

# GESETZMÄSSIGKEITEN IN DER WINDVERTEILUNG

VON TH. HESSELBERG

(Manuskript am 7. März 1936 eingeliefert.)

Im folgenden sollen die Windregistrierungen am Meteorologischen Observatorium in Ås ( $\varphi = 59^\circ 40' \text{ N.}$ ,  $\lambda = 10^\circ 46' \text{ E. v. Greenw.}$ ,  $H = 90 \text{ m}$ ) vom Januar und Oktober 1929 verwendet werden, um einige Gesetzmässigkeiten in der Windverteilung nachzuweisen.

Die Registrierungen wurden zuerst in der üblichen Weise bearbeitet, d. h. die Richtung und die Geschwindigkeit des Windes wurden für jede Stunde herausgenommen, und zwar in der Weise ausgewertet, dass die verschiedenen registrierten Richtungen in der Skala 01—32 eingetragen und die Geschwindigkeiten nach Intervallen von 0.7 m/sek berechnet wurden.

Aus diesen Stundenwerten wurden die Komponenten des Windes längs einer Achse  $\alpha$  für jede Stunde berechnet. Als Achsen wurden zuerst die Richtungen N—S und E—W gewählt und zwar so, dass die positiven Achsen gegen Osten und gegen Norden gerichtet waren. Für westliche Winde und für südliche Winde ist dann  $v_\alpha$  positiv.

Die Stundenwerte von  $v_\alpha$  wurden benutzt, um die Komponente  $v_{\alpha.m}$  des Mittelwindes  $v_m$  im betreffenden Monat zu berechnen. Diese Komponente ist nach der Formel:

$$(1) \quad v_{\alpha.m} = \frac{1}{n} \sum_1^n v_\alpha$$

zu berechnen.

Es wurden danach Tabellen über die Abweichungen der Komponenten des Windes von diesem Mittelwerte ausgearbeitet. Diese Abweichungen:

$$(2) \quad u_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha.m}$$

wurden für jede Stunde berechnet.

Mit Hilfe der Tabellen über  $u_\alpha$  wurde dann die durchschnittliche Abweichung:

$$(3) \quad u_{\alpha.m} = \frac{1}{n} \sum_1^n |u_\alpha|$$

berechnet.

Schliesslich wurden für jede Stunde die Quadrate  $u_\alpha^2$  und ihr Mittelwert:

$$(4) \quad (u_\alpha^2)_m = \frac{1}{n} \sum_1^n u_\alpha^2$$

berechnet.

Die mit Hilfe der Formeln (1), (3) und (4) berechneten Mittel sind in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1.  
Mittelwerte.

	$v_{\alpha.m}$		$u_{\alpha.m}$		$(u_\alpha^2)_m$	
	E—W	N—S	E—W	N—S	E—W	N—S
Januar 1929	— 0.124	— 0.651	0.872	1.554	1.618	5.157
Oktober 1929	+ 0.006	+ 1.238	1.130	2.775	2.785	12.778

Im folgenden sollen auf verschiedene Weise die Stundenwerte von  $v_\alpha$ ,  $u_\alpha$  und  $u_\alpha^2$  untersucht werden, um Gesetzmässigkeiten in der Windverteilung zu finden.

## 1. Die Verteilungskurven der Windkomponenten.

In den Tabellen der Stundenwerte der Windkomponenten wurde die Zahl der Fälle mit  $v_\alpha$  innerhalb Geschwindigkeitsintervalle von 1 m/sek aufgezählt. Dabei wurden die Fälle mit der Geschwindigkeit 0 gleichmässig auf die Geschwindigkeitsintervalle von 0 bis 1 m/sek und von 0 bis minus 1 m/sek verteilt. Das Resultat der Aufzählung ist in Tabelle 3 wiedergegeben.

Als Argument sind in der ersten Kolonne die Geschwindigkeitsintervalle angegeben, und zwar oben für positive und unten für negative Werte der Komponenten. In den vier nächsten Kolonnen ist die Anzahl von Fällen angegeben, in denen  $v_\alpha$  innerhalb der verschiedenen Intervalle fiel. In den vier letzten Kolonnen findet man die entsprechenden

Tabelle 2.  
Verteilung der Windkomponenten.

Geschwindigkeits- intervalle	Zahl der Fälle				Prozentuale Verteilung			
	Januar 1929		Oktober 1929		Januar 1929		Oktober 1929	
	E—W	N—S	E—W	N—S	E—W	N—S	E—W	N—S
+ 13.1—14.0				1				0.1
12.1—13.0				3				0.4
11.1—12.0				4				0.5
10.1—11.0				8				1.1
9.1—10.0				15				2.0
8.1— 9.0		1		6		0.1		0.8
7.1— 8.0		1		8		0.1		1.1
6.1— 7.0		2	2	13		0.3	0.3	1.7
5.1— 6.0		16	4	11		2.2	0.5	1.5
4.1— 5.0	3	15	7	11	0.4	2.0	0.9	1.5
3.1— 4.0	1	8	17	23	0.1	1.1	2.3	3.1
2.1— 3.0	74	24	31	58	1.8	3.2	4.2	7.8
1.1— 2.0	90	20	102	79	12.1	2.7	13.7	10.6
+ 0 — 1.0	245	126	193	64	32.9	16.9	26.0	8.6
— 0 — 1.0	267	220	262	53	35.9	29.6	35.3	7.1
1.1— 2.0	76	137	70	165	10.2	18.4	9.4	22.2
2.1— 3.0	25	98	26	84	3.5	13.2	3.5	11.3
3.1— 4.0	12	38	15	101	1.6	5.1	2.0	13.6
4.1— 5.0	8	21	9	21	1.1	2.8	1.2	2.8
5.1— 6.0	3	5	5	9	0.4	0.7	0.7	1.2
6.1— 7.0		7	1	5		1.0	0.1	0.7
7.1— 8.0		1		2		0.1		0.3
8.1— 9.0		2				0.3		
9.1—10.0		1				0.1		
— 10.1—11.0		1				0.1		

prozentualen Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten auf die verschiedenen Intervalle.

Man sieht unmittelbar, dass die in der Tabelle aufgeführten Verteilungen nur sehr mässig mit den einfachen Verteilungen übereinstimmen, die man nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz bekommen müsste. Wir wollen sehen, ob systematische Unterschiede auftreten, und wollen deshalb die Maxwell'schen Verteilungen berechnen. Diese sind durch die Gleichung:

$$(5) \quad F_{\alpha} = \sqrt{\frac{k_{\alpha}}{\pi}} e^{-k_{\alpha} u_{\alpha}^2}$$

gegeben, wo  $F_{\alpha}$  die Häufigkeit von  $u_{\alpha}$  pro Intervall von 1 m/sek bedeutet. Die Grösse  $k_{\alpha}$  ist eine Konstante, die mit Hilfe der Gleichung:

$$(6) \quad k_{\alpha} = \frac{1}{2 (u_{\alpha}^2)_m}$$

zu berechnen ist.

Wenn man hier die in Tabelle 1 gegebenen Werte von  $(u_{\alpha}^2)_m$  einführt, so erhalten wir die in Tabelle 3 verzeichneten Werte der Konstanten  $k_{\alpha}$  und  $\sqrt{\frac{k_{\alpha}}{\pi}}$ .

Tabelle 3.

	$k_{\alpha}$		$\sqrt{\frac{k_{\alpha}}{\pi}}$	
	E—W	N—S	E—W	N—S
Januar 1929 . . . .	0.3090	0.0970	0.313	0.175
Oktober 1929 . . . .	0.1795	0.0391	0.239	0.112

Wenn man diese Werte der Konstanten in Gleichung (5) einführt, bekommt man die in Fig. 1 dünn gezogenen Verteilungskurven. Oben sind die Verteilungskurven für Januar 1929 eingezeichnet, und zwar links (Fig. 1, A) die Kurve für  $v_{\alpha}$  in der Richtung E—W und rechts (Fig. 1, B) die Kurve für  $v_{\alpha}$  in der Richtung N—S. Unten sind in der-

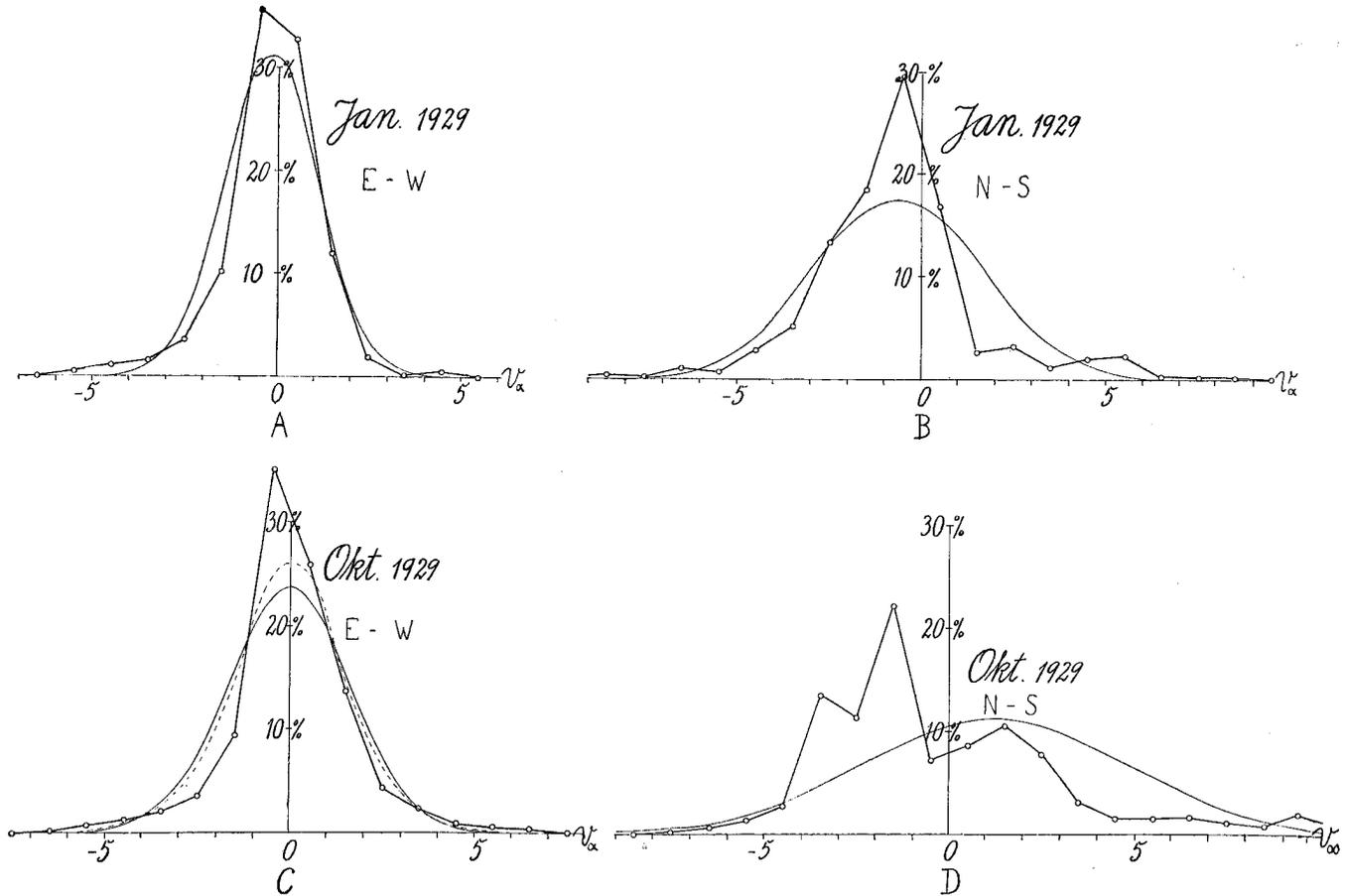


Fig. 1. Verteilungskurven für die Komponenten des Windes im Januar und im Oktober 1929.

selben Weise die Verteilungskurven für Oktober 1929 (Fig. 1, C und Fig. 1, D) angegeben.

Zum Vergleich sind auch die in Tabelle 2 aufgeführten prozentuellen Verteilungen durch die dick gezogenen Linien eingezeichnet.

Wie zu erwarten war, treten grosse Unterschiede zwischen den wirklichen Verteilungskurven und den nach dem Maxwell'schen Gesetz berechneten Verteilungskurven auf. Wenn man die Figuren etwas näher betrachtet, sieht man aber, dass diese Unterschiede im Januar 1929 und für die Richtung E—W im Oktober 1929 gemeinsame Züge aufweisen. Verglichen mit den Maxwell'schen Verteilungskurven zeigen die wirklichen Verteilungskurven zu viele Fälle mit kleinen Abweichungen vom Mittelwert, zu wenige Fälle mit mittleren Abweichungen und zu viele Fälle mit grossen Abweichungen.

Etwas ähnliches haben Bjørkdal und ich<sup>1)</sup> für

die Verteilungskurven der Windunruhe gefunden. Bei den Untersuchungen der Windunruhe kannten wir zwar nicht die Verteilungskurven der Komponenten, sondern nur diejenige der skalaren Geschwindigkeit  $v$ . In allen untersuchten Fälle zeigten aber diese Verteilungskurven gemeinsame Züge, verglichen mit der Maxwell'schen Verteilungskurve, indem sie alle zu viele kleine und zu viele grosse Geschwindigkeiten aufwiesen, während zu wenige Fälle mittlerer Geschwindigkeiten auftraten. Wir zeigten, dass man diese charakteristischen Züge der empirischen Verteilungskurven erhalten könnte, wenn man anstatt der einfachen Maxwell'schen Verteilung  $G$  für die Geschwindigkeit eine Summe  $G'$  von solchen:

$$G' = \frac{1}{n} \sum_1^n G$$

verwendete.

Eine ähnliche Erscheinung hat Eddington bei seinen Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Sterne gefunden. Er schreibt: «The observed

1) Th. Hesselberg und E. Bjørkdal: Ueber das Verteilungsgesetz der Windunruhe. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. Hergesellschaftschrift. Leipzig 1929.

distribution has what is technically called a positive excess, that is to say, too many small and too many large motions compared with the number of moderate motions.» Er gibt hierfür die folgende Erklärung: «A distribution of this kind would be obtained if we mixed together error distributions having different moduli, and it may therefore be supposed that the deviations arise from the non-homogeneity of the material.»

Wie man aus diesen Zitaten ersieht, fand Edington dieselbe Erscheinung bei seinen Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Sterne, wie Bjørkdal und ich bei unseren Untersuchungen der Windunruhe fanden. Er gab auch dieselbe Erklärung für die Erscheinung.

Es liegt jetzt nahe zu untersuchen, ob die charakteristischen Züge der empirischen Verteilungskurven in Fig. 1, A—C, auch dadurch erklärt werden können, dass man nicht eine einfache Maxwell'sche Verteilung hat, sondern eine Mischung von mehreren Verteilungen. Anstatt der Verteilung  $F_\alpha$  (Gleichung 5) sollte man dann eine Verteilung  $F'_\alpha$  haben, wo:

$$(7) \quad F'_\alpha = \frac{1}{n} \sum_1^n F_\alpha$$

ist.

Wir werden beispielweise die Verteilung von  $v_\alpha$  in der Richtung E—W im Oktober 1929 betrachten. Wenn wir die in Tabelle 3 gegebenen Werte von  $k_\alpha$  und  $\sqrt{\frac{k_\alpha}{\pi}}$  in Gleichung (5) einführen, erhalten wir die Verteilung:

$$F_\alpha = 0.239 e^{-0.1795 u_\alpha^2}.$$

Diese Verteilung ist durch die dünn gezogene Kurve in Fig. 1, C wiedergegeben.

Wir setzen jetzt versuchsweise:

$$F'_\alpha = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_{\alpha.1}}{\pi}} e^{-k_{\alpha.1} u_\alpha^2} + \sqrt{\frac{k_{\alpha.2}}{\pi}} e^{-k_{\alpha.2} u_\alpha^2} \right).$$

Wir wählen rund:  $\sqrt{\frac{k_{\alpha.1}}{\pi}} = 0.20$  und erhalten dann:

$$F'_\alpha = 0.10 e^{-0.125 u_\alpha^2} + 0.16 e^{-0.319 u_\alpha^2}.$$

Diese Verteilung ist durch die gestrichelte Kurve in Fig. 1, C dargestellt. Wenn man die Kurve mit der einfachen Maxwell'schen Verteilungskurve vergleicht, so sieht man, dass sie zu viele kleine und zu viele grosse Abweichungen vom Mittelwert hat, während auf der anderen Seite zu wenige mittlere

Abweichungen auftreten. Die Kurve  $F'_\alpha$  zeigt also dieselben charakteristischen Unterschiede von der einfachen Maxwell'schen Verteilungskurve wie die empirische Verteilungskurve. Es kann also keinem Zweifel unterliegen, dass die empirischen Verteilungskurven in Fig. 1, A—C, mit befriedigender Genauigkeit durch Gleichung (7) dargestellt werden können.

Die empirische Verteilungskurve für  $v_\alpha$  in der Richtung N—S im Oktober 1929 (Fig. 1, D) ist von den anderen empirischen Verteilungskurven (Fig. 1, A—C) recht verschieden und weicht viel von der einfachen Maxwell'schen Verteilungskurve ab. Sie ist aber einfach zu deuten, weil man sofort sieht, dass sie hauptsächlich aus einer Mischung der Verteilungskurve  $F_{\alpha.1}$  mit dem Mittelwert  $v_{\alpha.m.1} = 1.5$  und einer anderen Verteilungskurve  $F_{\alpha.2}$  mit dem Mittelwert  $v_{\alpha.m.2} = -2.5$  besteht. Sie kann deshalb durch eine Gleichung:

$$(8) \quad F'_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sqrt{\frac{k_{\alpha,\nu}}{\pi}} e^{-k_{\alpha,\nu} (v_\alpha - v_{\alpha.m.\nu})^2}$$

dargestellt werden. Gleichung (7) ist ein Spezialfall dieser Gleichung.

Die charakteristischen Züge der empirischen Verteilungskurven lassen sich also erklären, wenn man annimmt, dass verschiedene Maxwell'sche Verteilungen mit verschiedenen Moduli und teilweise mit verschiedenen Mittelwerten im Beobachtungsmaterial gemischt worden sind. Dies hat wohl seine physikalische Erklärung darin, dass im Laufe des Monats verschiedene vorherrschende Winde aufgetreten sind, jeder mit seinem System von Abweichungen nach dem Maxwell'schen Gesetz.

In dem Zeitraum  $t_\nu$  mit dem Hauptwind  $v_{m,\nu}$  hat man dann für die Häufigkeit der Komponenten  $v_\alpha$ :

$$F_{\alpha,\nu} = \sqrt{\frac{k_{\alpha,\nu}}{\pi}} e^{-k_{\alpha,\nu} (v_\alpha - v_{m,\nu})^2}.$$

In einem Zeitraum  $T$ , in dem verschiedene Hauptwinde aufgetreten sind, wird die Häufigkeit der Komponenten durch die Gleichung:

$$(9) \quad F'_\alpha = \frac{1}{T} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} t_\nu \sqrt{\frac{k_{\alpha,\nu}}{\pi}} e^{-k_{\alpha,\nu} (v_\alpha - v_{m,\nu})^2}.$$

dargestellt. Diese Gleichung stimmt mit der empirischen Gleichung (8) überein.

**2. Die Änderung des Modulus  $k_\alpha$  mit der Richtung.**

Aus Tabelle 3 geht hervor, dass der Modulus  $k_\alpha$  verschieden ist für die zwei willkürlich gewählten Achsen. Dies ist der Fall sowohl im Januar wie im Oktober 1929, und im allgemeinen wird man finden, dass der Wert von  $k_\alpha$  längs einer Achse mit der Richtung der Achse variiert. Mit Hilfe von Gleichung (6):

$$k_\alpha = \frac{1}{2(u_\alpha^2)_m}$$

findet man leicht diese Änderung des Modulus, wenn man diejenige von  $(u_\alpha^2)_m$  gefunden hat.

Wir wählen ein Koordinatensystem, wo die Achse  $\alpha$  einen Winkel  $\alpha$  mit der positiven  $X$ -Achse bildet, und haben dann:

$$u_\alpha = u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha,$$

$$u_\alpha^2 = u_x^2 \cos^2 \alpha + u_y^2 \sin^2 \alpha + 2 u_x u_y \sin \alpha \cos \alpha.$$

Durch Summation und Mittelbildung erhält man hieraus:

$$(u_\alpha^2)_m = (u_x^2)_m \cos^2 \alpha + (u_y^2)_m \sin^2 \alpha + 2 (u_x u_y)_m \sin \alpha \cos \alpha.$$

Wir wählen jetzt die Koordinatachsen so, dass  $(u_x^2)_m$  längs der  $X$ -Achse seinen kleinsten und längs der  $Y$ -Achse seinen grössten Wert hat. Die Gleichung wird dann vereinfacht und wir erhalten:

$$(10) \quad (u_\alpha^2)_m = (u_x^2)_m \cos^2 \alpha + (u_y^2)_m \sin^2 \alpha.$$

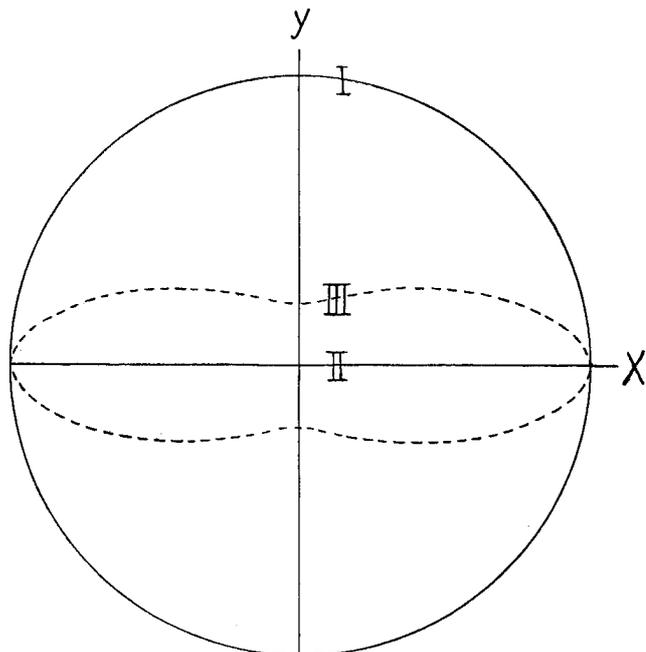


Fig. 2. Die Variation des Modulus  $k_\alpha$  mit der Richtung.

Mit Hilfe von Gleichung (6) ergibt sich dann:

$$(11) \quad k_\alpha = \frac{k_x k_y}{k_x \sin^2 \alpha + k_y \cos^2 \alpha}$$

Da die  $X$ -Achse in der Richtung des grössten Wertes von  $k_\alpha$  liegt, haben wir:  $0 \leq \frac{k_y}{k_x} \leq 1$ .

In Fig. 2 stellen die ganz ausgezogenen Kurven I und II die Variationen von  $k_\alpha$  mit der Richtung in den Grenzfällen dar. Die dazwischenliegende, gestrichelte Kurve III giebt  $k_\alpha$  für Oktober 1929 an. Eine Untersuchung zeigt, dass  $k_\alpha$  hier seinen grössten Wert in der Richtung E—W, und seinen kleinsten Wert in der Richtung N—S hat. Wir erhalten somit nach Tabelle 3:

$$\frac{k_y}{k_x} = \frac{0.0391}{0.1795} = 0.218.$$

Wir sehen, dass  $k_\alpha$  eine charakteristische Einschnürung der Kurve längs der Achse der kleinsten Wertes zeigt.

**3. Die Windverteilung in einem Vektordiagramm.**

Um die Windverteilung zu studieren, habe ich für jede Windrichtung 01—32 die Anzahl  $n$  von Fällen innerhalb der verschiedenen Geschwindigkeitsintervalle von 0.7 m/sec im Januar und im Oktober 1929 gezählt.

In einem Vektordiagramm (Fig. 3) bedeutet dann

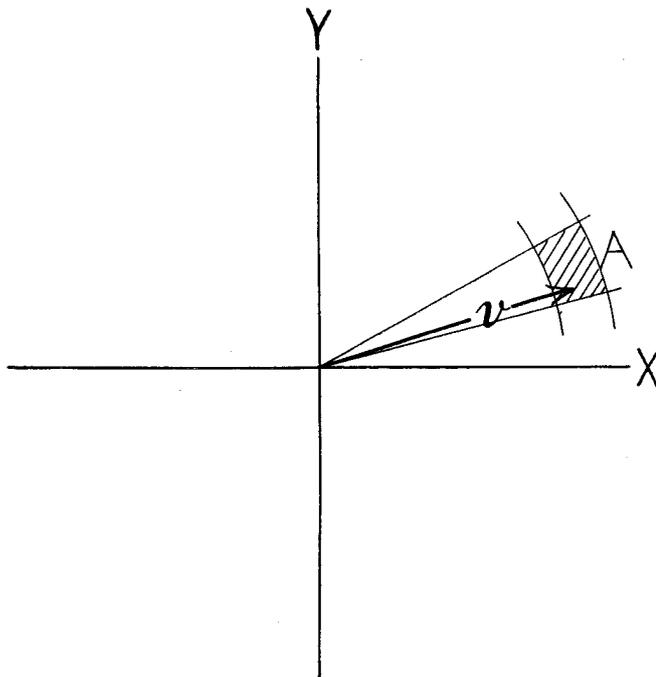


Fig. 3.

$n$  die Zahl der Fälle, bei denen die Spitze des Windvektors  $v$  innerhalb einer Fläche  $A$  liegt, die von zwei Radien und von zwei Kreisbogen begrenzt ist.

Wenn wir jetzt das Verhältnis:

$$n' = \frac{n}{A}$$

bilden, so ist  $n'$  die Zahl der Fälle pro Flächeneinheit der Windrose. Wenn wir weiter mit der Gesamtanzahl  $N$  der Fälle dividieren, so bekommen wir die Häufigkeit  $W$  pro Flächeneinheit:

$$(12) \quad W = \frac{n}{AN}.$$

Ich habe diese Häufigkeiten  $W$  getrennt für Januar und Oktober 1929 berechnet. Um einen Ausgleich zu bekommen, sind dabei die Flächen  $A$  so gross gewählt worden, dass sie über vier Richtungsintervalle greifen, und zwar habe ich, um eine gute Verteilung der Zahlen  $W$  im Vektordiagramm zu erhalten, abwechselnd die Richtungsintervalle:

01—04, 05—08 . . . . . 25—28, 29—32

und die Intervalle:

31—02, 03—06 . . . . . 23—26, 27—30

benutzt.

Die in dieser Weise gefundenen Häufigkeitszahlen  $W$  sind dann in das Vektordiagramm eingetragen, und Kurven gleicher Häufigkeit sind gezeichnet worden.

Die Vektordiagramme für Januar und Oktober 1929 sind unten in Fig. 4 dargestellt, und zwar links für Januar und rechts für Oktober. Der Maststab ist so gewählt worden, dass die Kurve die Häufigkeit pro 0.5 cm<sup>2</sup> des Diagramms angibt.

Im Januar hat die Häufigkeitsfläche ungefähr ihr Maximum für Windstille, während man im Oktober ein Maximum für Windstille und ein sekundäres Maximum für einen Wind von etwa 3 m/sek. vom Süden findet.

Wie zu erwarten war, haben die Flächen eine gewisse Ähnlichkeit mit Maxwellschen Verteilungsflächen oder vielmehr mit einer Verteilungsfläche, die aus mehreren einfachen Maxwellschen Verteilungsflächen zusammengesetzt ist. Die Flächen zeigen aber so grosse Unregelmässigkeiten, dass sie sich nur schlecht für eine genaue Analyse eignen.

Als eine erste Annäherung werden wir theoretisch den Fall einer Verteilung nach dem einfachen Maxwellschen Verteilungsgesetz behandeln. Die

Häufigkeiten  $F_x$  und  $F_y$  der verschiedenen Werte der Komponenten  $u_x$  und  $u_y$  der Abweichung des Windes vom Mittelwind sind dann:

$$F_x = \sqrt{\frac{k_x}{\pi}} e^{-k_x u_x^2}, \quad F_y = \sqrt{\frac{k_y}{\pi}} e^{-k_y u_y^2}.$$

Der Einfachheit halber wählen wir wieder die  $X$ -Achse in der Richtung des grössten Wertes von  $k_\alpha$ . Wir erhalten dann für die Häufigkeit  $dW$  einer Windabweichung  $U$  mit  $X$ -Komponente zwischen  $U_x$  und  $U_x + dU_x$  und mit  $Y$ -Komponente zwischen  $U_y$  und  $U_y + dU_y$ :

$$dW = \sqrt{\frac{k_x}{\pi}} e^{-k_x U_x^2} dU_x \cdot \sqrt{\frac{k_y}{\pi}} e^{-k_y U_y^2} dU_y.$$

Für die Häufigkeit  $W$  pro Flächeneinheit des Vektordiagramms erhalten wir dann:

$$(13) \quad W = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} e^{-(k_x U_x^2 + k_y U_y^2)}.$$

Wenn wir hier Polarkoordinaten einführen, erhalten wir:

$$(14) \quad W = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} e^{-c_\alpha U^2},$$

wo:

$$(15) \quad c_\alpha = k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha$$

ist.

Da die  $X$ -Achse in der Richtung gelegt worden ist, in der  $k_\alpha$  den grössten Wert hat, wird  $k_y$  einen Wert zwischen  $k_x$  und 0 haben. In Fig. 5 sind die zwei Grenzfälle durch die ganz ausgezogenen Kurven I und II dargestellt, während die gestrichelte Kurve III die Variation von  $c_\alpha$  mit der Richtung für Oktober 1929 angibt, wo man:

$$\frac{k_y}{k_x} = 0.218$$

hat. Aus der Figur ersieht man, dass auch der Modulus  $c_\alpha$  die charakteristische Einschnürung der Kurve längs der Achse des kleinsten Wertes hat. Längs den Koordinatenachsen ist  $c_\alpha = k_\alpha$ .

Wenn man  $W$  einen konstanten Wert  $W_n$  gibt, so erhält man aus Gleichung (13):

$$(16) \quad k_x U_x^2 + k_y U_y^2 = \log \text{nat} \left( \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi W_n} \right).$$

In einem Vektordiagramm, in dem  $U_x = x$  und  $U_y = y$  ist, sind folglich die Häufigkeitskurven Ellipsen.

Wir wollen jetzt die einfache Maxwellsche Verteilungsfläche für Januar 1929 berechnen. Der kleinste Wert von  $(u_\alpha^2)_m$  ergibt sich hier in der

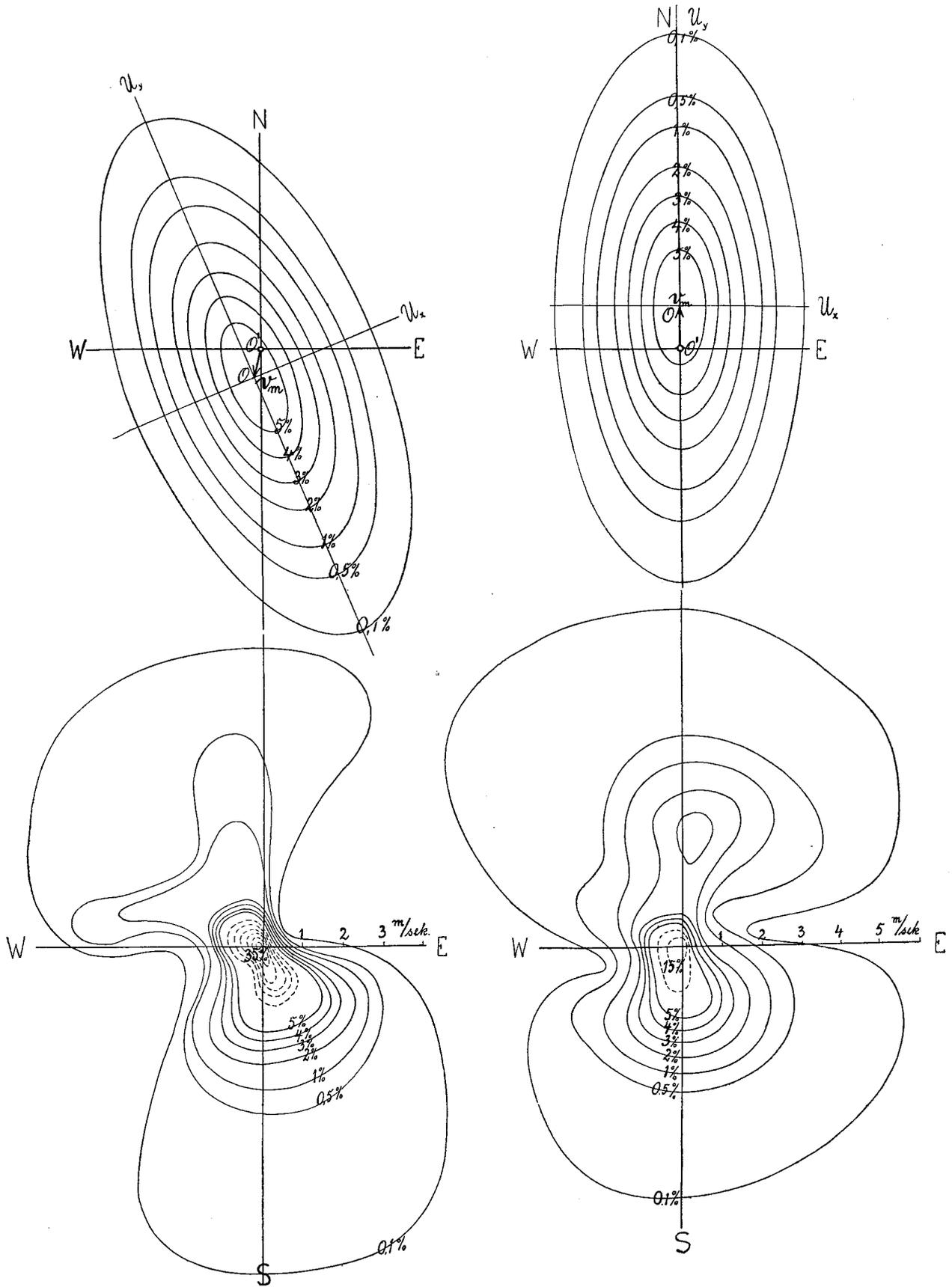


Fig. 4. Die empirischen und die Maxwell'schen Verteilungsflächen für Januar und Oktober 1929.

Richtung WSW—ENE. Da  $k_u$  in dieser Richtung den grössten Wert hat, legen wir hier die X-Achse. Wir finden:

$$k_x = 0.410', \quad k_y = 0.085.$$

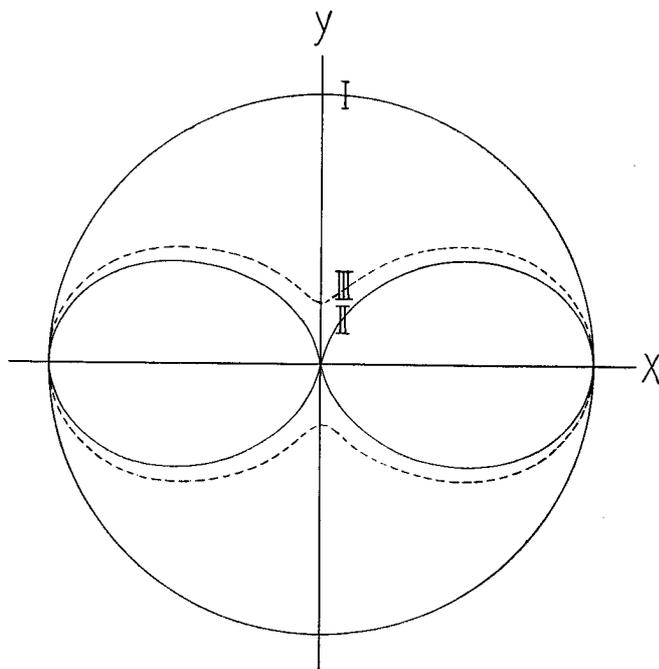


Fig. 5. Die Variation des Modulus  $c_x$  mit der Richtung.

Wenn diese Werte in Gleichung (16) eingeführt werden, erhalten wir:

$$0.410 U_x^2 + 0.085 U_y^2 = \log \text{nat} \left( \frac{0.6}{W} \right).$$

Wir geben hier nach einander  $W_x$  die Werte 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4 und 5 Prozent, und erhalten die oben links in Fig. 4 gezeichneten Ellipsen, die die einfache Maxwell'sche Verteilungsfläche für  $U$  im Januar 1929 darstellen.

Es sind hier ausser den Achsen für  $U_x = 0$  und  $U_y = 0$  auch die Linien für N—S und E—W eingezeichnet. Für diese Achsen ist Origo an einem Punkt  $O'$  verschoben, an dem  $O'O = v_m$  ist.

Während die Ellipsen relativ zum Koordinatensystem mit Origo im Punkt  $O$  die Verteilungsfläche für die Windabweichungen  $U$  ergeben, stellen die Ellipsen relativ zum Koordinatensystem mit Origo im Punkt  $O'$  die Verteilungsfläche für den Wind  $v$  selbst dar, und man kann einen Vergleich mit der unten in Fig. 4 gegebenen empirischen Verteilungsfläche für  $v$  vornehmen.

In entsprechender Weise ist die oben rechts in Fig. 4 gegebene Maxwell'sche Verteilungsfläche für Oktober 1929 konstruiert worden.

Es sind zwischen den Maxwell'schen und den empirischen Verteilungsflächen einige charakteristische Unterschiede, die ins Auge fallen. Erstens ist es auffallend, dass die maximale Häufigkeit viel grösser in der empirischen Verteilungsfläche ist, als in der Maxwell'schen Verteilungsfläche, und dass die empirische Fläche in der nächsten Umgebung vom Maximum steiler abfällt als die Maxwell'sche, um in grösseren Entfernungen vom Maximum weniger steil als diese zu werden. Verglichen mit der einfachen Maxwell'schen Verteilungsfläche zeigt die empirische Verteilungsfläche infolgedessen zu viele Fälle mit grossen und kleinen Abweichungen und zu wenige Fälle mit mittleren Abweichungen. Die empirische Verteilungsfläche zeigt folglich genau dieselben charakteristischen Züge, die wir in § 1 für die empirischen Verteilungskurven der Windkomponenten nachgewiesen haben, und die dadurch erklärt wurden, dass wir es im Beobachtungsmaterial nicht mit einer einfachen Maxwell'schen Verteilung zu tun haben, sondern dass mehrere Maxwell'sche Verteilungen mit verschiedenen Moduli und mit verschiedenen Mittelwerten vorkommen.

Wir wollen jetzt die Gleichung dieser komplexen Verteilungsfläche aufstellen. In einem Zeitraum  $t_v$  mit einem vorherrschenden Wind  $v_{m.v}$  ist nach Gleichung (13) die Häufigkeit  $W_v$  der verschiedenen Winde  $v$  durch die Gleichung:

$$W_v = \frac{\sqrt{k_{x.v} k_{y.v}}}{\pi} e^{-[k_{x.v}(v_x - v_{x.m.v})^2 + k_{y.v}(v_y - v_{y.m.v})^2]}$$

gegeben, die eine einfache Maxwell'sche Verteilungsfläche darstellt.

In einem Zeitraum  $T$ , in dem verschiedene Hauptwinde vorhanden waren, wird die Häufigkeit  $W'$  der verschiedenen Winde durch die Summe:

$$17) \quad W' = \frac{1}{T} \sum_{v=1}^{v=n} t_v \frac{\sqrt{k_{x.v} k_{y.v}}}{\pi} e^{-[k_{x.v}(v_x - v_{x.m.v})^2 + k_{y.v}(v_y - v_{y.m.v})^2]}$$

gegeben sein. Dies ist folglich die Gleichung unserer komplexen Verteilungsfläche.

Wenn man die Windregistrierungen in Ås für Januar und Oktober 1929 durchsieht, findet man in beiden Monaten Zeiträume  $t_v$ , in denen Windstille vorherrschend ist und die auftretenden schwachen Winde sich um den Wert  $v_{m.v} = 0$  gruppieren. Diese Perioden mit schwachen Winden sind so häufig, dass sie für die Lage des Haupt-

maximums der komplexen Verteilungsfläche bestimmend sind. Sowohl im Januar wie im Oktober finden wir deshalb das Hauptmaximum der Verteilungsfläche für Windstille.

Schliesslich kann erwähnt werden, dass die einfachen Verteilungsflächen, aus denen die komplexe Verteilungsfläche zusammengesetzt ist, nach dem Exponentialgesetz steil mit dem Abstand vom Zentrum abfallen. Wegen des steilen Gefälles der Teilflächen wird die komplexe Verteilungsfläche leicht ziemlich unregelmässig, und die Konturlinien erhalten grosse Aus- und Einbuchtungen. Der unregelmässige Verlauf der Konturlinien der empirischen Verteilungsflächen rührt also nicht allein von der Spärlichkeit des Beobachtungsmaterials her, sondern auch daher, dass die Fläche aus mehreren Maxwell'schen Verteilungsflächen zusammengesetzt ist.

**4. Die Häufigkeit des Windes in bestimmten Richtungen und seine mittleren Geschwindigkeiten.**

Wir werden zuerst den Fall einer einfachen Maxwell'schen Verteilung des Windes behandeln. Nach Gleichung (14) haben wir dann für die Häufigkeit einer Windabweichung  $U$  mit der Richtung  $\alpha$  und der Geschwindigkeit  $U$ :

$$W = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} e^{-(k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha) U^2}.$$

In einem Vektordiagramm (Fig. 6) mit Origo mit Punkt  $O'$  an der Spitze des Vektors  $v_m$  ist  $U = r$  und folglich:

$$W = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} e^{-(k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha) r^2}.$$

Für die Häufigkeit  $dH_\alpha$  einer Windabweichung  $U_\alpha$  mit der Richtung zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$  hat man:

$$dH_\alpha = d\alpha \cdot \int_0^\infty W r dr,$$

und findet:

$$dH_\alpha = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{2\pi}.$$

Für die Häufigkeit  $H_\alpha$  pro Einheitswinkel und für die Häufigkeit  $h_\alpha$  pro Einheit in der 32-teiligen Skala für die Windrichtung bekommen wir folglich:

$$(18) \quad \begin{cases} H_\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha}, \\ h_\alpha = \frac{1}{32} \frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha}. \end{cases}$$

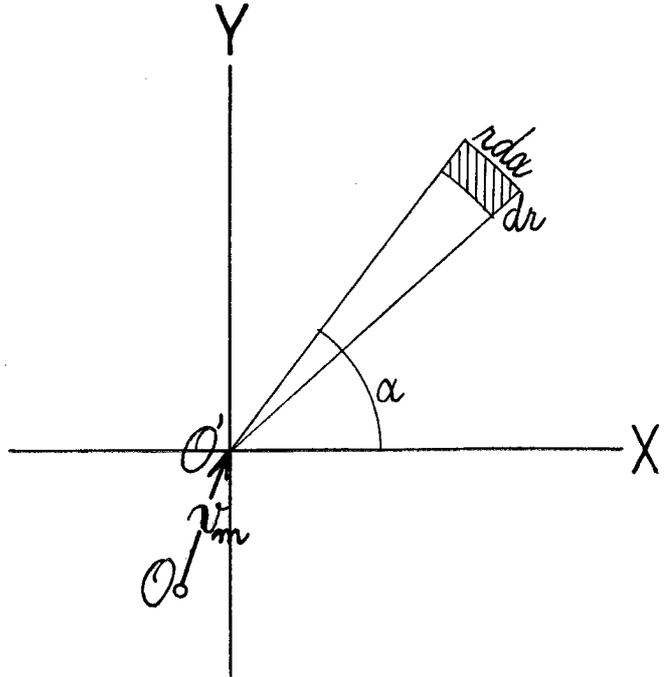


Fig. 6.

Für die mittlere Windabweichung  $U_{\alpha.m}$  in einer bestimmten Richtung  $\alpha$  haben wir:

$$U_{\alpha.m} = \frac{d\alpha}{dH_\alpha} \int_0^\infty W r^2 dr,$$

und finden hieraus:

$$(19) \quad U_{\alpha.m} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_x \cos^2 \alpha + k_y \sin^2 \alpha}}.$$

In einem Vektordiagramm sind die Kurven für  $U_{\alpha,m}$  Ellipsen, während die Kurven für  $H_\alpha$  und  $h_\alpha$  in die Klasse der Kurven mit Einschnürung in der Richtung des kleinsten Wertes gehören, die wir oben mehrmals behandelt haben.

Links in Fig. 7 sind die Kurven für  $h_\alpha$  (die ganz ausgezogene Kurve) und für  $U_{\alpha,m}$  (die gestrichelte Kurve) für den Fall gegeben, dass, wie im Januar 1929:

$$k_x = 0.410, \quad k_y = 0.085$$

ist.

Wenn man nach Beobachtungen die Häufigkeit und die mittlere Geschwindigkeit der Windabweichungen in den verschiedenen Richtungen bestimmen

will, so kann man es nicht für Winkeldifferentiale  $d\alpha$  tun, sondern man muss Winkelintervalle endlicher Grösse wählen. Um einen Ausgleich mit den empirischen Daten zu erhalten, empfiehlt es sich sogar, diese Winkelintervalle ziemlich gross zu wählen, z. B. gleich  $\frac{2\pi}{8}$ . Man kann dann natürlich nicht eine volle Uebereinstimmung mit den Kurven

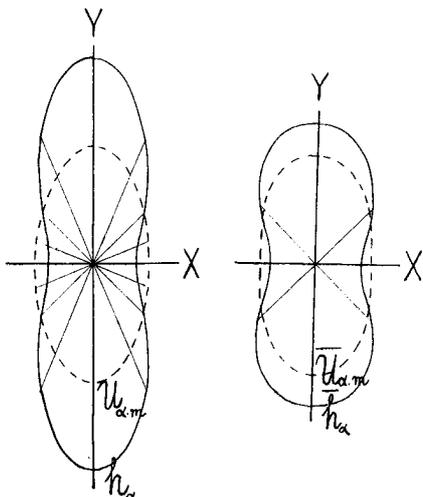


Fig. 7. Theoretische Kurven für die Häufigkeit der Windabweichungen in bestimmten Richtungen und für ihre mittleren Geschwindigkeiten.

$h_\alpha$  und  $U_{\alpha,m}$  erwarten; man muss die empirisch bestimmten Werte nicht mit  $h_\alpha$  und  $U_{\alpha,m}$  vergleichen, sondern mit den ausgeglichenen Werten  $\bar{h}_\alpha$  und  $\bar{U}_{\alpha,m}$ , die durch die Gleichungen:

$$(20) \quad \bar{h}_\alpha = \int_{\alpha - \frac{\pi}{8}}^{\alpha + \frac{\pi}{8}} H_\alpha d\alpha, \quad \bar{U}_{\alpha,m} = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \int_{\alpha - \frac{\pi}{8}}^{\alpha + \frac{\pi}{8}} H_\alpha U_{\alpha,m} d\alpha$$

bestimmt sind.

Es ist leicht den Verlauf der ausgeglichenen Kurven  $\bar{h}_\alpha$  und  $\bar{U}_{\alpha,m}$  graphisch zu bestimmen, wenn man die Kurven für  $h_\alpha$  und  $U_{\alpha,m}$  berechnet hat. Rechts in Fig. 7 sind sie für  $k_x = 0.410$  und  $k_y = 0.085$  dargestellt. Die Kurven zeigen natürlich grosse Ähnlichkeit mit den entsprechenden Kurven für  $H_\alpha$  und  $U_{\alpha,m}$ . In der Kurve für  $\bar{h}_\alpha$  findet man wieder die charakteristische Einschnürung, während die Kurven für  $\bar{U}_{\alpha,m}$  nicht mehr Ellipsen sind, sie haben aber eine ovale Form behalten.

Um diese Resultate empirisch zu prüfen, habe ich für jede Stunde im Januar im Oktober 1929 die Abweichung  $U$  des Windes vom Mittelwind:

$$U = v - v_m$$

konstruiert. Die verschiedenen  $U$  wurden dann auf die 8 Hauptrichtungen verteilt, und für jede dieser Richtungen wurden die Anzahl  $n$  und die mittlere Geschwindigkeit  $U_{\alpha,m}$  bestimmt. Das Resultat ist in Fig. 8 gegeben. Die Kurven für die Häufigkeit der Windabweichungen in den verschiedenen Richtungen sind als ganz ausgesogene Kurven gezeichnet, während die Kurven für die mittlere Geschwindigkeit

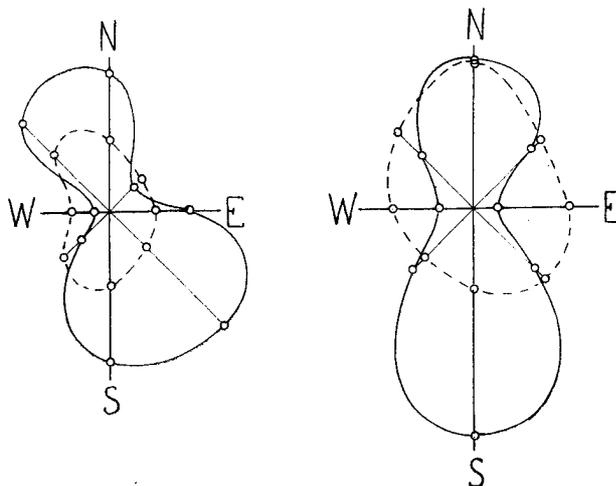


Fig. 8. Empirische Kurven für die Häufigkeit der Windabweichungen in bestimmten Richtungen und für ihre mittleren Geschwindigkeiten (Links für Januar und rechts für Oktober 1929).

keit dieser Abweichungen gestrichelt sind. Links findet man die Kurven für Januar 1929 und rechts die Kurven für Oktober 1929.

Die empirischen Häufigkeitskurven zeigen deutlich dieselbe Einschnürung, die wir theoretisch gefunden haben, während die Kurven für die Variation der Geschwindigkeit mit der Richtung in Uebereinstimmung mit der Theorie ovalähnliche Formen zeigen. Es treten natürlich auch Unterschiede zwischen den theoretisch und den empirisch bestimmten Kurven auf. Sie bestehen hauptsächlich darin, dass die empirischen Kurven weniger symmetrisch und regelmässig wie die theoretischen sind. Bei den Häufigkeitskurven, bei denen man einen so charakteristischen Zug wie die Einschnürung hat, sind natürlich diese Unterschiede weniger auffallend, als bei den ovalen Geschwindigkeitskurven.

Bisher haben wir nur die Variation mit der Richtung in Bezug auf die Häufigkeit und die mittlere Geschwindigkeit der Windabweichungen  $U$  behandelt. Wir werden jetzt zu dem Wind  $v$  selbst übergehen. Wenn wir aber dann die Häufigkeiten bestimmter Windrichtungen und ihrer mittleren

Geschwindigkeiten in analoger Weise, wie wir es oben für die Windabweichungen gemacht haben, ableiten wollen, so kommen wir zu sehr komplizierten Ausdrücken, die sich nicht integrieren lassen. Ich habe mich deshalb damit begnügt, einige Beispiele graphisch zu berechnen.

Es wurde zuerst angenommen, dass wir es mit einer einfachen Maxwell'schen Verteilung zu tun haben, und zwar mit derjenigen, die in Fig. 4 oben rechts dargestellt ist. Wir nehmen zunächst den Fall an, dass wir einen Mittelwind von 1 m/sek in der Richtung der grössten Abweichungen  $U$  haben. Für jede einzelne Windrichtung (Sektoren von  $45^\circ$ ) wurden Häufigkeit und mittlere Geschwindigkeit graphisch ermittelt, und das Resultat ist in Fig. 9, A wiedergegeben. Da wir bei der Kon-

von der in Fig. 4 oben rechts dargestellten Verteilungsfläche ausgegangen wird. Der Mittelwind liegt aber nicht mehr in der Richtung der grössten Werte von  $U$ , sondern bildet einen Winkel von  $45^\circ$  mit dieser Richtung. Die Häufigkeitskurve und die Geschwindigkeitskurve haben jetzt jede Symmetrie verloren, zeigen aber dieselben Züge wie in den oben behandelten symmetrischen Fällen.

Wenn die Windunruhe in allen Richtungen die gleiche ist, so sind die Häufigkeitskurven in den Maxwell'schen Verteilungsflächen nicht mehr Ellipsen, sondern Kreise. In diesem einfachen Fall, wo  $k_x = k_y$  ist, sind die Kurven für  $h_\alpha$  und  $U_{\alpha,m}$  Kreise, während sowohl die Kurven für die Häufigkeit verschiedener Windrichtungen wie die Kurven für die mittlere Geschwindigkeit in den verschiedenen Richt-

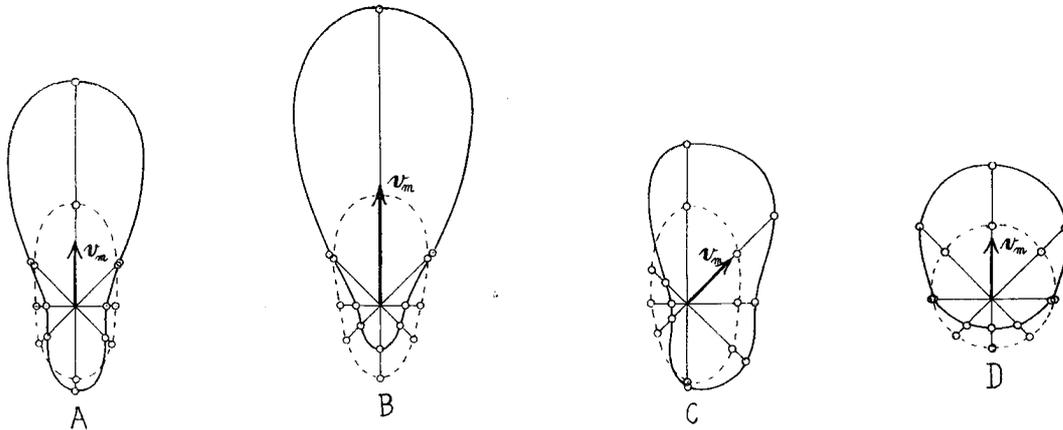


Fig. 9. Konstruierte Kurven für die Häufigkeit verschiedener Windrichtungen (die ganz ausgezogenen Kurven) und für die mittlere Geschwindigkeit bei den verschiedenen Richtungen (die gestrichelten Kurven).

struktion Sektoren von  $45^\circ$  benutzt haben, sind diese Kurven mit den Fig. 7 gegebenen Kurven für  $\bar{h}_\alpha$  und  $\bar{U}_{\alpha,m}$  zu vergleichen. Wir finden wieder dieselben Züge. Die Häufigkeitskurve zeigt eine Einschnürung, die aber jetzt nicht mehr an der Mitte auftritt. Die Geschwindigkeitskurve hat immer noch eine ovale Form, sie ist aber nicht mehr so symmetrisch wie die Kurve für  $\bar{U}_{\alpha,m}$ .

Wir werden danach den Fall behandeln, dass wir die in Fig. 4 oben rechts gegebene Verteilungsfläche und einen Mittelwind von 2 m/sek anstatt 1 m/sek in der Richtung der grössten Windabweichungen  $U$  haben. Das Resultat ist in Fig. 9, B gegeben. Man sieht auch hier die Einschnürung der Häufigkeitskurve, sie ist aber jetzt noch mehr von der Mitte verschoben und verursacht nur eine kleine Auswölbung einer sonst ovalähnlichen Figur.

In Fig. 9, C ist ein Fall gegeben wo wiederum

ungen ovalähnliche Formen erhalten. Ein solcher Fall ist in Fig. 9, D dargestellt.

Für den Fall, dass man nicht eine einfache Maxwell'sche Verteilung sondern eine Summe von solchen hat, bekommt man kompliziertere Formen der Kurven. Man findet dann Kurven für die Häufigkeit verschiedener Windrichtungen und für die mittlere Geschwindigkeit in der verschiedenen Richtungen, die eine Summe von Kurven der in Fig. 9 angegebenen Art repräsentieren.

Da die Windverhältnisse in erster Annäherung durch eine einfache Maxwell'sche Verteilung gegeben sind, wird man aber gewöhnlich Kurven finden, welche denjenigen in Fig. 9 ähnlich sind.

In Mohn's Klimatabellen für Norwegen<sup>1)</sup> sind

<sup>1)</sup> H. Mohn: Klimatabeller for Norge, IV, Vind. Videnskabselskabets Skrifter I, Mat.-Naturv. Klasse, 1898, nr. 2, Christiania 1898.

Tabellen über die mittlere Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen für viele norwegische meteorologische Stationen aufgeführt. Oben in Fig. 10 sind Kurven für diese mittlere Häufigkeit für 16 Stationen gezeichnet.

Wenn man diese empirischen Kurven betrachtet, so ist es wirklich auffallend, in wie vielen Fällen die Häufigkeitskurven ähnliche Formen haben, wie die in Fig. 9, A—C, dargestellten theoretischen Kurven, die unter der Voraussetzung berechnet sind, dass wir es mit einer einfachen Maxwell'schen Verteilung um einen Mittelwind  $v_m$  zu tun haben. Ueberall sehen wir die charakteristische Einschnürung der Kurven.

Die grösste Ähnlichkeit zwischen den empirischen und den theoretischen Häufigkeitskurven finden wir bei den Stationen, wo der Wind aus irgend einer Ursache in einer Richtung sehr viel häufiger weht als in anderen Richtungen. Für Talstationen ist z. B. die Talrichtung, für Küstenstationen die Küstenrichtung vorwiegend. An den Küstenstationen ist die Unruhe nicht mehr so verschieden in den einzelnen Richtungen, und man findet Uebergangsformen zu den theoretischen Kurven in Fig. 9, D. Die Einschnürung an den Häufigkeitskurven ist jedoch immer noch deutlich.

Andererseits zeigen die Häufigkeitskurven kompliziertere Formen dort, wo man wegen des Geländes mehrere Hauptrichtungen des Windes hat.

Um zu zeigen, wie die Häufigkeitskurven für Stationen mit sehr freier Lage aussehen, habe ich unten in Fig. 10 die Kurven für 2 holländische Stationen,<sup>1)</sup> für 2 dänische Feuerschiffe,<sup>2)</sup> und für 4 Stationen der Maud-Expedition<sup>3)</sup> eingezeichnet.

Auch diese Häufigkeitskurven zeigen eine auffallende Ähnlichkeit mit den theoretischen Kurven in Fig. 9. Die Einschnürungen sind zwar nicht mehr so gross wie bei den Stationen mit weniger freier Lage, aber immer noch deutlich. In einem Fall, nämlich für Skagen Rev 1930 findet man keine Einschnürung. Hier hat man annähernd den in Fig. 9, D gezeigten Fall, bei dem die mittlere

Windunruhe in allen Richtungen die gleiche ist. Dies ist nur an sehr guten Windstationen der Fall.

Für die dänischen Feuerschiffe und für die Maud-Expedition ist nicht nur die Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen, sondern auch die mittlere Windgeschwindigkeit (oder die mittlere Windstärke) angegeben. In diesen Fällen habe ich auch die Geschwindigkeitskurven zeichnen können, und diese sind in Fig. 10 als gestrichelte Kurven wiedergegeben. In Uebereinstimmung mit der Theorie zeigen die empirischen Geschwindigkeitskurven ovalähnliche Formen selbst in den Fällen, wo die Häufigkeitskurven deutliche Einschnürungen aufweisen. Die Geschwindigkeitskurven zeigen — auch in Uebereinstimmung mit unserer Theorie — weniger Exzentrizität als die Häufigkeitskurven.

### 5. Die durchschnittlichen Abweichungen.

Aus Tabelle 1 ersieht man, dass die durchschnittliche Komponentenabweichung  $u_{\alpha.m}$  längs einer Achse  $\alpha$  mit der Richtung der Achse variiert. Um diese Änderung näher zu studieren, wurde:

$$u_{\alpha.m} = \frac{1}{n} \sum_1^n |u_{\alpha}|$$

für 8 Richtungen  $\alpha$  gebildet. Das Resultat ist in Tabelle 4 niedergelegt.

In der ersten Kolonne dieser Tabelle sind als Argument die Richtungen  $\alpha$  und in den zwei nächsten Kolonnen die für Januar und Oktober 1929 gefundenen Werte angegeben.

In Fig. 11 sind die in Tabelle 4 gegebenen Variationen von  $u_{\alpha.m}$  mit der Richtung  $\alpha$  graphisch dargestellt. Wie man sieht, haben diese Kurven für Januar und Oktober 1929 denselben Charakter. Beide haben die charakteristische Einschnürung in der Richtung der kleinsten  $u_{\alpha.m}$ . Beide haben weiter den grössten Wert von  $u_{\alpha.m}$  ungefähr in der Richtung des Mittelwindes  $v_m$ .

Wenn man die Summe der Quadrate von  $u_{\alpha.m}$  für zwei aufeinander senkrechtstehende Richtungen  $\alpha$  und  $(\alpha + 90^\circ)$  bildet, bekommt man die in der vierten und fünften Kolonne der Tabelle 4 angegebenen Werte von  $(u_{\alpha.m})^2 + (u_{\alpha+90^\circ.m})^2$ , und es zeigt sich, dass man mit sehr grosser Annäherung:

$$(u_{\alpha.m})^2 + (u_{\alpha+90^\circ.m})^2 = \text{Konst.}$$

setzen kann.

<sup>1)</sup> Jaarboek 1929. Koninklijk Nederlandsh Meteorologisch Instituut. Amsterdam 1930.

<sup>2)</sup> Nautisk Meteorologisk Aarbog. Publikationer fra Det Danske Meteorologiske Institut. København 1930.

<sup>3)</sup> The Norwegian North Polar Expedition with the «Maud». 1918—1924. Scientific Results, Vol. II, Meteorology, Part I. Bergen 1933.

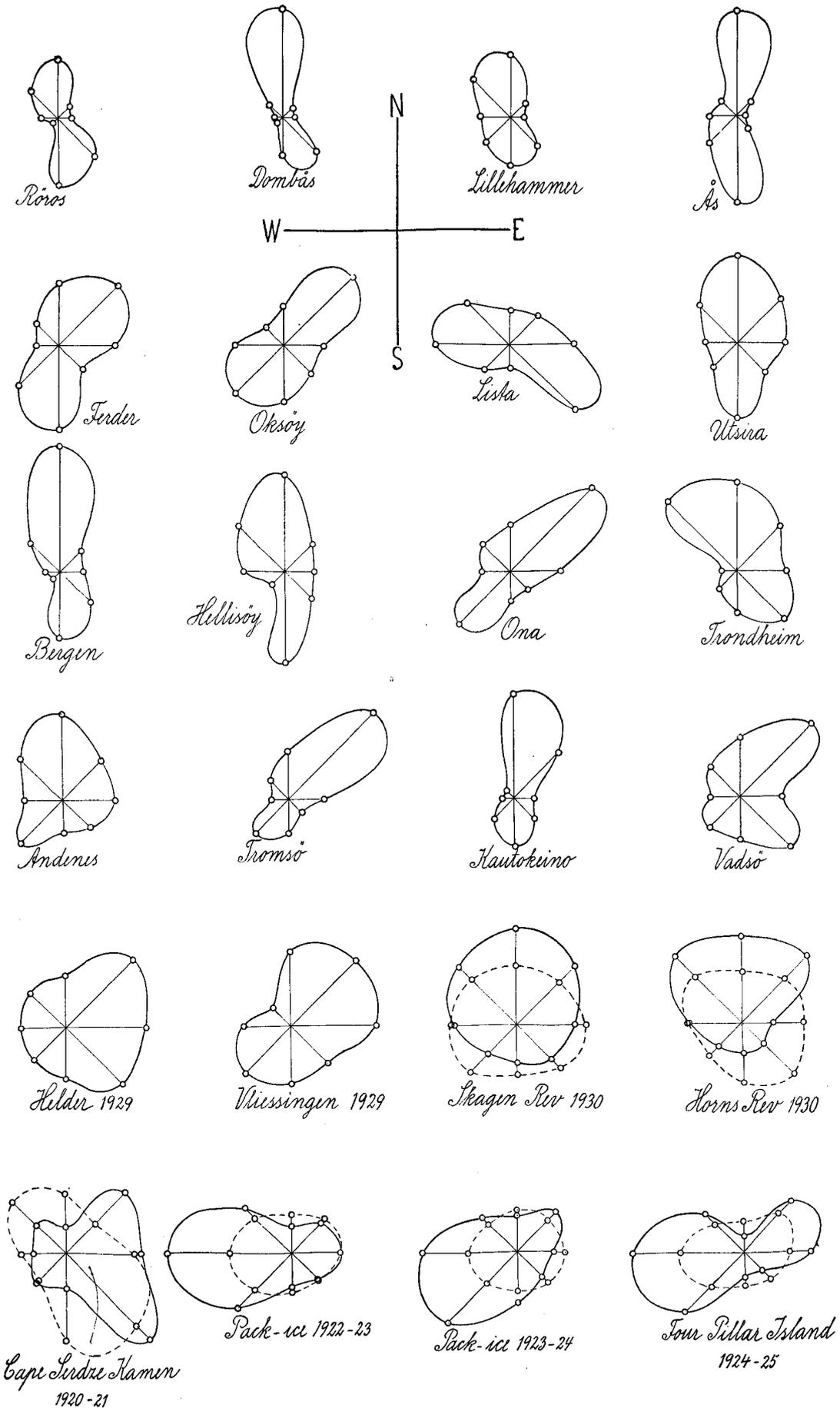


Fig. 10. Empirische Kurven für die Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen (die ganz ausgezogenen Kurven) und für die mittlere Geschwindigkeit bei den verschiedenen Richtungen (die gestrichelten Kurven).

Tabelle 4.  
Die durchschnittlichen Abweichungen der Komponenten.

Richtung	$u_{\alpha,m}$ empirische Werte		$(u_{\alpha,m})^2 + (u_{\alpha+90^\circ,m})^2$		$u_{\alpha,m}$ berechnete Werte	
	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929
	N—S	1.55	2.77*	3.17	8.98	1.56
NNE—SSW	1.21	2.54	3.04	8.86	1.28	2.66
NE—SW	0.90	2.02	3.18	8.80	0.94	2.22
ENE—WSW	0.75*	1.44	3.32	9.09	0.75	1.49
E—W	0.87	1.13*			0.94	1.13
ESE—WNW	1.21	1.56			1.28	1.49
SE—NW	1.54	2.17			1.56	2.22
SSE—NNW	1.66*	2.64			1.66	2.66
		$(u_m)^2$	3.18	8.93		

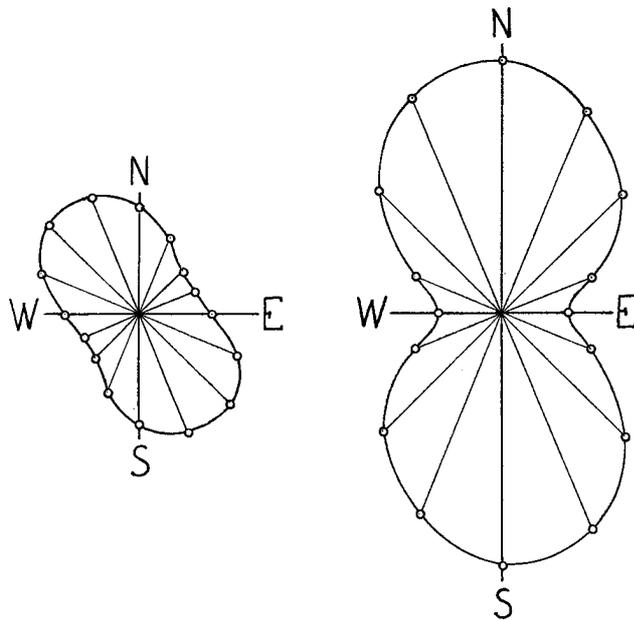


Fig. 11. Die Variation der durchschnittlichen Abweichung  $u_{\alpha,m}$  mit der Richtung. (Links für Januar und rechts für Oktober 1929).

Die durchschnittlichen Komponentabweichungen [haben also die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Quadrate längs zwei aufeinander senkrecht stehenden Achsen konstant ist.

Die Konstante werden wir gleich  $(u_m)^2$  setzen, und  $u_m$  werden wir die *durchschnittliche Windabweichung* nennen. Wir haben dann:

$$(21) \quad (u_{\alpha,m})^2 + (u_{\alpha+90^\circ,m})^2 = (u_m)^2.$$

Unten in Tabelle 4 sind die Mittelwerte für  $(u_m)^2$  im Januar und Oktober 1929 gegeben. Die entsprechenden Werte von  $u_m$  findet man in Tabelle 5, wo auch die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  und das Verhältnis  $\frac{u_m}{v_m}$  angegeben sind. Man sieht, dass die

durchschnittliche Windabweichung mehr als doppelt so gross wie die Geschwindigkeit des Mittelwindes ist.

Tabelle 5.  
Die durchschnittlichen Windabweichungen.

	$u_m$	$v_m$	$\frac{u_m}{v_m}$
Januar 1929.....	1.78	0.66	2.7
Oktober 1929.....	2.99	1.24	2.4

Die durchschnittliche Komponentabweichung folgt einem sehr einfachen Gesetz (Gleichung 21), und dies hat, wie wir sehen werden, auch eine einfache Erklärung.

Wenn man das Koordinatensystem so wählt, dass  $u_{\alpha,m}$  seinen kleinsten Wert längs der X-Achse und seinen grössten Wert längs der Y-Achse erhält, so hat man nach Gleichung (10):

$$(u_{\alpha}^2)_m = (u_x^2)_m \cos^2 \alpha + (u_y^2)_m \sin^2 \alpha.$$

Wenn man eine Verteilung von  $u_{\alpha}$  nach dem einfachen Maxwell'schen Gesetz hat, so gilt auch das Cornu'sche Gesetz, und es ergibt sich:

$$(u_{\alpha}^2)_m = \frac{\pi}{2} (u_{\alpha,m})^2.$$

Wenn dies in Gleichung (10) eingeführt wird, so folgt daraus:

$$(22) \quad (u_{\alpha,m})^2 = (u_x,m)^2 \cos^2 \alpha + (u_y,m)^2 \sin^2 \alpha.$$

Aus dieser Gleichung kann die empirische Gleichung (21) abgeleitet werden.

Wir werden jetzt untersuchen, mit welcher Genauigkeit die in Tabelle 4 gezeigten empirischen Werte von  $u_{\alpha,m}$  die Gleichung (21) befriedigen. Für Januar 1929 legen wir dann die X-Achse in der

Richtung ENE—WSW und für Oktober 1929 in der Richtung E—W. Nach Gleichung (22) würden wir dann:

für Januar  $(u_{\alpha.m})^2 = 0.57 \cos^2 \alpha + 2.75 \sin^2 \alpha,$   
 » Oktober  $(u_{\alpha.m})^2 = 1.28 \cos^2 \alpha + 7.70 \sin^2 \alpha.$

erhalten. Die mit Hilfe dieser Gleichungen berechneten Werte von  $u_{\alpha.m}$  sind in den zwei letzten Kolonnen von Tabelle 4 wiedergegeben.

Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den empirischen von  $u_{\alpha.m}$  ist, wie man in Tabelle 4 sieht, so gross, dass man sagen kann, dass die Gleichung (22) mitt grosser Annäherung die Aenderung der durchschnittlichen Abweichung mit der Richtung angibt.

Wenn Gleichung (22) nicht wie Gleichung (10) in vollem Umfang gültig ist, so muss dies darauf beruhen, dass die Verteilung von  $u_{\alpha}$  nicht genau dem Maxwell'schen Gesetze folgt, und dass dann auch das Cornu'sche Gesetz nicht streng erfüllt ist.

Wir können dies direkt mit Hilfe von den in Tabelle 1 gegebenen Mittelwerten  $u_{\alpha.m}$  und  $(u_{\alpha}^2)_m$  nachprüfen. In Tabelle 6 sind die aus diesen Mittelwerten berechneten Verhältniszahlen zwischen  $(u_{\alpha}^2)_m$  und  $(u_{\alpha.m})^2$  aufgeführt.

Tabelle 6.

Dass Verhältnis zwischen  $(u_{\alpha}^2)_m$  und  $(u_{\alpha.m})^2$ .

	E—W	N—S
Januar 1929 .....	2.13	2.14
Oktober 1929.....	2.17	1.67

Diese Werte sind recht verschieden von dem Wert  $\frac{\pi}{2} = 1.57$ , und somit ist das Cornu'sche Gesetz nur schlecht erfüllt.

Die absoluten Beträge dieser Verhältniszahlen spielen aber keine Rolle für die Genauigkeit der Gleichung (22). Von Bedeutung sind nur die Unregelmässigkeiten der Variationen im Verhältnis zur Richtung.

Es ist auffallend, dass die Verhältniszahlen in allen Fällen grösser als der theoretische Wert 1.57 sind. Es liegt nahe, den Grund dafür in der Tatsache zu suchen, dass wir es nicht mit einer einfachen Maxwell'schen Verteilung, sondern mit einer Summe solcher Verteilungen zu tun haben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir nur zwei solche Verteilungen haben, und dass:

$$u_{\alpha.m} = \frac{1}{2} (u_{\alpha.m.1} + u_{\alpha.m.2})$$

ist. Diese Gleichung schreiben wir in der Form:

$$(u_{\alpha.m})^2 = \frac{1}{2} [(u_{\alpha.m.1})^2 + (u_{\alpha.m.2})^2] - \frac{1}{4} (u_{\alpha.m.1} - u_{\alpha.m.2})^2.$$

Da wir nach unserer Voraussetzung:

$$(u_{\alpha.m.1})^2 = \frac{2}{\pi} (u_{\alpha.1})_m \text{ und } (u_{\alpha.m.2})^2 = \frac{2}{\pi} (u_{\alpha.2})_m^2$$

haben, so finden wir weiter:

$$(u_{\alpha.m})^2 = \frac{2}{\pi} (u_{\alpha}^2)_m - \frac{1}{4} (u_{\alpha.m.1} - u_{\alpha.m.2})^2,$$

oder:

$$(23) \quad \frac{(u_{\alpha}^2)_m}{(u_{\alpha.m})^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \left( \frac{u_{\alpha.m.1} - u_{\alpha.m.2}}{u_{\alpha.m}} \right)^2,$$

wobei das letzte Glied positiv ist.

Wenn wir nicht eine einfache Maxwell'sche Verteilung haben, sondern eine Summe solcher Verteilungen, so bekommen wir also:

$$\frac{(u_{\alpha}^2)_m}{(u_{\alpha.m})^2} > \frac{\pi}{2},$$

wie wir es in Tabelle 6 gefunden haben.

**6. Eine einfache Berechnung angenäherter Werte der durchschnittlichen Komponentenabweichungen.**

Nach den neuen Bestimmungen der Internationalen Meteorologischen Organisation (Warschau 1935) sollen in den meteorologischen Jahrbüchern die Tabellen über die Windverteilung in Zukunft nicht nur die Anzahl der Fälle mit Wind aus den 8 Hauptrichtungen und mit Windstille enthalten, sondern auch die mittlere Geschwindigkeit für jede Richtung.

Wenn diese Bestimmungen durchgeführt werden, kann man leicht mit Hilfe der Tabellen den Mittelwind  $v_m$  bestimmen. Nachdem dies geschehen ist, legt man die positive Y-Achse in die Richtung des Mittelwindes und erhält dann:

$$u_x = v_x,$$

und folglich:

$$u_{x.m} = \frac{1}{n} \sum_1^n |v_x|.$$

Es ist etwas schwieriger, die durchschnittliche Abweichung  $u_{y.m}$  zu bestimmen, Zu diesem Zwecke führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$\eta_{\text{pos.}}$  = Anzahl der Fälle mit positivem  $v_y$   
 $\eta_{\text{neg.}}$  = » » » » negativem  $v_y$   
 $\eta_c$  = » » » » Windstille.

Wenn man eine symmetrische Verteilung der Werte von  $u_y$  voraussetzt, so findet man nach einfachen Ueberlegungen:

$$\sum |u_y| = \sum |v_y| + \eta_c v_m - \frac{1}{2} (\eta_{\text{pos.}} - \eta_{\text{neg.}}) v_m.$$

Zur Bestimmung der durchschnittlichen Abweichungen längs der Koordinaten-Achsen hat man folglich die Gleichungen:

$$(24) \begin{cases} u_{x,m} = \frac{1}{n} \sum |v_x|, \\ u_{y,m} = \frac{1}{n} \sum |v_y| + \frac{\eta_c}{n} v_m - \frac{1}{2} \frac{\eta_{\text{pos.}} - \eta_{\text{neg.}}}{n} v_m. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen ist nur unter der Voraussetzung einer symmetrischen Verteilung von  $u_y$  streng gültig, im allgemeinen aber gilt sie nur annäherungsweise. Um zu sehen, wie weit sie gültig ist, habe ich aus den Terminbeobachtungen des Windes in Ås im Januar und im Oktober 1929  $u_{y,m}$  einmal direkt und dann nach der zweiten Gleichung (24) berechnet. Das Resultat ist in Tabelle 7 gegeben.

Tabelle 7.  
Berechnung von  $u_{y,m}$ .

	Direkte Berechnung	Berechnung nach Gl. (24)	Differenz
Januar 1929.....	1.42	1.46	- 0.04
Oktober 1929.....	2.80	2.73	+ 0.07

Der unterschied zwischen den exakten und den mittels Gleichung (24) berechneten Werten von  $u_{y,m}$  ist klein.

*Beispiel.*

In Tabelle 8 findet man die aus den Terminbeobachtungen in Ås vom Januar und Oktober 1929 berechnete Windverteilung. Für jede Windrichtung ist die Anzahl der Fälle und die mittlere Geschwindigkeit angegeben.

Tabelle 8.  
Windverteilung nach den Terminbeobachtungen.

	N		NE		E		SE		S		SW		W		NW		C
Januar 1929.....	30	2.2	8	1.3	5	1.1	12	2.8	6	2.4	1	4.9	1	1.4	20	2.1	10
Oktober 1929.....	18	2.4	8	1.9	3	1.6	7	4.9	25	5.2	10	3.6	4	3.0	12	2.1	6

Die in dieser Tabelle gegebenen Daten wurden zunächst benutzt, um den Mittelwind zu bestimmen, und dann wurden mit Hilfe der Gleichungen (24) die durchschnittlichen Abweichungen  $u_{x,m}$  und  $u_{y,m}$  berechnet. Die gefundenen Werte sind in Tabelle 9 wiedergegeben.

Zum Vergleich sind die aus den Stundenwerten direkt bestimmten Werte für den Mittelwind und für die durchschnittlichen Abweichungen in Klammern angegeben.

Tabelle 9.  
Angenäherte Werte für den Mittelwind und die durchschnittlichen Abweichungen.

	Mittelwind		Durchschnittlichen Abweichung		
	Richtung	$v_m$	$u_{x,m}$	$u_{y,m}$	$u_m$
Januar 1929.....	N 2° E (N 10° E)	0.66 (0.66)	0.81 (0.75)	1.46 (1.66)	1.67 (1.78)
Oktober 1929.....	S 8° W (S)	1.17 (1.24)	1.29 (1.13)	2.73 (2.77)	3.02 (2.99)

Wie man aus der Tabelle ersieht, haben wir auf einfache Weise aus den Terminbeobachtungen den Mittelwind und die durchschnittlichen Abweichungen mit ganz guter Annäherung bestimmt.

7. Die Variabilität des Windes.

Die Variabilität  $\delta_\alpha$  in der Richtung  $\alpha$  soll durch die Gleichung:

$$\delta_\alpha = \frac{1}{n} \sum_1^n \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right|$$

definiert sein. Wenn man hier:

$$v_\alpha = v_{\alpha,m} + u_\alpha$$

einführt, so findet man:

$$(25) \quad \delta_\alpha = \frac{1}{n} \sum_1^n \left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right|.$$

Für die Berechnung der durchschnittlichen Abweichungen (Abschnitt 5) wurden Tabellen über die Stundenwerte von  $u_\alpha$  für die 8 Hauptrichtungen ausgearbeitet.

Aus diesen Tabellen wurden durch Differenzbildung Tabellen über die Änderung von  $u_\alpha$  für jede Stunde berechnet. Wenn man die Stunde als Zeitdifferential annimmt, so geben diese Tabellen die Werte von:

$$3600 \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}$$

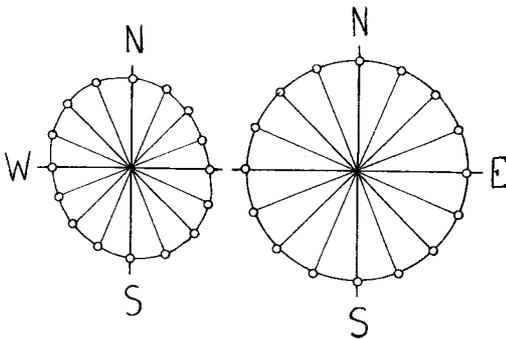


Fig. 12. Die Änderung der Variabilität  $\delta_\alpha$  mit der Richtung. (Links für Januar und rechts für Oktober 1929).

Durch Summation der Zahlenwerte dieser Größen und Mittelbildung bekommt man dann:

$$3600 \delta_\alpha = 3600 \frac{1}{n} \sum_1^n \left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right|$$

In Tabelle 10 sind die auf diese Weise für die 8 Hauptrichtungen gefundenen Werte von  $\delta_\alpha$  angegeben, und in Fig. 12 ist die Variation von  $\delta_\alpha$  mit der Richtung graphisch dargestellt. Die Variabilität ändert sich mit den verschiedenen Richtungen. Ein Vergleich mit den in Tabelle 4 gegebenen Werten der durchschnittlichen Abweichungen zeigt indessen, dass die Änderung der Variabilität mit der Richtung verhältnismässig klein ist. Die grössten Werte der Variabilität findet man in den Richtungen, bei denen die durchschnittlichen Abweichungen am grössten sind, und die kleinsten Werte in den Richtungen, bei denen die durchschnittlichen Abweichungen am kleinsten sind.

Wie für die durchschnittlichen Abweichungen, so bilden wir auch hier die Quadrate und erhalten mit guter Annäherung:

$$(26) \quad \delta_\alpha^2 + \delta_{\alpha+90^\circ}^2 = \delta^2,$$

Tabelle 10.  
Die Variabilität der Komponenten.

Richtungen	$10^4 \delta_\alpha$ , empirische Werte		$10^8 \delta_\alpha^2 + 10^8 \delta_{\alpha+90^\circ}^2$		$10^8 \delta_\alpha$ , berechnete Werte	
	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929
N—S	1.52	1.83*	3.95	6.48	1.50	1.83*
NNE—SSW	1.43	1.77	3.97	6.37	1.41	1.82
NE—SW	1.32	1.80	4.08	6.34	1.29	1.80
ENE—WSW	1.24*	1.79	3.91	6.51	1.24*	1.78
E—W	1.28	1.77*			1.29	1.77*
ESE—WNW	1.39	1.80			1.41	1.78
SE—NW	1.53	1.76			1.50	1.80
SSE—NNW	1.54*	1.82			1.54*	1.82
	Mittel		3.99	6.42		
	$10^4 \delta$		1.99	2.53		

wo  $\delta$  eine Konstante ist, die wir die Variabilität des Vektors  $v$  nennen werden.

Die Gleichung (26) ist analog der Gleichung (21), und die Erklärung ist ebenfalls analog. In entsprechender Weise wie bei der durchschnittlichen Abweichung finden wir:

$$(27) \quad \delta_\alpha^2 = \delta_x^2 \cos^2 \alpha + \delta_y^2 \sin^2 \alpha,$$

wo die  $X$ -Achse längs der Achse der kleinsten Variabilität und die  $Y$ -Achse längs der Achse der grössten Variabilität liegt.

Wir werden danach untersuchen mit welcher Genauigkeit die in Tabelle 10 gegebenen Werte von  $\delta_\alpha$  die Gleichung (27) befriedigen. Für Januar 1929 legen wir die  $X$ -Achse in der Richtung ENE—WSW, und für Oktober 1929 in der Richtung E—W. Nach Gleichung (26) ergibt sie dann:

$$\begin{aligned} \text{für Januar } 10^8 \delta_\alpha^2 &= 1.54 \cos^2 \alpha + 2.37 \sin^2 \alpha, \\ \text{» Oktober } 10^8 \delta_\alpha^2 &= 3.13 \cos^2 \alpha + 3.35 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Die mit Hilfe dieser Gleichungen gefundenen Werte sind in den zwei letzten Kolonnen von Tabelle 10 aufgeführt. Die Uebereinstimmung zwischen den empirischen und den berechneten Werten der Variabilität  $\delta_\alpha$  ist, wie man aus Tabelle 10 ersieht, befriedigend.

### 8. Die mittlere Periode der Windänderungen.

Ein anderes Mass für die Veränderlichkeit des Windes ist die mittlere Periode der Zusatzbewegungen  $u$ .

Um diese Perioden zu untersuchen, habe ich für jede der 8 Hauptrichtungen in den Monats-

tabellen der Stundenwerte von  $u_\alpha$  die Zeitpunkte markiert, wo  $u_\alpha$  das Vorzeichen geändert hat. Die Fälle, in denen  $u_\alpha$  den Wert Null erreichte, ohne das Vorzeichen zu ändern, wurden auch nur mit einem Zeichen versehen, indem damit gerechnet wurde, dass  $u_\alpha$  in der Hälfte der Fälle wirklich das Vorzeichen änderte und also zwei Markierungen angebracht gewesen wären, während  $u_\alpha$  in der anderen Hälfte der Fälle nicht den Wert Null erreichte und deshalb kein Zeichen hätte erhalten dürfen.

Die Anzahl  $n_\alpha$  der Markierungen wurde danach gezählt und die mittlere Periode  $P_\alpha$  in der Richtung  $\alpha$  wurde mittels der Gleichung:

$$(28) \quad P_\alpha = \frac{2T}{n_\alpha}$$

berechnet, wo  $T$  gleich der Zahl der Zeiteinheiten im Monat ist.

Im Oktober 1929 findet man Perioden von 15.6 bis 41.4 Stunden und auch hier zeigt sich, dass die Periode mit der Grösse der durchschnittlichen Abweichung zunimmt.

In Fig. 13 ist die Variation der mittleren Periode graphisch dargestellt, links für Januar und rechts für Oktober 1920.

In Kolonne 8—9 ist die Grösse:

$$(29) \quad P = \frac{1}{2} (P_\alpha + P_{\alpha+90^\circ})$$

angegeben. Man sieht, dass die Grösse  $P$  annähernd konstant ist. Wir werden sie die mittlere Periode des Vektors  $v$  nennen.

Um diese Gesetzmässigkeit zu erklären, werden wir auf die Bedeutung der in Kolonne 2—3, Tabelle 11, gegebenen Zahlen  $n_\alpha$  etwas näher eingehen. Wir gehen davon aus, dass  $n_\alpha$  die Zahl der Fälle ist, in denen  $u_\alpha$  sein Vorzeichen ändert oder Null wird,

Tabelle 11.  
Die mittlere Periode.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Richtung	Anzahl $n_\alpha$		Mittl. Periode in Stunden		10 <sup>-4</sup> $P_\alpha$ emp. Werte		10 <sup>-4</sup> $\frac{1}{2}(P_\alpha + P_{\alpha+90^\circ})$		10 <sup>-4</sup> $P_\alpha$ ber. nach Gl. (30)		10 <sup>-4</sup> $P_\alpha$ ber. nach Gl. (31)	
	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929	Jan. 1929	Okt. 1929
N—S	84	36	17.7	41.4*	6.4	14.9*	5.4	9.3	7.1	14.9*	6.4	9.5*
NNE—SSW	109	42	13.6	35.5	4.9	12.8	5.6	9.2	5.6	13.3	5.5	9.0
NE—SW	149	55	10.0	27.1	3.6	9.8	5.5	10.0	4.1	9.4	4.3	7.1
ENE—WSW	152	96	9.8*	15.5	3.5*	5.6	5.6	9.7	3.5*	5.4	3.6*	5.1
E—W	123	140	12.1	10.6*	4.4	3.8*			4.1	3.8*	4.3	4.0*
ESE—WNW	85	96	17.5	15.5	6.3	5.6			5.6	5.4	5.5	5.5
SE—NW	73	52	20.4	28.6	7.3	10.3			7.1	9.4	6.3	7.8
SSE—NNW	71	39	20.9*	38.3	7.8*	13.8			7.8*	13.3	6.8*	9.1
Mittel.....			15.2	26.6	5.5	9.6						

In Tabelle 11 enthält die erste Kolonne die Richtung und Kolonne 2—3 die Anzahl  $n_\alpha$ . In Kolonne 4—7 findet man die nach Gleichung (28) berechneten mittleren Perioden  $P_\alpha$  in Stunden beziehungsweise Sekunden.

Im Januar 1929 variiert die Periode von 9.8 Stunden in der Richtung ENE—WSW bis 20.9 Stunden in den Richtung SSE—NNW. Ein Vergleich mit den in Tabelle 4 gegebenen Werten von  $u_\alpha$  zeigt, dass die Periode ihr Maximum in der Richtung hat, in der die durchschnittliche Abweichung am grössten ist und ihr Minimum in der Richtung, in der die durchschnittliche Abweichung am kleinsten ist.

ohne das Vorzeichen zu ändern. Diese Zahl ist gleich der Anzahl der Fälle, in denen der Vektor  $u$  die Richtung  $\alpha + 90^\circ$  passiert oder sie erreicht, ohne sie zu passieren. Und diese Anzahl ist wieder proportional der Häufigkeit  $H_{\alpha+90^\circ}$ , die durch Gleichung (18) gegeben ist. Wir haben also:

$$n_\alpha = CH_{\alpha+90^\circ} = \frac{C}{2\pi} \frac{\sqrt{k_x k_y}}{k_x \sin^2 \alpha + k_y \cos^2 \alpha},$$

wo  $C$  eine Konstante ist. Wenn dieser Ausdruck in Gleichung (28) eingesetzt wird. So erhalten wir:

$$P_\alpha = C_1 k_y \cos^2 \alpha + C_1 k_x \sin^2 \alpha,$$

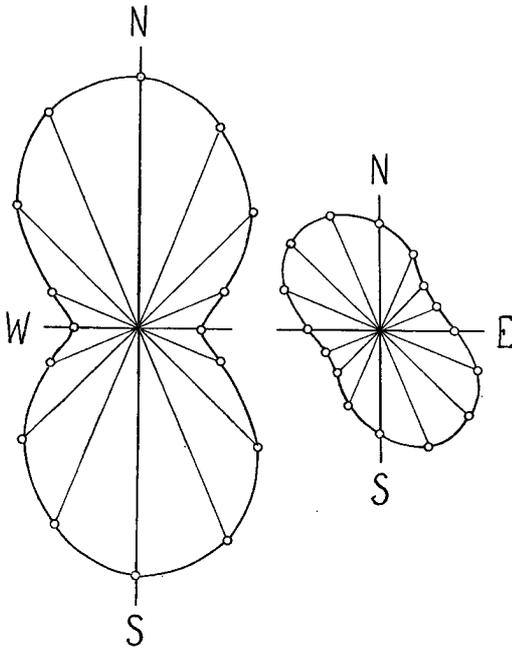


Fig. 13. Die Änderung der mittleren Periode mit der Richtung. (Links für Januar und rechts für Oktober 1929).

wo:

$$C_1 = \frac{4\pi T}{C \sqrt{k_x k_y}}$$

ist.

Diese Gleichung ergibt wieder:

$$(30) \quad P_\alpha = P_x \cos^2 \alpha + P_y \sin^2 \alpha,$$

wovon man leicht die Gleichung (29) ableiten kann.

In Kolonne 10—11 der Tabelle (11) sind die mit Hilfe dieser Gleichung gefundenen Werte von  $P_\alpha$  aufgeführt. Sie stimmen, wie man sieht, ganz gut mit in den Kolonne 6—7 gegebenen empirischen Werten von  $P_\alpha$  überein, die auf Grund der Zählung gefunden wurden.

Wir werden nunmehr eine Gleichung aufstellen, die mit gewisser Annäherung eine Beziehung zwischen  $P_\alpha$ ,  $u_{\alpha.m}$  und  $\delta_\alpha$  herstellt.

Bei, sonst gleichen Verhältnissen bleibt  $P_\alpha$  unverändert, wenn man  $u_{\alpha.m}$  und  $\delta_\alpha$  in gleichem Masse ändert.

Es ergibt sich also allgemein, dass  $P_\alpha$  eine Funktion des Verhältnisses  $\frac{u_{\alpha.m}}{\delta_\alpha}$  ist. Und für den Fall, dass reine Sinusschwankungen von  $u_\alpha$  vorliegen, ist leicht nachzuprüfen dass:

$$(31) \quad P_\alpha = 2\pi \frac{u_{\alpha.m}}{\delta_\alpha}$$

ist.

Diese Gleichung hat für allgemeine Fälle keine exakte Gültigkeit.

In den zwei letzten Kolonnen der Tabelle 11 findet man die mit Hilfe von Gleichung (30) berechneten Werte der mittleren Perioden. Wenn man die berechneten Werte mit den in Kolonne 6—7 gegebenen empirischen Werten vergleicht, zeigt sich, dass die Uebereinstimmung für Januar 1929 sehr gut und für Oktober 1929 einigermassen gut ist.