

DIE VERWENDUNG DES MAXWELLSCHEN VERTEILUNGSGESETZES AUF METEOROLOGISCHE HÄUFIGKEITSKURVEN

VON
T. H. HESSELBERG

(Das Manuskript am 1. Oktober 1942 eingeliefert.)

Teil I. Theoretische Überlegungen.

1. Das Maxwell'sche Gesetz bei gemischten Verteilungen.

Bei einer einfachen Maxwell'schen Verteilung hat man für die Häufigkeit $H(x)$ einer Abweichung x des Elements vom Mittelwert:

$$(1) \quad H(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2},$$

wo k eine Konstante ist, die der Streuung umgekehrt proportional ist.

Für die mittlere Abweichung d vom Mittelwert hat man:

$$(2) \quad d = \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

und folglich:

$$(1') \quad H(x) = \frac{1}{\pi d} e^{-\frac{x^2}{\pi d^2}}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass p einfache Maxwell'sche Verteilungen mit verschiedenen Mittelwerten A_1, A_2, \dots, A_p und mit verschiedenen Koeffizienten k_1, k_2, \dots, k_p gemischt auftreten und zwar mit n_1, n_2, \dots, n_p Fällen. Für die Mischung hat man dann den Mittelwert:

$$A_m = \frac{n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots + n_p A_p}{n},$$

wo: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ ist.

Weiter setzen wir:

$$\begin{aligned} A_m - A_1 &= a_1, \\ A_m - A_2 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ A_m - A_p &= a_p. \end{aligned}$$

Die Häufigkeit $F(x)$ einer Abweichung x von diesem Mittelwert ist dann:

$$(3) \quad F(x) = \frac{n_1}{n} H(k_1, x + a_1) + \frac{n_2}{n} H(k_2, x + a_2) + \dots + \frac{n_p}{n} H(k_p, x + a_p),$$

oder:

$$(3') \quad F(x) = \frac{n_1}{n} \sqrt{\frac{k_1}{\pi}} e^{-k_1(x+a_1)^2} + \frac{n_2}{n} \sqrt{\frac{k_2}{\pi}} e^{-k_2(x+a_2)^2} + \dots + \frac{n_p}{n} \sqrt{\frac{k_p}{\pi}} e^{-k_p(x+a_p)^2}.$$

Für die mittlere Abweichung D hat man:

$$(4) \quad D = \int_0^{\infty} F(x) x dx + \int_0^{-\infty} F(x) x dx.$$

Nach Einsetzung des Wertes (3') für $F(x)$ erhält man:

$$(4') \quad D = \frac{n_1}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k_1}} \left(e^{-k_1 a_1^2} + 2k_1 a_1 \int_0^{a_1} e^{-k_1 x^2} dx \right) + \dots + \frac{n_p}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k_p}} \left(e^{-k_p a_p^2} + 2k_p a_p \int_0^{a_p} e^{-k_p x^2} dx \right)$$

oder nach Gleichung (2):

$$(4'') \quad D = \frac{n_1}{n} d_1 \left(e^{-k_1 a_1^2} + 2k_1 a_1 \int_0^{a_1} e^{-k_1 x^2} dx \right) + \dots + \frac{n_p}{n} d_p \left(e^{-k_p a_p^2} + 2k_p a_p \int_0^{a_p} e^{-k_p x^2} dx \right).$$

Wir nehmen jetzt an, dass wir eine solche Mischung haben, und wir versuchen, die Verteilung durch eine einfache Maxwell'sche Kurve:

$$(5) \quad h(x) = \sqrt{\frac{k'}{\pi}} e^{-k'x^2}$$

zu beschreiben. Den Wert des Koeffizienten k' bestimmt man mit Hilfe der mittleren Abweichung D . Nach Gleichung (2) hat man:

$$(5') \quad h(x) = \frac{1}{\pi D} e^{-\frac{x^2}{\pi D^2}}$$

Man findet dann:

$$(6) \quad \frac{F(x)}{h(x)} = \frac{n_1 D}{n d_1} e^{-\frac{(x+a_1)^2}{\pi d_1^2}} + \dots + \frac{n_p D}{n d_p} e^{-\frac{(x+a_p)^2}{\pi d_p^2}}$$

Für $x = \infty$ treten hier 3 Fälle auf:

Fall (a). Sämtliche Werte d_1, d_2, \dots, d_p sind kleiner als D . Es ist dann:

$$\frac{F(\infty)}{h(\infty)} = 0.$$

Fall (b). Der grösste Wert d_q der Abweichungen d_1, d_2, \dots, d_p ist gleich D . In diesem Fall haben wir:

$$\frac{F(\infty)}{h(\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{für } a_q > 0, \\ \frac{n_q}{n} & \text{für } a_q = 0, \\ \infty & \text{für } a_q < 0. \end{cases}$$

Fall (c). Eine oder mehrere der Abweichungen d_1, d_2, \dots, d_p ist grösser als D . Man erhält dann:

$$\frac{F(\infty)}{h(\infty)} = \infty.$$

Im Falle (a) weist die wirkliche Verteilung $F(x)$ weniger grosse Abweichungen als die entsprechende Maxwell'sche Verteilung $h(x)$ auf, während die wirkliche Verteilung im Falle (c) mehr grosse Abweichungen zeigt.

2. Die mittlere Abweichung.

Es soll der Ausdruck (4'') für die mittlere Abweichung D diskutiert werden. Dies kann man in einfacher Weise tun, indem man zuerst die Funktion:

$$\varphi = e^{-k\alpha^2} + 2k\alpha \int_0^\alpha e^{-kx^2} dx$$

betrachtet. Durch Differenziation erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 2k \int_0^\alpha e^{-kx^2} dx$$

und folglich ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} < 0 \text{ für } \alpha < 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \text{ für } \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} > 0 \text{ für } \alpha > 0.$$

Die Funktion φ hat also ihr Minimum für $\alpha = 0$. Da $\varphi = 1$ für $\alpha = 0$ bekommt man für alle andere Werte von α :

$$(e^{-k\alpha^2} + 2k\alpha \int_0^\alpha e^{-kx^2} dx) > 1.$$

Sämtliche Ausdrücke in den Klammern in Gleichung (4'') sind folglich gleich oder grösser als 1. Wir haben somit:

$$D > \left(\frac{n_1}{n} d_1 + \frac{n_2}{n} d_2 + \dots + \frac{n_p}{n} d_p \right).$$

Die mittlere Abweichung ist also am kleinsten für den Fall, dass sämtliche gemischte Verteilungen denselben Mittelwert haben. Sobald von einander abweichende Mittelwerte auftreten, wird die mittlere Abweichung vergrössert.

3. Mischung von Verteilungen mit demselben Mittelwert, aber mit verschiedener Streuung.

Wir wollen den Spezialfall behandeln, dass p Maxwell'sche Verteilungen, alle mit demselben Mittelwert und mit gleicher Anzahl von Fällen, aber mit verschiedenen Koeffizienten k_1, k_2, \dots, k_p gemischt vorkommen.

Gleichung (3') gibt dann für die Häufigkeit $F_2(x)$ eine Abweichung x :

$$(7) \quad F_2(x) = \frac{1}{p} \left(\sqrt{\frac{k_1}{\pi}} e^{-k_1 x^2} + \sqrt{\frac{k_2}{\pi}} e^{-k_2 x^2} + \dots + \sqrt{\frac{k_p}{\pi}} e^{-k_p x^2} \right),$$

und Gleichung (4'') gibt für die mittlere Abweichung D_2 :

$$(8) \quad D_2 = \frac{1}{p} (d_1 + d_2 + \dots + d_p).$$

Da D_2 das arithmetische Mittel von d_1, d_2, \dots, d_p ist, so müssen einige dieser Abweichungen grösser als D_2 sein. Wir haben also den im Abschnitt 1 be-

handelten Fall (c), wo die wirkliche Verteilung $F_2(x)$ mehr grosse Abweichungen als die entsprechende Verteilung $h_2(x)$ aufweist. Wir haben also:

$$\frac{F_2(\infty)}{h_2(\infty)} = \infty.$$

Für $x = 0$ geben die Gleichungen (7) und (5):

$$\frac{F_2(0)}{h_2(0)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_p} \right) D_2,$$

oder nach Einsetzung des Wertes (8) für D_2 :

$$\frac{F_2(0)}{h_2(0)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_p} \right) \frac{1}{p} (d_1 + d_2 + \dots + d_p),$$

ein Ausdruck, dessen Wert grösser als 1 ist. Es ist also:

$$\frac{F_2(0)}{h_2(0)} > 1.$$

Folglich zeigt die wirkliche Verteilungskurve $F_2(x)$ zu viele kleine und zu viele grosse Abweichungen, aber zu wenig mässige Abweichungen im Vergleich mit der Maxwellschen Verteilungskurve $h_2(x)$, die mit Hilfe der mittleren Abweichung berechnet ist.

4. Mischung von Verteilungen mit derselben Streuung, aber mit verschiedenen Mittelwerten.

Wir wollen jetzt den speziellen Fall behandeln, dass p Maxwellsche Verteilungen mit demselben Koeffizienten k und mit gleicher Anzahl von Fällen, aber mit verschiedenen Mittelwerten A_1, A_2, \dots, A_p gemischt vorkommen. Gleichung (3') gibt dann für die Häufigkeit $F_3(x)$ einer Abweichung x :

$$(9) \quad F_3(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{p} \left[e^{-k(x+\alpha_1)^2} + e^{-k(x+\alpha_2)^2} + \dots + e^{-k(x+\alpha_p)^2} \right],$$

und Gleichung (4'') gibt für die mittlere Abweichung D_3 :

$$(10) \quad D_3 = d \frac{1}{p} \left[(e^{-k\alpha_1^2} + 2k\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} e^{-kx^2} dx) + \dots + (e^{-k\alpha_p^2} + 2k\alpha_p \int_0^{\alpha_p} e^{-kx^2} dx) \right].$$

Da sämtliche Glieder in den runden Klammern grösser als 1 sind, so hat man $d < D_3$. Wir haben also den in Abschnitt 1 behandelten Fall (ä), wo

sämtliche d kleiner als D_3 sind. In der wirklichen Verteilung $F_3(x)$ sind folglich weniger grosse Abweichungen als in der entsprechenden Verteilung $h_3(x)$:

$$\frac{F_3(\infty)}{h_3(\infty)} = 0.$$

Für den Fall, dass die Verteilungskurve $F_3(x)$ ihr Maximum in der Nähe von $x = 0$ hat, ist es von Interesse, den Wert von $F_3(x)$, mit demjenigen von $h_2(x)$ für $x = 0$ zu vergleichen. Nach den Gleichungen (9) und (5) bekommt man:

$$\frac{F_3(0)}{h_3(0)} = \frac{D_3}{d} \frac{1}{p} (e^{-k\alpha_1^2} + e^{-k\alpha_2^2} + \dots + e^{-k\alpha_p^2}).$$

Wenn man hier den Wert von $\frac{D_3}{d}$ nach Gleichung (10) einführt, so finden man durch Reihenentwicklung für mässige Werte von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, dass:

$$\frac{F_3(0)}{h_3(0)} = 1 - k^2 (\alpha^2)_m^2 + \frac{1}{3} k^2 (\alpha^4)_m - \dots$$

Bei den gewöhnlichen Verteilungen, wo $(\alpha^4)_m < 3 (\alpha^2)_m^2$, hat man dann:

$$\frac{F_3(0)}{h_3(0)} < 1.$$

Die wirkliche Verteilungskurve zeigt also in diesen Fällen weniger kleine und weniger grosse Abweichungen, aber mehr mässige Abweichungen als die Maxwellsche Verteilungskurve $h_3(x)$, die mit Hilfe der mittleren Abweichung berechnet ist. Der Charakter ist also dem im vorhergehenden Abschnitt gefundenen genau entgegengesetzt.

5. Die Verteilung bei konstanter Streuung und veränderlichen Mittelwert.

Wir setzen jetzt voraus, dass wir eine Maxwellsche Verteilung haben, wo der Mittelwert sich stetig und linear ändert, während die Konstante k unverändert gehalten wird.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass p Maxwellsche Verteilungen mit demselben Koeffizienten k und mit gleicher Anzahl von Fällen, aber mit verschiedenen Mittelwerten:

$$A_1, A_2 = A_1 + a, A_3 = A_1 + 2a, \dots, A_p = A_1 + (p-1)a$$

gemischt auftreten. Wir setzen:

$$\frac{p-1}{2} a = b,$$

und Gleichung (3) gibt für die Häufigkeit $F_4(x)$ einer Abweichung x :

$$F_4(x) = \frac{1}{p} (H(x-b) + H(x-b+a) + H(x-b+2a) + \dots + H(x+b)).$$

Wir lassen jetzt a gegen Null gehen, während b konstant gehalten wird, und erhalten:

$$F_4(x) = \frac{1}{2b} \int_{x-b}^{x+b} H(x) dx,$$

oder:

$$(11) \quad F_4(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{2b} \int_{x-b}^{x+b} e^{-kx^2} dx.$$

Dies ist die Häufigkeit einer Abweichung x in einer Verteilung, wo der Mittelwert sich linear mit einem Betrag von $2b$ geändert hat, während der Koeffizient k konstant blieb.

Da dieser Fall ein Spezialfall des im vorhergehenden Abschnitt behandelten Falles ist, so hat man für mässige Werte von b zu wenig kleine und zu wenig grosse, aber zu viele mässige Abweichungen im Vergleich mit der Maxwell'schen Verteilungskurve, die mit Hilfe der mittleren Abweichung D_4 berechnet wird.

Für die mittlere Abweichung gibt Gleichung (4):

$$(12) \quad D_4 = d \frac{1}{b} \left[\int_0^b e^{-kx^2} dx + 2k \int_0^b x \int_0^b e^{-kx^2} dx dx \right].$$

6. Numerische Berechnungen.

In mehreren der entwickelten Formeln treten Integrale auf, die mit Hilfe von Tabellen über das Gauss'sche Fehlerintegral:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

leicht berechnet werden können.¹⁾ Beispielsweise kann Gleichung (11) in der Form:

$$(11') \quad F_4(x) = \frac{1}{4b} [\Phi(\sqrt{k}(b+x)) + \Phi(\sqrt{k}(b-x))]$$

geschrieben werden.

Man kann indessen auch mit Vorteil gewöhnliche numerische Berechnungsmethoden verwenden,

¹⁾ Siehe z. B.: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, von Dr. E. Jahnke und Dr. Emde, Leipzig, 1928, S. 31.

und in mehr komplizierten Fällen lohnt es sich ziemlich früh in den Berechnungen zu solche Methoden zu übergehen,

Man benutzt dann die Gleichung (3):

$$F(x) = \frac{n_1}{n} H(k_1, x + \alpha_1) + \frac{n_2}{n} H(k_2, x + \alpha_2) + \dots + \frac{n_p}{n} H(k_p, x + \alpha_p)$$

um die Häufigkeit $F(x)$ einer Abweichung x zu finden, und demnach benutzt man Gleichung (4):

$$D = \int_0^{\infty} F(x) x dx + \int_0^{-\infty} F(x) x dx$$

um die mittlere Abweichung D zu berechnen.

In dem allgemeinen Fall, wo einfache Maxwell'schen Verteilungen mit verschiedenen Mittelwerten und mit verschiedenen Koeffizienten k gemischt vorkommen, treten allerlei schiefe Verteilungskurven auf.

7. Beispiele.

Um die oben gegebenen theoretischen Überlegungen zu erläutern, werden wir einige einfache Beispiele behandeln.

Beispiel 1.

Wir nehmen an, dass zwei einfache Maxwell'sche Verteilungen mit denselben Mittelwerten und mit derselben Anzahl von Fällen, aber mit verschiedenen Koeffizienten k gemischt auftreten (Siehe Abschnitt 3). Wir wählen:

$$k_1 = 0.102 \text{ und } k_2 = 0.061,$$

und haben dann:

$$H_1(x) = 0.180 e^{-0.102 x^2},$$

$$H_2(x) = 0.139 e^{-0.061 x^2}.$$

Gleichung (7) gibt für die Häufigkeit einer Abweichung x in der Mischung:

$$F(x) = 0.090 e^{-0.102 x^2} + 0.0695 e^{-0.061 x^2}.$$

Gleichung (8) gibt für die mittlere Abweichung D in der Mischung:

$$D = \frac{1}{2} (1.77 + 2.30) = 2.035.$$

Die Gleichung (5') gibt endlich für die zu dieser Abweichung entsprechende Maxwell'sche Verteilung $h(x)$:

$$h(x) = 0.156 e^{-0.077 x^2}.$$

Die Kurven $H_1(x)$, $H_2(x)$, $F(x)$ und $h(x)$ sind in Fig. 1 graphisch dargestellt. Wie man sieht, schmiegt

sich die Kurve $h(x)$ ziemlich eng an die wirkliche Verteilungskurve $F(x)$. Es treten in der wirklichen Kurve zu viele kleine und zu viele grosse Ab-

spiel 1 gefunden genau entgegengesetzt. Die wirkliche Verteilungskurve zeigt zu wenige kleine und zu wenige grosse Abweichungen, aber zu viele

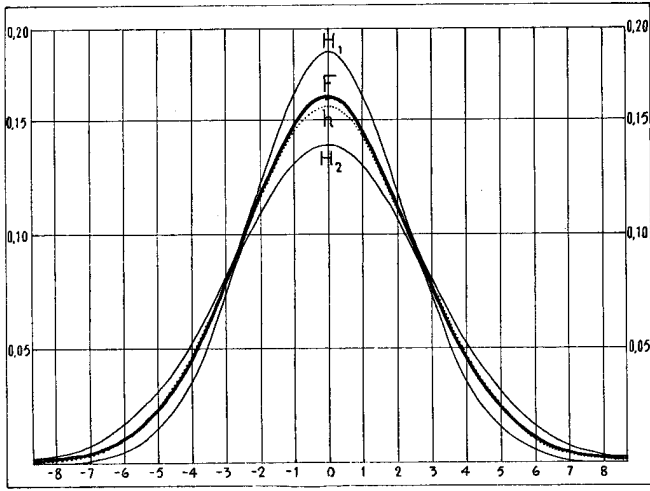


Fig. 1.

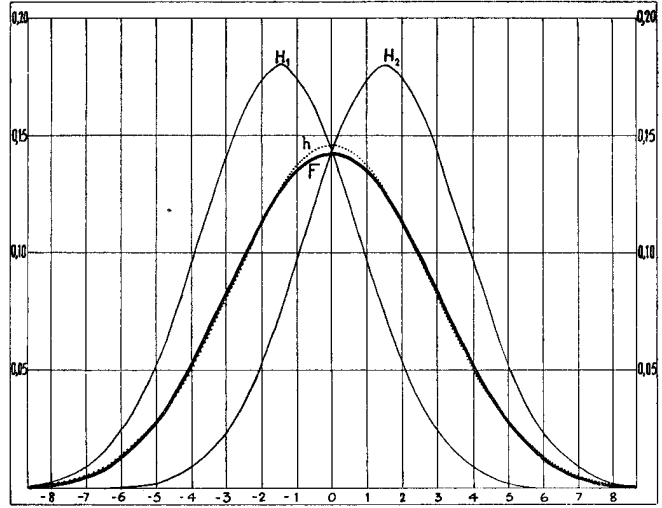


Fig. 2.

weichungen, aber zu wenige mässige Abweichungen auf verglichen mit der Maxwell'sche Kurve $h(x)$.

mässige Abweichungen, verglichen mit der Maxwell'schen Verteilungskurve $h(x)$.

Beispiel 2.

Wir nehmen an, dass zwei einfache Maxwell'sche Verteilungen $H_1(x)$ und $H_2(x)$ mit demselben Koeffizienten $k = 0.102$ und mit gleicher Anzahl von Fällen, aber mit verschiedenen Mittelwerten A_1 und $A_1 + 3$ gemischt vorkommen. (Siehe Abschnitt 4). Wir haben dann:

$$H_1(x) = 0.180 e^{-0.102(x-1.5)^2},$$

$$H_2(x) = 0.180 e^{-0.102(x+1.5)^2}.$$

Gleichung (9) gibt für die Häufigkeit einer Abweichung x in der Mischung:

$$F(x) = 0.090 (e^{-0.102(x-1.5)^2} + e^{-0.102(x+1.5)^2}),$$

und Gleichung (10) gibt für die mittlere Abweichung D :

$$D = 1.77 (e^{-0.23} + 0.306 \int_0^{1.5} e^{-0.102x^2} dx) = 2.16$$

Gleichung (5') gibt schliesslich:

$$h(x) = 0.146 e^{-0.068x^2}.$$

Die Kurven $H_1(x)$, $H_2(x)$, $F(x)$ und $h(x)$ sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Auch hier schmiegt sich die Maxwell'sche Verteilungskurve $h(x)$ eng an die wirkliche Verteilungskurve $F(x)$ an. Der Charakter der Unterschiede ist aber dem im Bei-

Beispiel 3.

Wir nehmen an, dass wie im Beispiel 2 zwei einfache Maxwell'schen Verteilungen $H_1(x)$ und $H_2(x)$ mit demselben Koeffizienten $k = 0.102$, mit gleicher Anzahl von Fällen und mit verschiedenen Mittelwerten gemischt auftreten (siehe Abschnitt 4). Wir nehmen aber jetzt an, dass der Unterschied zwischen den Mittelwerten grösser ist, dass $A_2 = A_1 + 5$. Wir haben dann:

$$H_1(x) = 0.180 e^{-0.102(x-2.5)^2},$$

$$H_2(x) = 0.180 e^{-0.102(x+2.5)^2},$$

und finden wie im Beispiel 2:

$$F(x) = 0.090 (e^{-0.102(x-2.5)^2} + e^{-0.102(x+2.5)^2}),$$

$$D = 2.79,$$

$$h(x) = 0.114 e^{-0.0408x^2}.$$

Die Kurven sind in Fig. 3 grafisch dargestellt. Die Unterschiede zwischen den Kurven $F(x)$ und $h(x)$ sind jetzt grösser als im Beispiel 2, sie haben aber denselben Charakter.

Beispiel 4.

Es wird angenommen, dass wir eine einfache Maxwell'sche Verteilung mit einem Koeffizienten $k = 0.102$ haben, wo der Mittelwert sich stetig und

liniar bis zum Betrag von 3 Einheiten ändert (siehe Abschnitt 5). Wir haben dann:

$$H(x) = 0.180 e^{-0.102(x+a)^2},$$

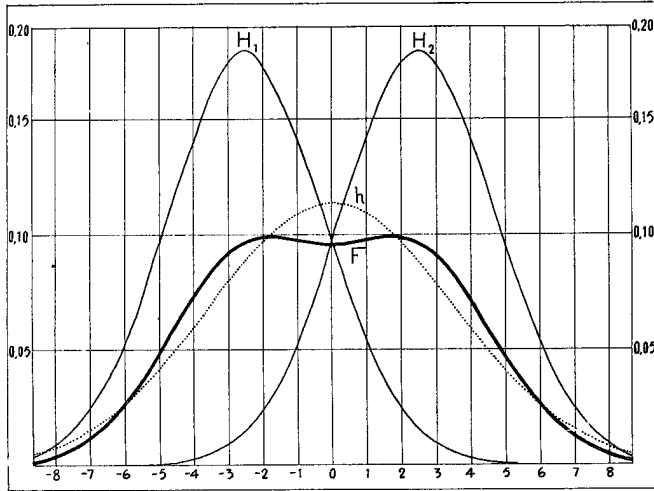


Fig. 3.

wo a alle Werte zwischen -1.5 und $+1.5$ annimmt.

Für diese Mischung gibt Gleichung (11):

$$F(x) = 0.030 \int_{x-1.5}^{x+1.5} e^{-0.102x^2} dx.$$

In Fig. 4 ist diese Kurve graphisch dargestellt. Die mittlere Abweichung D wird am leichtesten

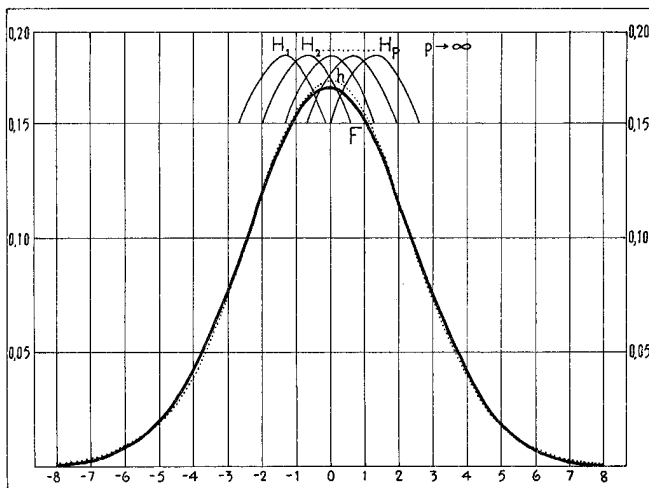


Fig. 4.

numerisch aus der Kurve $F(x)$ unter Benutzung von Gleichung (4) berechnet. Man findet:

$$D = 1.87,$$

und folglich:

$$h(x) = 0.170 e^{-0.090x^2}.$$

Diese Kurve schmiegt sich sehr nahe an die wirkliche Verteilungskurve $F(x)$. Es treten aber, wie zu erwarten war, Unterschiede derselben Art wie in den Beispielen 2 und 3 auf.

Beispiel 5.

Wir nehmen an, dass drei Maxwell'sche Verteilungen $H_1(x)$, $H_2(x)$ und $H_3(x)$ mit demselben Koeffizienten $k = 0.102$ und mit gleicher Anzahl von Fällen und mit den Mittelwerten A_1 , $A_2 = A_1 + 3$, $A_3 = A_1 + 3$ gemischt vorkommen:

$$H_1(x) = 0.180 e^{-0.102(x-2)^2},$$

$$H_2(x) = H_3(x) = 0.180 e^{-0.102(x+1)^2}.$$

Die Verteilungskurve:

$$F(x) = 0.060 (e^{-0.102(x-2)^2} + 2 e^{-0.102(x+1)^2})$$

ist in Fig. 5 graphisch dargestellt. Es ist eine un-symmetrische Kurve, wo der häufigste Wert vom

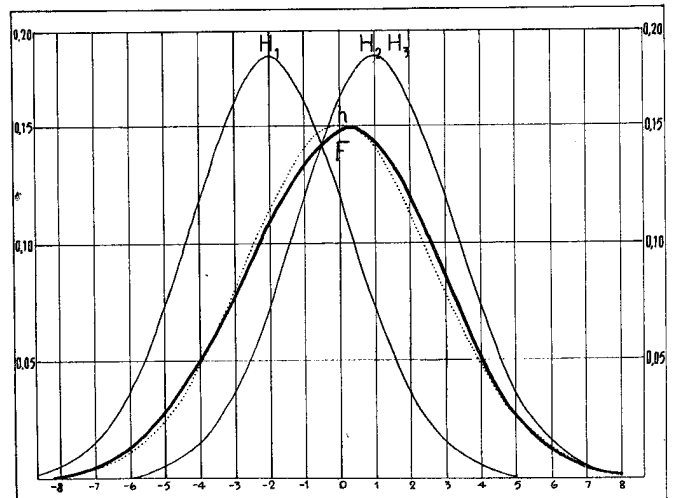


Fig. 5.

Mittelwert verschieden ist. Durch numerische Berechnung findet man:

$$D = 2.10,$$

und folglich:

$$h(x) = 0.151 e^{-0.072x^2}.$$

Für grosse Werte von x ist $F(x)$ kleiner als $h(x)$, so wie wir es im Abschnitt 4 gefunden haben.

Beispiel 6.

Wir nehmen schliesslich an, dass zwei einfache Maxwell'sche Verteilungen:

$$H_1(x) = 0.180 e^{-0.102(x-1.5)^2},$$

$$H_2(x) = 0.139 e^{-0.061(x+1.5)^2}.$$

gemischt auftreten und zwar mit gleicher Anzahl von Fällen.

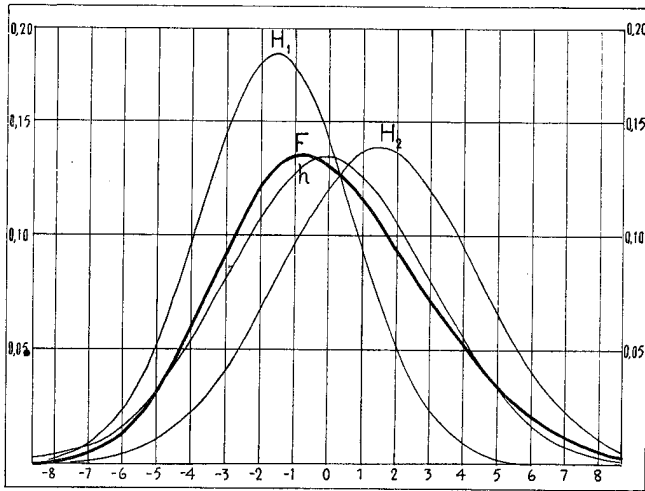


Fig. 6.

Die Kurven sind in Fig. 6 dargestellt werden. Die Kurve $F(x)$ ist als die Mittelkurve:

$$F(x) = 0.090 e^{-0.102(x-1.5)^2} + 0.0695 e^{-0.061(x+1.5)^2}$$

gezeichnet. Wie man sieht, hat man auch hier eine unsymmetrische Verteilungskurve. Durch numerische Berechnung findet man:

$$D = 2.36,$$

und schliesslich:

$$h(x) = 0.135 e^{-0.057x^2}.$$

Der Unterschied zwischen dieser Kurve und der wirklichen Verteilungskurve $F(x)$ ist bedeutend.

8. Gruppierung der Verteilungskurven.

Durch die Mischung von Maxwellschen Verteilungen mit verschiedenen Mittelwerten oder mit verschiedener Streuung (verschiedenen Werten von k) entsteht im behandelten Material eine *Inhomogenität*, die eine Abweichung der Verteilungskurve von der einfachen Maxwellschen Verteilungskurve bewirkt. Wir haben oben gesehen, dass diese Abweichungen je nach der Art der Inhomogenität verschiedenen Charakter haben.

Wir können folgende Haupttypen aufstellen:

(1) Die *Inhomogenität besteht in einer Änderung der Streuung* (Fig. 1).

In der wirklichen Verteilungskurve $F(x)$ treten dann mehr kleine und mehr grosse Abweichungen und weniger Abweichungen mässiger Grösse auf als in der entsprechenden Maxwellschen Verteilungskurve $h(x)$.

(2) Die *Inhomogenität besteht in einer Änderung des Mittelwertes* (Fig. 2—5).

In der wirklichen Verteilungskurve $F(x)$ treten dann weniger grosse Abweichungen auf als in der entsprechenden Maxwellschen Verteilungskurve $h(x)$.

Bei unsymmetrischen Verteilungskurven ist die Anzahl der kleinen Abweichungen relativ klein, weil das Maximum von $F(x)$ nicht mit demjenigen von $h(x)$ zusammenfällt, aber auch in den Fällen wo die wirkliche Verteilungskurve symmetrisch ist, zeigt sie relativ wenig kleine Abweichungen, während die Abweichungen mässiger Grösse relativ zahlreich sind.

(3) Die *Inhomogenität besteht in einer Änderung sowohl des Mittelwertes als auch der Streuung* (Fig. 6).

In diesem Fall bekommt man in allgemeinen unsymmetrische Verteilungskurven $F(x)$. Das Maximum von $F(x)$ fällt dann nicht mit dem Mittelwert zusammen. Es treten infolgedessen relativ wenig kleine Abweichungen auf im Vergleich mit denjenigen in der Maxwellschen Kurve $h(x)$.

Wenn die Inhomogenität überwiegend durch Änderungen des Mittelwertes verursacht wird (Fall *a* im Abschnitt 1), treten relativ wenig grosse Abweichungen auf, während man relativ viel grosse Abweichungen hat, wenn die Änderungen in der Streuung überwiegen (Fall *c* im Abschnitt 1).

Teil II. Meteorologische Anwendungen.

9. Die Verteilungskurven der meteorologischen Elementen in Aas im Januar 1929.

Im folgenden sollen die oben gegebenen Überlegungen auf die Registrierungen am Meteorologischen Observatorium in Aas ($\varphi = 59^\circ 40' N$, $\lambda = 10^\circ 46' E$, $H = 90$ m) von Januar 1929 verwendet werden.

Die Registrierungen wurden zuerst in der üblichen Weise bearbeitet, d. h. es wurden die Stundenwerte des Luftdrucks (mbar), der Lufttemperatur ($^\circ C$), der Windgeschwindigkeit (m/sek), der Windrichtung (in der Skala 01—32) und der relativen Feuchte (%) ermittelt.

Aus den Stundenwerten der Richtung und Geschwindigkeit des Windes wurden die Komponenten gegen Ost und gegen Nord und aus den Stundenwerten der relativen Feuchte und der Lufttemperatur wurde die absolute Feuchte in gr/m^3 berechnet.

Wir erhalten auf diese Weise Tabellen über die Stundenwerte im Januar 1929 für den Luftdruck (p), die Lufttemperatur (ϑ), die Westkomponente des Windes (v_x), die Südkomponente des Windes (v_y) und die absolute Feuchte (E). Für jedes Element standen $24 \cdot 31 = 744$ Werte zur Verfügung.

Verteilung der Windkomponenten in Aas im Januar 1929.

In den Tabellen der Stundenwerten der Windkomponenten wurde die Anzahl der Fälle innerhalb der Geschwindigkeitsstufen von 1 m/sek ausgezählt. Dabei wurden die Fälle mit der Geschwindigkeitskomponente 0 gleichmässig auf die Intervalle von 0 bis 1 m/sek und von 0 bis -1 m/sek verteilt. Es wurde sodann die prozentuale Häufigkeit für die verschiedenen Stufen berechnet. Das Resultat ist in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1.

Geschwindigkeits-Stufe m/sek	Prozentuale Häufigkeit	
	(W-Komp.) v_x	(S-Komp.) v_y
+ 8.1—9.0	—	0.1
7.1—8.0	—	0.1
6.1—7.0	—	0.3
5.1—6.0	—	2.2
4.1—5.0	0.4	2.0
3.1—4.0	0.1	1.1
2.1—3.0	1.8	3.2
1.1—2.0	12.1	2.7
0—1.0	32.9	16.9
— 0—1.0	35.9	29.6
1.1—2.0	10.2	18.4
2.1—3.0	3.5	13.2
3.1—4.0	1.6	5.1
4.1—5.0	1.1	2.8
5.1—6.0	0.4	0.7
6.1—7.0	—	1.0
7.1—8.0	—	0.1
8.1—9.0	—	0.3
9.1—10.0	—	0.1
10.1—11.0	—	0.1

Man sieht unmittelbar, dass die gefundenen Verteilungen wegen der Spärlichkeit des benutzten

Materialies unregelmässig sind und nur mässig mit dem einfachen Maxwell'schen Gesetz übereinstimmen. Wir wollen untersuchen, ob systematische Unterschiede auftreten, und werden deshalb die entsprechenden Maxwell'schen Verteilungen $h(v_x)$ und $h(v_y)$ berechnen:

Wir finden:

$$v_{x \cdot m} = -0.124, D_x = 1.01,$$

$$\sqrt{\frac{k'_x}{\pi}} = 0.313, k'_x = 0.309,$$

$$v_{y \cdot m} = -0.651, D_y = 1.81,$$

$$\sqrt{\frac{k'_y}{\pi}} = 0.175, k'_y = 0.097,$$

und folglich:

$$h(v_x) = 0.313 e^{-0.309(v_x + 0.124)^2},$$

$$h(v_y) = 0.175 e^{-0.097(v_y + 0.651)^2}.$$

Diese Kurven sind in Fig. 7 und Fig. 8 gegeben. Ausserdem sind die wirklichen Verteilungs-

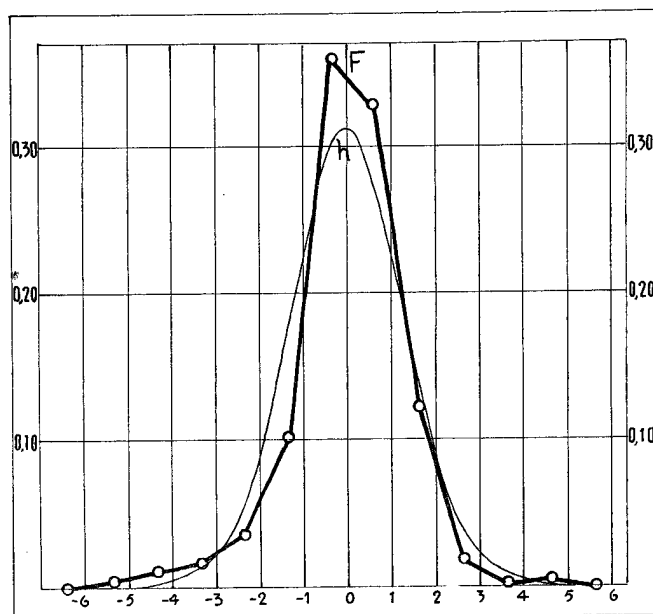


Fig. 7.

kurven $F(v_x)$ und $F(v_y)$ mittels der in Tabelle 1 gegebenen Häufigkeiten als gebrochene Linien eingezeichnet.

Wie zu erwarten war, treten grosse Unterschiede zwischen den wirklichen Verteilungskurven und den nach dem Maxwell'schen Gesetz berechneten Verteilungskurven auf. Die Unterschiede weisen aber gemeinsame Züge auf. Verglichen mit den Maxwell'schen Verteilungskurven zeigen die wirklichen zu viele Fälle mit kleinen Abweichungen vom Mittelwert, zu wenige Fälle mit Abweichungen

mässiger Grösse und zu viele Fälle mit grossen Abweichungen.

Die Abweichungen haben also denselben Charakter wie im Fall (1) im Abschnitt 8 und sind

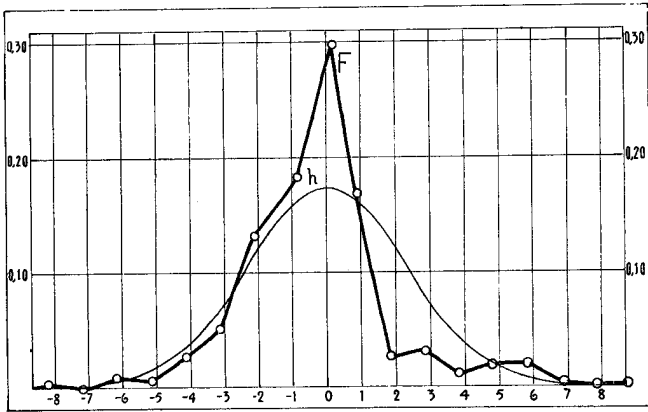


Fig. 8.

durch Änderung der Streuung entstanden (Siehe auch Fig. 1).

Dieses ist sehr verständlich, denn die Geschwindigkeit des vektoriellen Mittelwindes ist sehr klein, und die Änderungen des Mittelwindes im Laufe des Monats sind dann auch unbedeutend. Dagegen änderte sich der Wind selbst ziemlich viel, indem stille Perioden und mehr windige Perioden sich abgelöst haben. In den Abweichungen des Windes von dem kleinen Mittelwind sind also bedeutende Schwankungen aufgetreten. Oder mit anderen Worten, wir haben kleine Änderungen im Mittelwind und grosse Änderungen in der Streuung des Windes.

Entsprechende Resultate hat *Eddington* bei seinen Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Sterne gefunden. Er schreibt: «The observed distribution has what is technically called a positive excess, that is to say, too many small and too many large motions compared with the number of moderate motions.» Er gibt hierfür die folgende Erklärung: «A distribution of this kind would be obtained if we mixed together distributions having different moduli and it may therefore be supposed that the deviations arise from the non-homogeneity of the material.»

Etwas ähnliches haben *Bjørkdal* und ich¹⁾ für die Verteilungskurve der Turbulenz des Windes

¹⁾ *Th. Hesselberg* und *E. Bjørkdal*: Über das Verteilungsgesetz der Windunruhe. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. Hergesell-Festschrift. Leipzig 1929.

gefunden. Bei diesen Untersuchungen konnten wir zwar nicht die Verteilungskurven der Komponenten, sondern nur diejenige der skalaren Geschwindigkeit v . Die Theorie wurde dadurch etwas erschwert, es wird darüber auf die Abhandlung selbst verwiesen. Es soll hier nur erwähnt werden, dass die Verteilungskurven in allen untersuchten Fällen gemeinsame Züge zeigten im Vergleich mit den entsprechenden Maxwell'schen Verteilungskurven, indem sie alle zu viel kleine und zu viel grosse Geschwindigkeiten aufwiesen, während zu wenig Fälle mittlerer Geschwindigkeiten auftraten. Wir konnten nachweisen, dass man diese charakteristischen Züge der empirischen Verteilungskurven erhält, wenn man anstatt der einfachen Maxwell'schen Verteilung eine Summe von solchen verwendete, wo sowohl Mittelwind wie Streuung etwas verschieden war.

Im vorliegenden Falle können wir die charakteristischen Züge der wirklichen Verteilungen erhalten, wenn man sie als Summen von Maxwell'schen Verteilungen mit verschiedenen Moduln betrachtet. Für die Westkomponente findet man mit guter Annäherung:

$$F'(v_x) = 0.244 e^{-0.188(v_x+0.124)^2} + 0.454 e^{-0.650(v_x+0.124)^2}$$

In Fig. 9 ist diese Kurve eingetragen und die wirkliche Verteilungskurve $F(v_x)$ ist als gebrochene Linie gezeichnet.

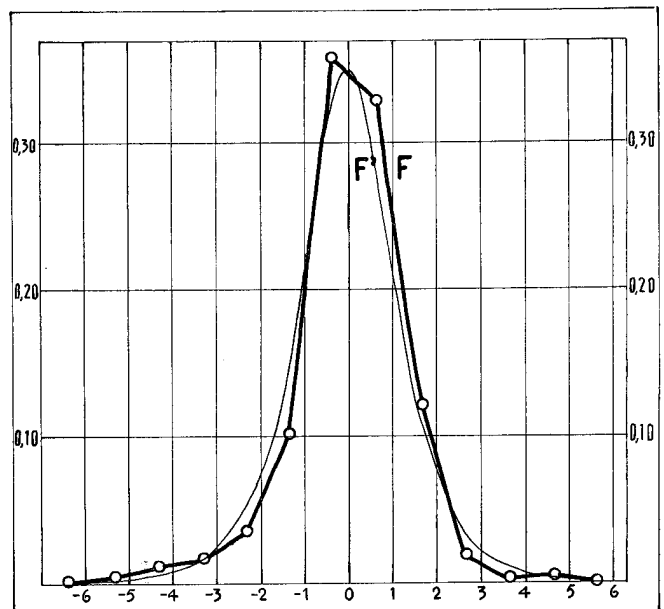


Fig. 9.

*Verteilung der Lufttemperatur in Aas
im Januar 1929.*

In den Tabellen über die Stundenwerte wurde die Anzahl der Fälle innerhalb der Temperaturstufen von 1°C ausgezählt. Da die Temperatur von -17.4° bis 3.6° schwankte, bekamen wir in dieser Weise 22 Stufen. Um die zufälligen Unregelmässigkeiten zu verringern, die von der Spärlichkeit des Materiales herrühren, wurde die Anzahl der Stufen auf die Hälfte reduziert. Die Mitteltemperatur und die mittlere Abweichung wurden jedoch mit Hilfe der unverkleinerten Tabelle berechnet. In Tabelle 2 ist die prozentuale Häufigkeit pro Grad für die 2-Grad-Stufen gegeben.

Tabelle 2.

Temperaturstufe	Häufigkeit (%)
+ 2.0°—3.9°	0.3
0.0°—1.9°	1.5
— 2.0°—0.1°	3.5
4.0°—2.1°	6.5
6.0°—4.1°	9.0
8.0°—6.1°	7.7
10.0°—8.1°	8.1
12.0°—10.1°	6.7
14.0°—12.1°	3.9
16.0°—14.1°	2.2
18.0°—16.1°	0.6

Wir finden:

$$\vartheta_m = -7^{\circ}.1, D = 3^{\circ}.44, \sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.093, k' = 0.027.$$

Die gesuchte Maxwell'sche Verteilung $h(\vartheta)$ ist also durch die Gleichung:

$$h(\vartheta) = 0.093 e^{-0.027(\vartheta+7.1)^2}$$

gegeben.

Diese Kurve ist in Fig. 10 eingezeichnet. Aus-

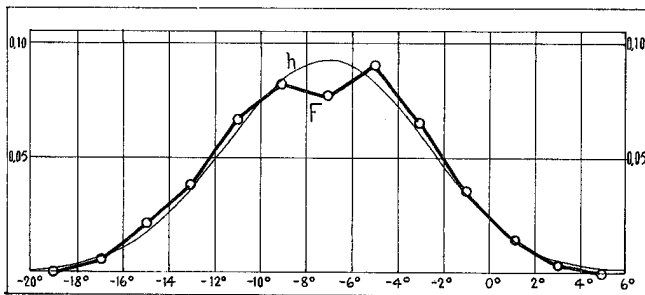


Fig. 10.

serdem findet man die wirkliche Verteilungskurve $F(\vartheta)$ als gebrochene Linie dargestellt.

Im Vergleich mit der Maxwell'schen Verteilung zeigt die wirkliche Verteilung zu wenig kleine und zu wenig grosse Abweichungen, während zu viele Abweichungen mässiger Grösse auftreten. Die Abweichungen haben also den Charakter des Falles (2) im Abschnitt 8 und sind durch Änderungen im Mittelwert entstanden (siehe auch Fig. 2—3). Dies entspricht völlig den wirklichen Verhältnissen. Im Laufe des Monats sind nämlich kältere und mildere Perioden aufgetreten ohne wesentliche Änderungen in der Streuung der Temperatur.

*Die Verteilung des Luftdrucks in Aas
im Januar 1929.*

Im ersten und letzten Teil des Monats war der Luftdruck hoch, während er sich in der Mitte des Monats niedriger hielt. Das Maximum von 1041.5 mbar trat am 8. Januar ein und das Minimum von 980.5 mbar am 18. Januar. Es waren also zwei Hochdruckperioden und dazwischen eine Periode niedrigen Luftdrucks. Erfahrungsgemäss ändert sich der Luftdruck weniger in einer Hochdruckperiode als in einer Tiefdruckperiode. Wir haben also zwei Perioden mit hohen Werten und kleiner Streuung und eine Periode mit niedrigeren Werten und grösserer Streuung. Wir müssen deshalb eine unsymmetrische Verteilungskurve mit dem Maximum der Häufigkeit bei einem Luftdruck erwarten, der höher als das Mittel liegt (vergl. Fall (3) im Abschnitt 8).

Die Stundenwerte des Luftdrucks wurden auf Stufen von 1/4 cbar verteilt und daraus wurde die prozentuale Verteilung pro cbar und die mittlere Abweichung berechnet. In Tabelle 3 ist die Anzahl der Stufen verringert, um die zufälligen Unregelmässigkeiten wegen der Spärlichkeit des Materiales herabzusetzen.

Tabelle 3.

Luftdruckstufe (cbar)	Prozentuale Häufigkeit
98.01—99.00	4.3
99.01—100.00	11.1
100.01—101.00	10.8
101.01—102.00	33.3
102.01—103.00	28.0
103.01—104.00	10.1
104.01—105.00	2.4

Wir finden:

$$p_m = 101.55 \text{ cbar}, D = 1.08 \text{ cbar},$$

$$\sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.294, k' = 0.27.$$

Die Maxwell'sche Verteilung $h(p)$ ist also durch die Gleichung:

$$h(p) = 0.294 e^{-0.27(p-101.55)^2}$$

gegeben. Diese Kurve ist in Fig. 11 gegeben, wo ausserdem die Kurve $F(p)$ also gebrochene Kurve

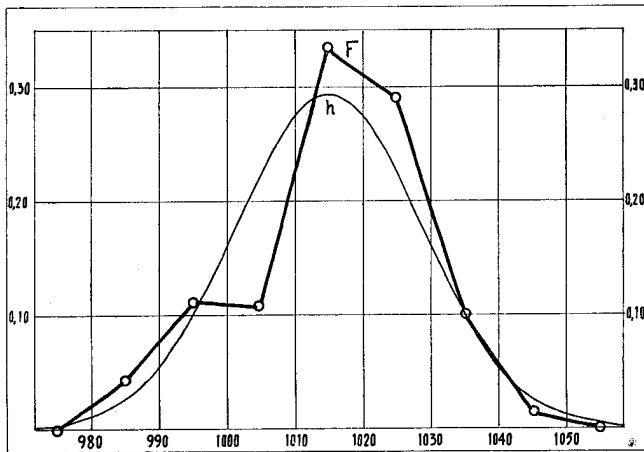


Fig. 11.

eingezeichnet ist. Es treten grosse Abweichungen zwischen den beiden Kurven auf, sie haben aber den erwarteten Charakter.

Die Verteilung der Feuchte in Aas im Januar 1929.

In den kalten Perioden ist die absolute Feuchte niedrig und ihre Schwankungen sind klein, während man in den wärmeren Perioden grössere Werte und auch grössere Schwankungen der absoluten Feuchte findet. Es sind also hier niedrige Werte mit kleiner Streuung und höhere Werte mit grösserer Streuung verbunden. Wir müssen dann eine schiefe Verteilungskurve $F(E)$ erwarten, wo das Maximum bei einem Wert auftritt, der kleiner als der Mittelwert ist (während wir für den Luftdruck das umgekehrte fanden).

Die Werte der absoluten Feuchte in gr/m^3 wurden auf Stufen von $\frac{1}{2} \text{ gr/m}^3$ verteilt und die prozentuale Häufigkeit pro gr/m^3 berechnet. Das Resultat ist in Tabelle 4 angegeben.

Tabelle 4.

Feuchte-Stufe (gr/m ³)	Prozentuale Häufigkeit
0.5—0.9	2.2
1.0—1.4	22.0
1.5—1.9	37.2
2.0—2.4	55.0
1.5—2.9	29.2
3.0—3.4	28.0
3.5—3.9	12.8
4.0—4.4	7.0
4.5—4.9	6.0
3.0—5.4	0.6

Wir finden:

$$E_m = 2.50, D = 0.73, \sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.436, k' = 0.60.$$

Die Maxwell'sche Verteilung $h(E)$ ist also durch die Gleichung:

$$h(E) = 0.436 e^{-0.60(E-2.50)^2}$$

gegeben.

Aus Fig. 12 sieht man, dass die wirkliche

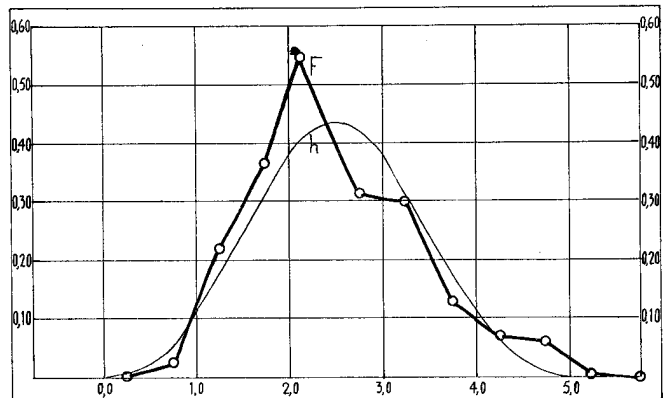


Fig. 12.

Verteilungskurve $F(E)$ die erwarteten Abweichungen von der Maxwell'schen Verteilungskurve $h(E)$ zeigt.

10. Beispiele mit veränderlichen Mittelwerten.

Wir werden jetzt zwei Fälle betrachten, wo sich der Mittelwert allmählich geändert hat und wo die im Abschnitt 5 entwickelte Theorie Anwendung findet.

*Die Verteilung der Mitteltemperatur in Aas
im Februar 1876—1935.*

Im Laufe dieser Jahren ist die Mitteltemperatur für Februar in Aas um etwa 2°C gestiegen.¹⁾

Wir werden untersuchen, ob wir in der Verteilungskurve für die Mitteltemperaturen den Einfluss dieser Temperaturänderung nachweisen können.

Die 60 Werte der Mitteltemperatur wurden auf 2° -Stufen verteilt, und die prozentuale Verteilung pro Grad berechnet. Das Resultat ist in Tabelle 5 angegeben.

Tabelle 5.

Temperaturstufe	Prozentuale Häufigkeit
— 1.0° bis $+ 0.9^{\circ}$	9.3
— 3.0° » — 1.1°	13.3
— 5.0° » — 3.1°	10.9
— 7.0° » — 5.1°	8.2
— 9.0° » — 7.1°	5.8
— 11.0° » — 9.1°	2.5

Man findet:

$$\vartheta_m = -3.8^{\circ}, D = 2.47^{\circ}, \sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.129, k' = 0.052.$$

Die Maxwellsche Verteilungskurve $h(\vartheta)$ ist also durch die Gleichung:

$$h(\vartheta) = 0.129 e^{-0.052(\vartheta+3.8)^2}$$

gegeben. Diese Kurve ist in Fig. 13 gegeben, wo

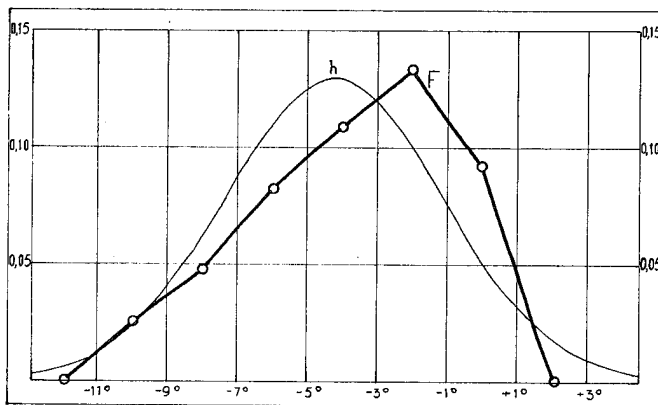


Fig. 13.

¹⁾ Th. Hesselberg und B. J. Birkeland: Säkulare Schwankungen des Klimas von Norwegen. Die Lufttemperatur. Geofysiske Publikasjoner. Vol. XIV. No. 4. Oslo 1940.

die wirkliche Verteilung $F(\vartheta)$ als gebrochene Linie gezeichnet ist.

Die Verteilung ist unsymmetrisch, weil niedrige Wintertemperaturen eine grössere Streuung als höhere haben. Diese Unsymmetrie verbirgt teilweise den Einfluss der Temperaturhöhung, man sieht aber, dass — in Übereinstimmung mit der Theorie — verhältnismässig wenig grosse Abweichungen auftreten.

*Die Verteilung der Lufttemperatur in Aas
im Jahre 1933.*

Im Laufe des Jahres änderte sich das Monatsmittel der Lufttemperatur in Aas um etwa 24° . Wenn man die Temperaturbeobachtungen des ganzen Jahres bearbeitet, muss man deshalb eine Verteilungskurve erwarten, die beträchtlich von den Änderungen der Mitteltemperaturen beeinflusst ist.

Als Material wurden die zweistündigen Werte der Temperatur verwandt. Diese 4380 Werte wurden für jeden Monat auf 2° -Stufen verteilt. Das Resultat in Tabelle 6 angegeben.

Für jeden Monat und für das Jahr ist angegeben, wie oft die Temperatur innerhalb der betreffenden Stufe lag. Die letzte Kolonne gibt für 4° -Stufen die prozentuale Verteilung pro Grad im Jahre. Unten in der Tabelle findet man für die einzelnen Monate und für das Jahr die Mitteltemperaturen ϑ_m und die mittleren Abweichungen D .

Für das Jahr haben wir:

$$\vartheta_m = 6.07^{\circ}, D = 7.85^{\circ}, \sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.0405, k' = 0.00515,$$

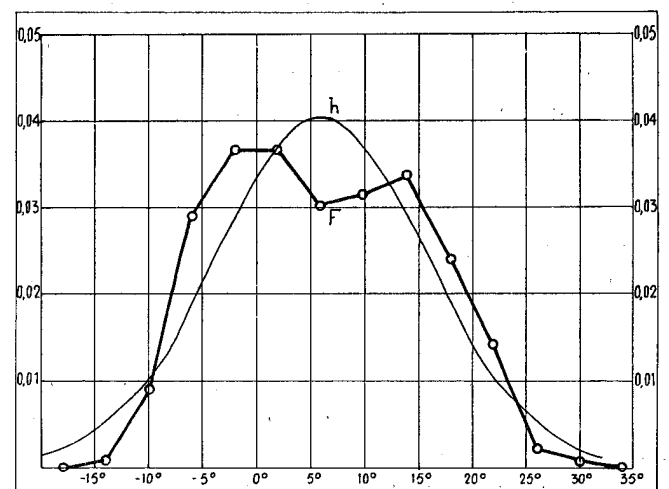


Fig. 14.

Tabelle 6.

Temperaturstufe	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Des.	Jahr	
													Anzahl	Prozentuale Häufigkeit
+ 30.0°—31.9°							5						5	} 0.09
28.0—29.9							11						11	
26.0—27.9						7	13						20	} 0.23
24.0—25.9						15	4		1				20	
22.0—23.9						39	33	20	5				97	} 1.43
20.0—21.9					4	47	48	42	13				154	
18.0—19.9					7	55	68	50	16				194	} 2.40
16.0—17.9					17	57	68	64	18	1			225	
14.0—15.9			1	4	43	80	90	88	25	6			337	} 3.37
12.0—13.9			3	14	40	29	25	54	80	10			225	
10.0—11.9			7	21	58	19	8	40	108	55			316	} 3.16
8.0—9.9			9	29	59	11	1	12	62	53	3		239	
6.0—7.9	4	1	9	44	64	1		2	24	55	18		222	} 3.02
4.0—5.9	27	12	16	71	46				2	101	31	2	308	
2.0—3.9	45	30	43	67	32				6	47	35	5	310	} 3.69
0.0—1.9	23	58	71	58	2					35	75	15	337	
— 2.0°—0.1°	57	46	77	36						9	96	26	347	} 3.68
4.0—2.1	40	48	94	16							51	49	298	
6.0—4.1	73	33	33								27	88	254	} 2.90
8.0—6.1	65	72	6								11	100	254	
10.0—8.1	35	25	0								6	56	122	} 0.90
12.0—10.1	3	6	3								3	20	35	
14.0—12.1		4									4	11	19	} 0.11
16.0—14.1		1											1	
ϑ'_m	-2.84°	-2.93°	-0.23°	4.17°	9.71°	17.62°	18.42°	15.98°	12.13°	6.32°	-0.30°	-5.85°	6.07°	
D	3.7°	3.6°	3.0°	3.3°	3.2°	3.4°	3.3°	3.0°	2.9°	2.9°	3.0°	2.6°	7.85°	

und die entsprechende Maxwellsche Verteilung $h(\vartheta)$ wird:

$$h(\vartheta) = 0.0405 e^{-0.00515(\vartheta-6.07)^2}.$$

Aus Fig. 14 ersieht man, dass die wirkliche Verteilungskurve $F(\vartheta)$ weniger kleine und weniger grosse Abweichungen und mehr Abweichungen mässiger Grösse als die entsprechende Maxwellsche Verteilung $h(\vartheta)$ aufweist. Die Unterschiede sind also genau diejenigen, die man erwarten muss, und die Unterschiede sind so gross, dass es sich lohnen kann, die Analyse etwas weiter zu führen.

Aus den Werten von D unten in Tabelle 6 sieht man, dass die Monatswerte nur wenig veränderlich sind. Für den einzelnen Monat hat man angenähert:

$$D = 3.14^\circ, \sqrt{\frac{k'}{\pi}} = 0.10, k' = 0.032,$$

und:

$$h'(\vartheta) = 0.10 e^{-0.032(\vartheta-\vartheta'_m)^2}.$$

Im Laufe des Jahres änderte sich die Mitteltemperatur ϑ'_m des Monats von 18.42° im Juli bis -5.85° im Dezember, also um etwa 24°.

Wir haben also mit gewisser Annäherung den im Beispiel 4 behandelten Fall mit einer einfachen Maxwellschen Verteilung $h'(\vartheta)$ mit konstanten Koeffizienten k , wo der Mittelwert ϑ'_m sich stetig geändert hat.

Da man in den Verteilungen für die Monate einen Einfluss der Veränderungen der Mitteltemperatur spüren kann, würde man eine bessere Annäherung finden, wenn man die Mittel ϑ'_m für kürzere Zeiträume als einen Monat berechnet hätte.

Man würde dann eine grössere Änderung der Mitteltemperatur (grösser als 24°) finden. Wir setzen schätzungsweise:

$$k = 0.032, 2b = 30^\circ,$$

und haben dann nach Gleichung (11):

$$F'(\vartheta) = 0.10 \frac{1}{30} \int_{\vartheta-15}^{\vartheta+15} e^{-0.032\vartheta^2} d\vartheta.$$

Diese Kurve ist in Fig. 15 eingezeichnet, und

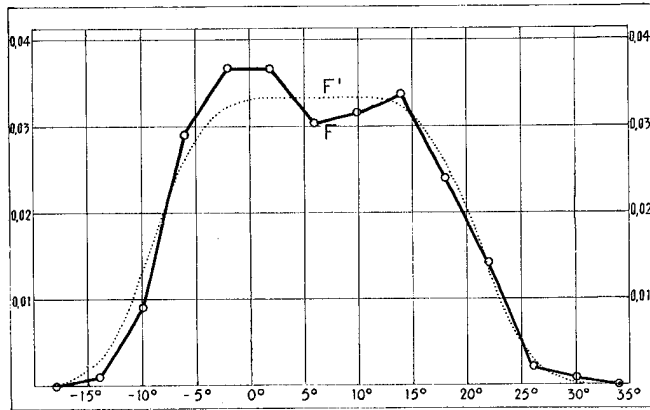


Fig. 15.

zeigt einen Verlauf, der gut mit demjenigen der wirklichen Verteilungskurve $F(\vartheta)$ übereinstimmt.

11. Abweichende Häufigkeitskurven.

In der Meteorologie findet man Häufigkeitskurven von ganz anderem Charakter als die oben behandelten, z.B. diejenigen für die Bewölkung, für die kinetische Energie des Windes oder für die relative Feuchte. Nach der Ursache der Abweichungen kann man verschiedene Typen aufstellen.

1. Mangelhafte Beobachtungen des Elements.

Ein Beispiel hierzu hat man in den Beobachtungen der Bewölkung (in Zehntel des sichtbaren Himmels), die nur in unbefriedigender Weise Auskünfte über die horizontale Ausdehnung der Wolkendecke über dem Erdboden geben. Besonders ist zu erwähnen, dass die Beobachtung $N = 10$ alle Fälle umfasst, wo die Wolkendecke den ganzen von der Station übersehbaren Himmel oder einen noch grösseren Teil des Himmels bedeckt, während $N = 0$ gemeldet wird, wenn keine Wolken an dem übersehbaren Himmel oder an einem noch grösseren Teil des Himmels vorkommen. An den beiden Enden der Skala hat man also grosse Säcke und in dieser Weise entsteht die bekannte U-förmige Häufigkeitskurve.

In Tabelle 7 sind die Anzahl und die prozentuale Häufigkeit für die verschiedenen Bewölk-

ungsgrade N in Oslo im Jahre 1933, berechnet nach den Terminbeobachtungen, gegeben.

Tabelle 7.

N	Zahl der Fälle	Prozentuale Häufigkeit
0	56	5.1
1	142	13.0
2	77	7.0
3	53	4.9
4	21	1.9
5	23	2.1
6	18	1.6
7	43	3.9
8	57	5.2
9	174	15.9
10	431	39.4

Die Häufigkeitskurve $F(N)$ für die Bewölkung ist im Fig. 16 gezeichnet. Sie zeigt Anhäufungen

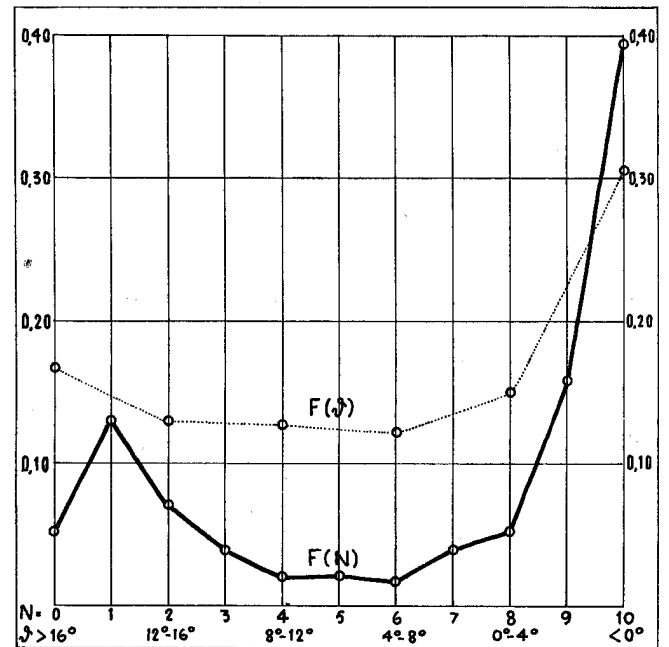


Fig. 16.

von Fällen für $N = 10$ und $N = 0$; besonders gross ist die Anhäufung für $N = 10$.

Eine Kurve von demselben Charakter kann man auch für andere Elemente bekommen, wenn man für diese eine Skala ähnlicher Art wie die Bewölkungsskala benutzt. Beispielsweise werden wir die in der ersten Kolonne von Tabelle 8 gegebene Skala für die Lufttemperatur in Oslo im Jahre 1933 verwenden. In dieser Skala sind Stufen von

4° C benutzt, aber am oberen Ende der Skala sind alle Fälle mit einer Temperatur gleich oder höher als 16° C und am unteren Ende alle Fälle mit einer Temperatur niedriger als 0° C gesammelt. Unter Benutzung der in Tabelle 6 gegebenen Werte erhält man die in der Tabelle 8 gegebene Häufigkeitsverteilung.

Tabelle 8.

Temperaturstufe	Anzahl	Prozentuale Häufigkeit
> 16.0°	797	16.7
12.0 — 15.9	562	12.9
8.0 — 11.9	555	12.7
4.0 — 7.9	530	12.2
0.0 — 3.9	647	14.9
< 0.9	1330	30.6

Die Häufigkeitskurve $F(\vartheta)$ ist in Fig. 15 als gestrichelte Kurve eingezeichnet und zeigt deutlich die Anhäufung von Fällen an beiden Enden der Skala.

2. Das Element y ist eine Funktion einer Grösse x , deren Häufigkeitskurve dem Maxwell'schen Gesetz genügt.

Die Anzahl dA von Fällen, wo der Wert von x zwischen x und $x + dx$ liegt, ist dann:

$$dA = H(x) dx = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(x-x_m)^2} dx.$$

Wenn die Grösse y durch die Gleichung:

$$(13) \quad x = \psi(y)$$

gegeben ist, so erhält man:

$$dA = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(\psi(y)-x_m)^2} \psi'(y) dy.$$

Die Anzahl dA von Fällen, wo der Wert von y zwischen y und $y + dy$ liegt, ist definitionsgemäss:

$$dA = H'(y) dy,$$

wo $H'(y)$ die Häufigkeit von y ist.

Folglich erhält man:

$$(14) \quad H'(y) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(\psi(y)-x_m)^2} \psi'(y).$$

Diese Häufigkeitskurve ist verschieden von derjenigen, die man nach dem einfachen Maxwell'schen Gesetz bekommt. Dazu kommen die

Komplikationen, die davon herrühren, dass die Verteilung von x gewöhnlich nicht das einfache Maxwell'sche Gesetz, sondern das Gesetz bei gemischten Verteilungen befolgt. Dann wird die Verteilung von y nicht durch Gleichung (14) gegeben, sondern durch eine Summe solcher Ausdrücke.

Beispiel 1: Wir nehmen an, dass die Häufigkeiten der x -Komponente des Windes durch die Gleichung:

$$H(v_x) = 0.18 e^{-0.102(v_x-2.0)^2}$$

gegeben ist. Diese Kurve ist in Fig. 17 als gestrichelte

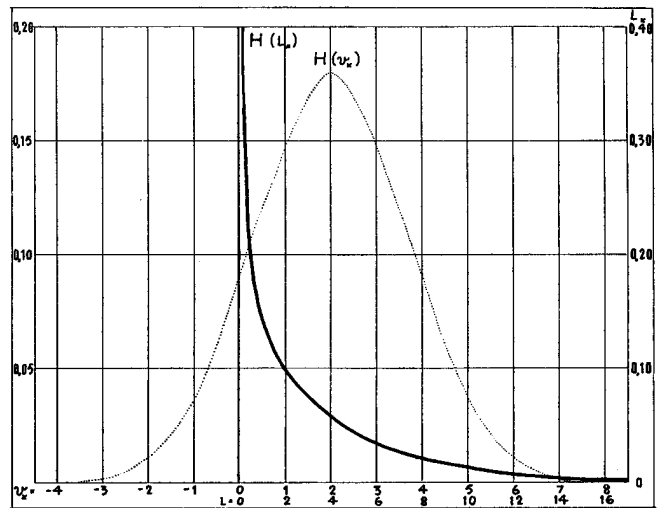


Fig. 17.

Linie gezeichnet. Für die kinetische Energie pro Masseneinheit, L_x , hat man:

$$v_x = \pm \sqrt{2L_x}$$

und Gleichung (14) gibt für die Häufigkeit der kinetischen Energie:

$$H(L_x) = \frac{0.18}{\sqrt{L_x}} (e^{-0.102(\sqrt{2L_x}-2.0)^2} + e^{-0.102(-\sqrt{2L_x}-2.0)^2}).$$

Diese Kurve ist in Fig. 17 eingetragen, und sie hat einen ganz anderen Charakter als die Häufigkeitskurve für v_x .

Beispiel 2: Als zweites Beispiel berechnen wir die Verteilung der kinetischen Energie L_x für die in Tabelle 1 gegebene Verteilung von v_x .

Die letzte Kolonne in Tabelle 9 gibt die wirkliche Verteilungskurve $F(L)$ der kinetischen Energie. Sie ist in Fig. 18 eingetragen.

Tabelle 9.

Geschwindigkeitsstufe	Stufe der kinetischen Energie	Anzahl pro Stufe	Anzahl pro Einheit der kin. Energie
0—1.0	0— 0.5	68.8	137.6
1.1—2.0	0.6— 2.0	22.3	14.9
2.1—3.0	2.1— 4.5	4.3	2.1
3.1—4.0	4.6— 8.0	1.7	0.5
4.1—5.0	8.1—12.5	1.5	0.3
5.1—6.0	12.6—18.0	0.4	0.1
6.1—7.0	18.1—24.5	0.0	0.0

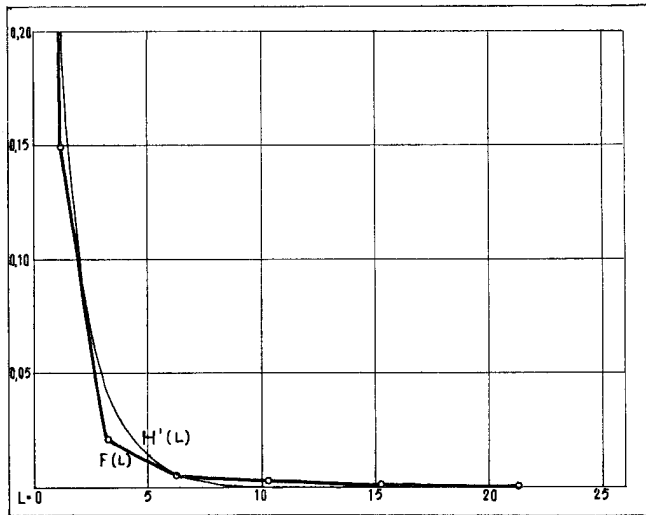


Fig. 18.

Nach Abschnitt 9 ist die Häufigkeitskurve von v_x mit guter Annäherung durch die Gleichung:

$$F'(v_x) = 0.244 e^{-0.188(v_x + 0.124)^2} + 0.454 e^{-0.650(v_x + 0.124)^2}$$

gegeben. Nach den obigen theoretischen Überlegungen soll man dann erwarten, dass die Häufigkeitskurve:

$$H'(L_x) = \frac{0.244}{\sqrt{L_x}} (e^{-0.188(\sqrt{2L_x} + 0.124)^2} + e^{-0.188(-\sqrt{2L_x} + 0.124)^2}) + \frac{0.454}{\sqrt{L_x}} (e^{-0.650(\sqrt{2L_x} + 0.124)^2} + e^{-0.650(-\sqrt{2L_x} + 0.124)^2})$$

mit guter Annäherung die wirkliche Verteilungskurve $F(L_x)$ wiedergeben wird.

Die Kurve $H'(L_x)$ ist in Fig. 18 eingezeichnet und man sieht, dass ihr Verlauf gut mit der wirklichen Verteilungskurve übereinstimmt.

3. Das Element z ist eine Funktion von zwei Grössen x und y , deren Häufigkeitskurven dem Maxwell'schen Gesetz genügen.

Die Anzahl da von Fällen, wo der Wert von x zwischen x und $x + dx$ und gleichzeitig der Wert von y zwischen y und $y + dy$ liegt, ist dann:

$$da = \sqrt{\frac{k_x}{\pi}} e^{-k_x(x-x_m)^2} dx \sqrt{\frac{k_y}{\pi}} e^{-k_y(y-y_m)^2} dy = \sqrt{\frac{k_x k_y}{\pi}} e^{-k_x(x-x_m)^2 - k_y(y-y_m)^2} dy dx.$$

Wenn die Grösse z durch die Gleichung:

$$(15) \quad y = \varphi(x, z)$$

definiert ist, so erhält man:

$$da = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} e^{-k_x(x-x_m)^2 - k_y(\varphi(x,z)-y_m)^2} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} dz dx.$$

Die gesämte Anzahl dA von Fällen, wo z einen Wert zwischen z und $z + dz$ hat, ist folglich:

$$dA = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_x(x-x_m)^2 - k_y(\varphi(x,z)-y_m)^2} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} dx \right] dz,$$

und die Häufigkeitskurve $H'(z)$ von z wird:

$$(16) \quad H'(z) = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_x(x-x_m)^2 - k_y(\varphi(x,z)-y_m)^2} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} dx.$$

Ein einfacher Fall dieser Art ist von Bjørkdal und mir¹⁾ behandelt worden, nämlich die Häufigkeitskurve der skalaren Geschwindigkeit v . Für diese hat man:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Wir setzen voraus, dass das Maxwell'sche Gesetz für die Komponenten v_x und v_y gilt und dass die Streuung für beide dieselbe ist. Wir haben dann:

$$H(v_x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(v_x - v_{x,m})^2}, \quad H(v_y) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k(v_y - v_{y,m})^2},$$

wo $v_{x,m}$ und $v_{y,m}$ die Mittelwerte von v_x und v_y sind.

Für die Häufigkeit $H'(v)$ der skalaren Geschwindigkeit fanden wir:

$$H'(v) = \frac{kv}{\pi} e^{-k(v^2 + v_{x,m}^2 + v_{y,m}^2)} \int_0^{2\pi} e^{2kv' \sqrt{v_{x,m}^2 + v_{y,m}^2} \cos \varphi} d\varphi.$$

Diese Kurve kann recht verschieden von den gewöhnlichen Maxwell'schen Verteilungskurven sein. Einen ähnlichen Fall hat man für die relative

¹⁾ Th. Hesselberg und E. Bjørkdal: Über das Verteilungsgesetz der Windunruhe. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. Hergesell-Festschrift.

Feuchte U . Sie ist eine Funktion der absoluten Feuchte E der Lufttemperatur:

$$U = U(\vartheta, E).$$

Die Verteilungen von ϑ und E befriedigen jede für sich das Maxwellsche Gesetz, während die Verteilungskurve für U einen ganz anderen Charakter hat.

In der Tabelle 10 findet man für Stufen von 10 Prozent der relativen Feuchte die Häufigkeiten in Oslo im Jahre 1933, berechnet nach den Terminbeobachtungen. Die Häufigkeitskurve ist in Fig. 19 gegeben.

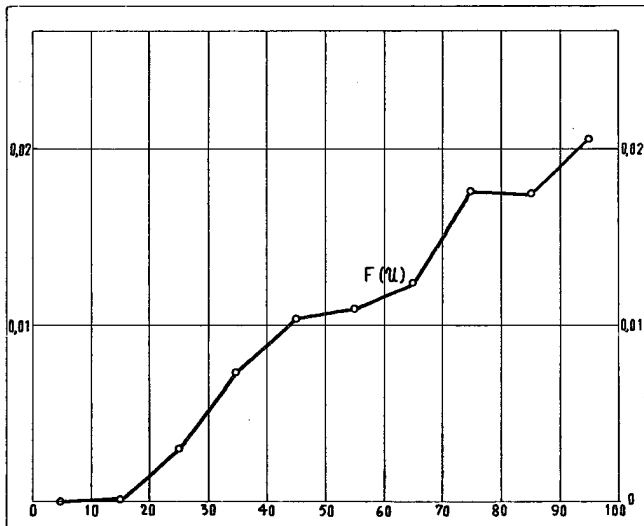


Fig. 19.

Tabelle 10.

Stufe der relativen Feuchte	Anzahl von Fällen	Häufigkeit pro Einheit der rel. Feuchte
0— 10	0	0
11— 20	1	0.0001
21— 30	34	0.0031
31— 40	80	0.0073
41— 50	114	0.0104
51— 60	119	0.0109
61— 70	136	0.0124
71— 80	194	0.0177
81— 90	191	0.0175
91—100	226	0.0206

12. Schlussbemerkung.

Es ist in dieser Abhandlung nachgewiesen worden, dass die Häufigkeitskurven von einigen meteorologischen Grössen (die Komponenten des Windes, die Lufttemperatur, der Luftdruck, die absolute Feuchte) mit guter Annäherung dem Maxwellschen Gesetz bei gemischten Verteilungen genügen, während die Häufigkeitskurven davon abgeleiteter Grössen (die skalare Windgeschwindigkeit, die kinetische Energie des Windes, die relative Feuchte) von anderem Charakter sind, aber doch aus dem Maxwellschen Gesetz abgeleitet werden können.

Es bleibt übrig, die Gründe nachzuweisen, warum einige Grössen in dieser Hinsicht als Fundamentalgrössen auftreten. Ich hoffe später dieses Problem behandeln zu können.