druck sich hier während der Ausfüllung nicht ändert. Nach unserem Verfahren bedeutet dies, dass $n = \infty$ wird. (Siehe Abb. 26 und Gleichung 77). Margules setzte auch voraus, dass die Luft in den Gebieten, wo sich der Druck während der Ausfüllung nicht ändert, ruhig liegt. Nach unserem Verfahren bedeutet dies, dass kinetische Energie nur in den inneren Säulen vorkommt, wo der Druck während der Ausfüllung steigt. Unter denselben vereinfachenden Voraussetzungen wie in Margules' Berechnungen untersuchen wir beispielsweise, wann die kinetische Energie gleich der Energie ist, die durch vollständige Ausfüllung freigemacht werden kann. In Gleichung 77 setzen wir $p_A = p_B$ und $n = \infty$ und erhalten dann

$$\Delta E - \Delta P = \frac{\bar{\alpha}}{2g} (\Delta p)^2.$$

Die Masse der Säule B ist $\frac{p - \Delta p}{g}$, und die kinetische Energie der Säule wird

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{p - \Delta p}{g} v^2.$$

Wenn wir K gleich $\Delta E - \Delta P$ setzen, erhalten wir:

$$v = \Delta p \sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{p - \Delta p}} \dots (78)$$

Bei dieser Geschwindigkeit ist also die kinetische Energie der Luft in diesem Falle ebenso gross wie die Energie, die bei einer vollständigen Ausfüllung freigemacht werden kann. Wenn wir in Gleichung 78 $\bar{\alpha}$ und $p - \Delta p$ die Werte 820 und 100 geben, ergibt sich eine Windgeschwindigkeit

$$v = 2,9 \cdot \Delta p \dots (79)$$

In einem der Beispiele Margules' steigt der Druck im Zentrum während der Ausfüllung um 4 Centibar. Durchschnittlich steigt der Druck dann im Tiefdruckgebiet ungefähr 1,4 cb. Wenn wir diesen Wert in Gleichung 79 einsetzen, ergibt sich eine Geschwindigkeit von 4 m/sec. Bei Drucksystemen mit dieser Windgeschwindigkeit ist also im berechneten Falle die kinetische Energie gleich der

Energie, die durch die vollständige Ausfüllung freigemacht werden kann. Bei der gewöhnlichen Zyklontätigkeit ist aber die kinetische Energie weitaus die grösste, weil die horizontalen Druckgradienten und dadurch die Windgeschwindigkeit bedeutend grösser sind.

Die energetischen Gleichungen können nach diesen Untersuchungen keine geeignete Grundlage für eine Einteilung der Energiemengen in der Atmosphäre geben. Die Gleichung 74 zeigt, dass die verschiedenen Energieformen, die in kinetische Energie übergehen können, in genau derselben Weise in den energetischen Gleichungen auftreten. Wir müssen daher eine praktische Einteilung dieser Energiemengen in der Atmosphäre auf einer anderen Grundlage durchführen.

Die geeignetste Einteilung der Energieformen, die in kinetische Energie übergehen können, ist eine Einteilung, die sozusagen die Entstehungswege dieser kinetischen Energie zeigt. Im adiabatischen Falle lässt sich diese Einteilung verhältnismässig einfach durchführen. Wenn in einer geschlossenen Luftmasse Energie aufgespeichert ist, die in kinetische Energie übergehen kann, können wir diese im adiabatischen Falle in drei Stufen freigemacht denken.

1. Erst durch rein vertikale Umlagerungen, wodurch die Labilitätsenergie freigemacht wird. Der Druck am Boden ist bei diesem Prozess unverändert.

2. Dann durch Umlagerungen und Verschiebungen, wodurch das Solenoidfeld verschwindet. Dabei kann sich der Druck am Boden ändern. Die freigemachte Energie ist die labile Energie horizontal benachbarter Luftmassen.

3. Dann durch ausfüllende Bewegungen, wodurch das horizontale Druckfeld auf allen Niveaus verschwindet. Diese freigemachte Energie nennen wir zweckmässig die Energie der horizontalen Druckverteilung.

§ 15. Über Mitteltemperaturen.

Bei einer Reihe von Berechnungen in der Meteorologie wird die Mitteltemperatur einer Luftschicht eingeführt, um Berechnungen einfacher durchführen zu können. Die Mitteltemperatur wird in den meisten Fällen am besten graphisch be-

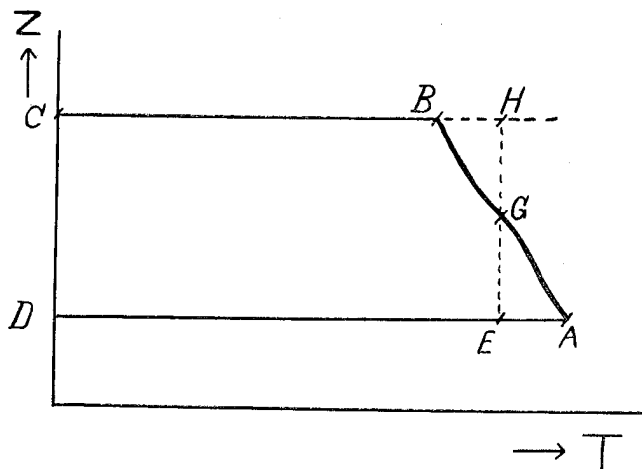


Abb. 29.

stimmt. Wir werden hier zeigen, dass wir die verschiedenen Mitteltemperaturen nach den gebrauchten Diagrammpapieren sehr übersichtlich einteilen können.

1. Wir betrachten die Mitteltemperatur einer Luftschicht von A mit Höhe z_0 und Druck p_0 bis an B mit Höhe z_1 und Druck p_1 . Wir zeichnen erst die Temperaturkurve der Schicht auf einem Diagrammpapier mit Temperatur und Höhe als Koordinaten ein (Abb. 29). Die Fläche A—B—C—D—A hat hier den Wert $\int_{z_0}^{z_1} T dz = \bar{T}_z (z_1 - z_0)$, wo die Linie \bar{T}_z so gelegt ist, dass die Flächen A—G—E—A und G—H—B—G gleich gross werden. Die Grösse

$$\bar{T}_z = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} T dz$$

wird dann die Mitteltemperatur der Schicht, und mit dem Index z bezeichnen wir, dass die Mitteltemperatur in diesem Falle auf einem Diagrammpapier mit der Höhe als Koordinate berechnet worden ist. Diese Mitteltemperatur wird im allgemeinen die *arithmetische Mitteltemperatur* genannt.

2. In Gleichung 64 tritt ein Integral von der Form $\int T dp$ auf. Wenn wir die Integration zwischen den Grenzen p_0 und p_1 vornehmen, erhalten wir $-\int_{p_0}^{p_1} T dp = \bar{T}_p (p_0 - p_1)$, wo \bar{T}_p die Mitteltemperatur ist. Mit dem Index p bezeichnen wir, dass die Mitteltemperatur in diesem Falle analog dem vorigen Falle auf einem Diagrammpapier mit dem Druck als Koordinate berechnet worden ist. Wie Gleichung

64 zeigt, ist diese Mitteltemperatur auch auf die Masse bezogen, und man kann sie daher zweckmässig die *Massenmitteltemperatur* nennen.

3. Wir betrachten die statische Grundgleichung $d\Phi = -\alpha dp$. Mittels der Zustandsgleichung erhalten wir $d\Phi = -\frac{RT}{p} dp = -RT d(\log p)$. Durch Integration über die betrachtete Schicht erhalten wir:

$$-\int_{p_0}^{p_1} RT d(\log p) = R\bar{T}_{\log p} \log \frac{p_1}{p_0},$$

wo $\bar{T}_{\log p}$ die Mitteltemperatur ist. Es ist dies die Mitteltemperatur, die z. B. auf Abb. 5 ermittelt ist. Mit dem Index $\log p$ bezeichnen wir, dass die Mitteltemperatur in diesem Falle auf einem Diagrammpapier mit $\log p$ als Koordinate berechnet worden ist. Bekanntlich wird diese Mitteltemperatur die *barometrische Mitteltemperatur* genannt, weil sie in der barometrischen Höhenformel vorkommt. Koschmieder hat in seiner «Dynamischen Meteorologie» auch eine Mitteltemperatur, die er die «effektive Mitteltemperatur» nennt, eingeführt (S. 45). Eine kurze Untersuchung zeigt aber, dass sie mit der barometrischen Mitteltemperatur identisch ist.

4. In § 13 haben wir ein Integral von der Form $\int T d\left(\frac{1}{p}\right)$ benutzt. Durch Integration über die betrachtete Schicht erhalten wir:

$$\int_{p_0}^{p_1} T d\left(\frac{1}{p}\right) = \bar{T}_{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$$

wo $\bar{T}_{\frac{1}{p}}$ die Mitteltemperatur ist. Diese Mitteltemperatur ist auf Abb. 18 ermittelt worden. Mit dem Index $\frac{1}{p}$ bezeichnen wir, dass die Mitteltemperatur in diesem Falle auf einem Diagrammpapier mit $\frac{1}{p}$ als Koordinate berechnet worden ist.

Wir haben in dieser Weise, je nach der Art des verwendeten Diagrammpapiers, 4 verschiedene Mitteltemperaturen gefunden. Selbstverständlich können neue Probleme auftauchen, die neue Mitteltemperaturen mit sich führen. Sämtliche Mitteltemperaturen, die wir behandelt haben, sind selbstverständlich wahre Mitteltemperaturen. Der Ausdruck «die wahre Mitteltemperatur», den man bisweilen in der Literatur findet, ist daher ein

Ausdruck, der nichts über die Art der verwendeten Mitteltemperatur aussagt.

Als ein recht lehrreiches Beispiel werden wir jetzt eine der klassischen Berechnungen von Margules graphisch auf dem Aerogramm durchführen. Wir haben zwei vertikal benachbarte Luftmassen. Die untere ist 2000 m hoch und hat am Boden die Temperatur 283° abs. und einen Druck von ungefähr 1013 mb (760 mm). Oben ist ihre Temperatur $263,13^\circ$ abs. und ihr Druck etwa 789 mb (591,69 mm). Der Temperaturverlauf in der Luftmasse ist trockenadiabatisch. An der Grenzfläche nimmt die Temperatur plötzlich um 3° ab. Die obenliegende, trockenadiabatisch geschichtete Luftmasse ist auch 2000 m hoch und hat am oberen Ende die Temperatur $240,26^\circ$ und einen Druck von etwa 600 mb (450,22 mm). Auf dem Aerogramm eingezeichnet (siehe Zeichnung 1 der Beilage) erstreckt sich die untere Luftmasse von A bis B und die obere von C bis D. Nach der Umlagerung erstreckt sich die ursprünglich obere Luftmasse von H bis G, wo der Punkt G den Druck von etwa 824 mb hat. Die untere Luftmasse von A bis E ist gestiegen und hat jetzt auf dem Aerogramm den Platz von B bis I. (Der Druckunterschied zwischen A und E ist gleich dem Druckunterschied zwischen C und D). Die Luft von E bis B behält bei den Umlagerungen ihren Platz auf dem Diagramm. Eine Luftpartikel im Punkt E leistet bei der Bewegung bis zum Punkt I je Masseneinheit eine Arbeit, die durch die Fläche B—I—D—C—B dargestellt wird. Diese Fläche entspricht $226 \text{ m}^2/\text{sec}^2$. Wenn die Umlagerung fast beendet ist, bewegt sich die letzte Partikel von A bis B und leistet dadurch je Masseneinheit eine Arbeit, die durch die Fläche A—E—G—H—A dargestellt wird. Diese Fläche entspricht $186 \text{ m}^2/\text{sec}^2$. Ohne nennenswerte Fehler können wir annehmen, dass durch die Bewegung der ganzen Masse A—E bis B—I je Masseneinheit durchschnittlich eine Arbeit von $\frac{1}{2} (226 + 186) \text{ m}^2/\text{sec}^2 = 206 \text{ m}^2/\text{sec}^2$ geleistet wird. Die Masse von A bis E erstreckt sich auf dem Diagrammpapier von 1013 mb bis 824 mb, also über 189 mb. Die ganze Masse von A bis D erstreckt sich über 413 mb. Denken wir uns, dass die geleistete Arbeit über die ganze Masse von A bis D verteilt wird, erhalten wir je Masseneinheit die Arbeit

$$206 \frac{189}{413} \text{ m}^2/\text{sec}^2 = 94 \text{ m}^2/\text{sec}^2. \text{ Wenn diese Arbeit}$$

in kinetische Energie übergeht, erhalten wir $\frac{1}{2}v^2 = 94 \text{ m}^2/\text{sec}^2$, woraus sich $v = 13,7 \text{ m/sec}$ ergibt. Wenn die kinetische Energie gleichmässig über die ganze Masse verteilt ist, erhält also jede Masseneinheit eine Geschwindigkeit von $13,7 \text{ m/sec}$. Margules hat bei seinen Berechnungen den Wert $14,85 \text{ m/sec}$ gefunden. Der Temperaturverlauf der zwei Luftmassen war ursprünglich A—B—C—D und nach der Umlagerung H—G—E—I. Da die Fläche B—I—D—C—B etwas grösser als die Fläche A—E—G—H—A ist, ist die ganze am Umsturz beteiligte Säule nach der Umlagerung etwas höher geworden. Die erste Fläche entspricht 226 Solenoiden und die zweite 186. Der Unterschied ist also 40 Solenoide, welchem eine Höhenänderung von 40 dyn. dm entspricht. Die ganze Säule ist also 4 dyn. m höher geworden. Die Rechnung von Margules ergibt 4,14 m.

Da die ganze Säule 4 dyn. m höher geworden ist, zeigt dies, dass die Mitteltemperatur der Säule durch die Umlagerung gestiegen ist. Da aber kinetische Energie freigemacht worden ist, zeigt Gleichung 68, dass die Mitteltemperatur gesunken

ist. Es ergibt sich also der scheinbare Widerspruch, dass die Mitteltemperatur sowohl gestiegen, als auch gesunken ist. Das beruht selbstverständlich darauf, dass wir verschiedene Mitteltemperaturen betrachtet haben. Die barometrische Mitteltemperatur ist gestiegen, und daher wird die Säule etwas höher. Die Massenmitteltemperatur ist gesunken, und daher wird kinetische Energie freigemacht.

Wenn die untere Luftmasse von A bis B auf dem Aerogramm gesättigt wäre, würden die Partikeln bei den Aufwärtsbewegungen den Kondensationsadiabaten folgen. Wir sehen ohne weiteres, dass die freigemachte Energie in diesem Falle weit grösser als im trockenadiabatischen Falle wird. Die Kondensationswärme hat daher für die Energie der Luftbewegungen eine sehr grosse Bedeutung. In dem Ausdruck in Gleichung 74

$$JK = - \int_0^m \left(\int_{p_1}^{p_2} adp \right) dm = - \int_0^m \left(R \int_{p_1}^{p_2} T d(\log p) \right) dm$$

erhalten wir wahrscheinlich in trockenen Luftmassen recht selten grössere positive Werte für JK.

ANHANG

Auf dem beigefügten Aerogramm enthält Zeichnung 2 eine Aufstiegskurve bis 130 mb und eine rasche graphische Bearbeitung derselben. Die charakteristische Kurve nach Rossby, die Äquivalenttemperaturkurve nach Robitzsch und die Pseudo-Temperaturkurve sind eingezeichnet. Weiter sind die Kurven einer aufsteigenden Partikel vom Punkt A und vom Punkt M eingezeichnet und die positiven Flächen, die verfügbare Energie darstellen, schraffiert worden. Eine aufsteigende Partikel vom Punkt B gibt fast dieselbe positive Fläche wie eine Partikel vom Punkt A. Vom Punkt C her erhalten wir auch eine kleine positive Fläche, während aufsteigende Partikeln von den anderen Punkten auf ihrem ganzen Weg Energie verbrauchen. (Bei diesen energetischen Berechnungen sollten eigentlich virtuelle Temperaturen benutzt werden, sowohl für die Aufstiegskurve, als auch für die Kurve der aufsteigenden Partikel. Da eine aufsteigende Partikel vom Kondensationspunkt ab gesättigt ist, während die umgebende Luft eine relative Feuchtigkeit von meistens weniger als 100 % hat, werden die gefundenen positiven Flächen immer ein wenig zu klein. In den meisten Fällen ist dies bedeutungslos. An heissen Sommertagen und in den Tropen kann aber eine positive Fläche merkbar grösser werden, wenn man virtuelle Temperaturen benutzt. Man berücksichtigt dies am einfachsten dadurch, dass man die Temperatur der aufsteigenden, gesättigten Partikel in jedem Punkt um $(100 - r) \cdot s$ vergrössert, wo s der virtuelle Temperaturunterschied gesättigter Luft und r die relative Feuchtigkeit der umgebenden Luft an der betrachteten Stelle ist.) Es hat keinen Zweck, die charakteristische Kurve und die Äquivalenttemperaturkurve oder die Pseudo-Temperaturkurve in

der Stratosphäre zu zeichnen, da sie wesentlich für troposphärische Vorgänge von Interesse sind. In den meisten Fällen genügt es, diese Kurven bis 300 mb zu zeichnen.

Wenn man die charakteristische Kurve und die Pseudo-Temperaturkurve und eventuelle positive Flächen eingezeichnet hat, ist dieser eine Aufstieg für den gewöhnlichen Bedarf der Wettervorhersage genügend durchgearbeitet. Die verschiedenen Eigenschaften der betrachteten Luftmasse lassen sich dann einfach überblicken; für weitere Bearbeitung kann man auf dem Aerogramm die Verfahren von Shaw, Rossby und Robitzsch benutzen.

Die verschiedenen Skalen und einige Linien auf dem Aerogramm sind auf dem beigefügten Exemplar mit römischen Zahlen bezeichnet worden. Unten folgt eine Übersicht dieser Grössen und eine Angabe, wo sie in der Abhandlung besprochen sind.

- I. Skala for Geopotential. Siehe Seite 12 und 16.
- II. Diese Skala gibt an, wie weit man das Höhenmessen nach rechts verschieben muss, um die Höhe in geometrischen Metern zu erhalten. Siehe Seite 14.
- III. Diese Skala gibt an, wie viele Solenoide oder wie grosse Energiemengen eine Fläche auf dem Aerogramm repräsentiert. Siehe Seite 7.
- IV. Der Abstand zwischen 4 cb auf dieser Skala abgesetzt gibt das spezifische Volumen an. Siehe Seite 15.
- V. Der Abstand zwischen 4 cb auf dieser Skala abgesetzt gibt die Dichte an. Siehe Seite 15.
- VI. Diese Skala gibt aufwärts gerichtete Beschleunigungen an. Siehe Seite 24.

- VII. Diese Skala gibt abwärts gerichtete Beschleunigungen an. Siehe Seite 24.
- VIII. In dieser Höhe auf dem Aerogramm ist die Beschleunigung der Schwere etwa 2 cm pr. sec² kleiner als am Boden. Siehe Seite 14.
- IX. Wenn man das Aerogramm für Druckwerte 300 bis 100 mb benutzt, ist die Beschleunigung der Schwere ungefähr 5 cm pr. sec² kleiner als am Boden. Siehe Seite 14.
- X. Skala für den äquivalenten Temperaturunterschied. Siehe Seite 18.
- XI. Skala für den Pseudo-Temperaturunterschied. Siehe Seite 20 und 21.
- XII. Skala für Entropie längs der Temperaturlinien 0° und — 50°. Siehe Seite 21.
- XIII. Linie, die den maximalen Wasserdampfdruck angibt. Grundlinie 300 mb. Siehe Seite 18.
- XIV. Linie, die den maximalen Wasserdampfdruck über Wasser angibt. Grundlinie 300 mb. Siehe Seite 18.
- XV. Linie, die den maximalen Wasserdampfdruck über Eis angibt. Grundlinie 300 mb. Siehe Seite 18.
- XVI. Trockenadiabaten. Siehe Seite 13.
- XVII. Kondensationsadiabaten nach Fjeldstad. Siehe Seite 13 und 21.
- XVIII. Kondensationsadiabaten für Druckwerte 300 bis 100 mb. Siehe Seite 13.
- XIX. Linien maximaler spezifischer Feuchtigkeit. Siehe Seite 13 und 14.
- XX. Kurze Striche an den Hauptisobaren, die den Unterschied zwischen virtueller und reeller Temperatur bei gesättigter Luft zeigen. Siehe Seite 13.

Die Skalen auf dem Aerogramm die im Meter-Tonnen-Sekunden-System gegeben sind, sind mit einem fünfeckigen Stern bezeichnet worden.

